МАТЕМАТИКА

УДК 519.4

Л. А. Мартынова

НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ УНИПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП ГРУПП ШЕВАЛЛЕ ТИПА E_6, E_7, E_8

Пусть Φ — неразложимая система корней одного из типов E_6, E_7, E_8. Пусть $U\Phi(K)$ — унипотентная подгруппа группы Шевалле типа Φ над полем K, $\{e_r(r\in\Phi),\ldots\}$ — базис Шевалле; через $N\Phi(K)$ обозначим подалгебру лиевой алгебры типа Φ с базисом $\{e_r(r\in\Phi^+)\}$. Любой элемент группы $U\Phi(K)$ записывается единственным образом в виде $\chi_{r_1}(t_1)\ldots\chi_{r_N}(t_N)$, где $r_i\in\Phi$, $t_i\in K$, $i=\overline{1,N}$. Пусть $\pi(t_1e_{r_1}+\ldots+t_Ne_{r_N})=$ $=\chi_{r_1}(t_1)\ldots\chi_{r_N}(t_N)$, т. е. π — изоморфизм группы $N\Phi(K)$ относительно операции $\alpha\circ\beta=\pi^{-1}(\pi(\alpha)\pi(\beta))$. В [1] было установлено соответствие между нормальными подгруппами группы $UA_{n-1}(K)$ и идеалами ассоциированного кольца Ли. В [2] аналогичное соответствие устанавливается для классических типов. Основным результатом является

Теорема 1. *Пусть K — поле, $2K=K$. Идеалы лиева кольца $NE_i(K)$, и только они, являются нормальными подгруппами присоединенной группы $\langle NE_i(K),\circ\rangle$, $i=\overline{6,8}$.*

Идеалы лиева кольца описываются ниже теоремой 2.

Будем следовать обозначениям и терминологии [2] и [3]. Аналогично [2] введем понятие угла. Если $r\in\Phi$, то совокупность корней $s\in\Phi^+$, для которых $s-r$ — линейная комбинация простых корней с неотрицательными коэффициентами, обозначим через $\{r\}^+$. Корень s называется углом подмножества $H\subset N\Phi(K)$, если совокупность H_s всех s-координат элементов из H отлична от нуля и $H_r=0$ при $s\neq r\in\Phi^+$, $s\in\{r\}^+$. Как и в [2], положим при $r\in\Phi$

$$T(r)=\langle Ke_s\,|\,s\in\{r\}^+\rangle,\quad Q(r)=\langle Ke_s\,|\,s\in\{r\}^+,\ s\neq r\rangle.$$

Пусть H — идеал лиева кольца $N\Phi(K)$ или нормальная подгруппа присоединенной группы, K — поле, $\Phi=E_6$, E_7, E_8.

Лемма 1 [2]. *Пусть H — идеал лиева кольца $NE_l(K)$, где $l=$ $=6$, 7, 8, K — поле или нормальная подгруппа присоединенной группы. Если $H\subset T(r)$ для некоторого положительного корня r и $H_r\neq0$, то $H=Q(r)+H_re_r$.*

Описание идеалов в лиевом кольце $NE_l(K)$ дает

Теорема 2. *Пусть K — поле характеристики $\neq2$. Аддитивная подгруппа $H\neq0$ лиева кольца $NE_l(K)$, $l=6$, 7 или 8, является его идеалом тогда и только тогда, когда для любого ее угла r и простого корня p, таких, что $r+p\in\Phi$ и $T(r+p)$ не входит в H, всегда существуют угол s и ненулевой элемент $d\in K$, для которых s-я координата любого элемента из H совпадает с произведением r-й координаты на d и хотя бы для одного $i=0, 1,\ldots, l-4$ выполняется условие: существуют простые корни $p_0=p, p_1,\ldots, p_i$, такие, что*

$$m_j=p_0+p_1+\ldots+p_j,\ r+m_j,\ s+m_j\in\Phi,$$

$$H\supset(\ldots((H*Ke_p)*Ke_{p1})*\ldots)*Ke_{pj},\ j=\overline{0,\ i},$$

$$H\supset Q(r+m_i)+Q(s+m_i).$$

Доказательство. Условие для аддитивной подгруппы $H \subset \subset NE_l(K)$ являться идеалом, очевидно, равносильно ее замкнутости относительно лиева умножения на корневые подгруппы Ke_p, где p пробегает простые корни. Поэтому описание заключается в выявлении условий, когда $H * Ke_p \subset H$. Эти условия исследуются ниже детально для типа E_6.

Если $\alpha \in NE_l(K)$, то через $T(\alpha)$ обозначим наименьшую сумму $T(r_1) + \ldots + T(r_k)$, содержащую α; $Q(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} Q(r_i)$. При $S \subset NE_l(K)$ полагаем $T(S) = \sum_{\alpha \in S} T(\alpha)$, $Q(S) = \sum_{\alpha \in S} Q(\alpha)$.

Элемент e_r базиса Шевалле обозначим также символом $e(r)$. Нам потребуется представление систем корней типа E_6, установленное Н. Бурбаки [3, таблицы], в частности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — простые корни, а для корня $r = \sum_{i=1}^{6} m_i \alpha_i \in E_6^+$ используется обозначение $\left(\substack{m_1 m_3 m_2 m_5 m_6 \\ m_1}\right)$.

Несложно доказывается

Лемма 2. *Если корень r есть угол подмножества $H \subset NE_6(K)$, причем $h(r) \geqslant 7$ или r — один из корней* $\left(\substack{11111\\1}\right)$, $\left(\substack{11111\\0}\right)$, *то* $Q(r) \subset H$.

Пусть H — идеал лиева кольца $NE_6(K)$, $\alpha = t_1' e(r_1) + \ldots + t_N' e(r_N) \in H$. Рассмотрим лиево произведение $\alpha * Ke(\alpha_1) = K\Big(\sum_{r+\alpha_1 \in E_6^+} t_r e(r+\alpha_1)\Big)$.

Перенумеруем слагаемые в сумме в соответствии с высотой $h(r+\alpha_1)$. Получим

$$\alpha * Ke(\alpha_1) = K\Big(t_1 e\left(\substack{11000\\0}\right) + t_2 e\left(\substack{11100\\0}\right) + t_3 e\left(\substack{11110\\0}\right) +$$
$$+ t_4 e\left(\substack{11100\\1}\right) + t_5 e\left(\substack{11111\\0}\right) + t_6 e\left(\substack{11110\\1}\right) + t_7 e\left(\substack{11210\\1}\right)\Big) \pmod{I},$$

где I — идеал, порожденный корневыми подгруппами $Ke(r)$, $h(r) \geqslant 7$ или $r = \left(\substack{11111\\1}\right)$.

Если $t_1 \neq 0$ или $t_1 = 0$, $t_2 \neq 0$, то $T\left(\substack{11000\\0}\right) \subset H$ или $T\left(\substack{11100\\0}\right) \subset H$ соответственно.

Пусть $t_1 = t_2 = 0$, $t_3 \neq 0$. Тогда включения

$$((\alpha * Ke(\alpha_1)) * Ke(\alpha_2)) \subset H, \quad ((\alpha * Ke(\alpha_1)) * Ke(\alpha_6)) \subset H$$

дают следующее равенство по модулю $T\left(\substack{11110\\1}\right) + T\left(\substack{11111\\0}\right)$:

$$\alpha * Ke(\alpha_1) = K\Big(t_3 e\left(\substack{11110\\0}\right) + t_4 e\left(\substack{11100\\1}\right)\Big).$$

Итак, если $T\left(\substack{11110\\0}\right)$ не входит в H, то для произвольного элемента из H коэффициенты при $e\left(\substack{01110\\0}\right)$ и $e\left(\substack{01100\\1}\right)$ обращаются в нуль лишь одновременно.

Если $t_i = 0$, $i < 4$, $t_4 \neq 0$, то $T\left(\substack{11110\\1}\right) \subset H$ и $\alpha * Ke(\alpha_1) = K\Big(t_4 e\left(\substack{11100\\1}\right) + t_5 e\left(\substack{11111\\0}\right)\Big) \pmod{T\left(\substack{11110\\1}\right)}$. Таким образом, либо

$T(\substack{11100\\1}) \subset H$, либо для любого элемента из H коэффициенты при $e(\substack{01100\\1})$ и $e(\substack{01111\\0})$ обращаются в нуль лишь одновременно и $Q(\substack{11100\\1}) \subset H$.

Аналогично рассматривается случай $t_i=0$, $i<5$, $t_5\neq 0$, и остается применить лемму 1.

В лиевом произведении $\alpha * Ke(\alpha_2) = K\Big(\sum\limits_{r+\alpha_2 \in E_6^+} t_r e(r+\alpha_2)\Big)$ перенумеровав слагаемые в соответствии с высотой $h(r+\alpha_2)$, получим

$$\alpha * Ke(\alpha_2) = K\big(t_1 e(\substack{00100\\1}) + t_2 e(\substack{00110\\1}) + t_3 e(\substack{01100\\1}) + t_4 e(\substack{01110\\1}) + t_5 e(\substack{11100\\1}) + t_6 e(\substack{00111\\1}) + t_7 e(\substack{11110\\1}) + t_8 e(\substack{01111\\1})\big) \pmod I.$$

Случай $t_1\neq 0$ охвачен леммой 1. Допустим $t_1=0$, $t_2\neq 0$. Имеем $T(\substack{01110\\1}) \subset H$, и тогда либо $T(\alpha * Ke(\alpha_2)) \subset H$, либо $Q(\alpha * Ke(\alpha_2)) \subset H$ и для любого элемента из H коэффициенты при $e(\substack{00110\\0})$, $e(r)$, где r — один из корней $(\substack{01100\\0})$, $(\substack{11100\\0})$, обращаются в нуль лишь одновременно.

Аналогично при $t_i\neq 0$, $i<j$, $t_j\neq 0$, $j=3, 4, 5, 6$, если $T(\alpha * Ke(\alpha_3))$ не входит в H, то $Q(\alpha * Ke(\alpha_2)) \subset H$. Далее используется лемма 1.

В соответствии со схемой доказательства рассмотрим $H * Ke_p$, $p=\alpha_3$, и, перенумеровав слагаемые в соответствии с высотой $h(r+\alpha_3)$, получим

$$\alpha * Ke(\alpha_3) = K\big(t_1 e(\substack{11000\\0}) + t_2 e(\substack{01100\\0}) + t_3 e(\substack{01110\\0}) + t_4 e(\substack{01100\\1}) + t_5 e(\substack{01110\\1}) + t_6 e(\substack{01111\\0}) + t_7 e(\substack{01111\\1})\big) \pmod I.$$

Если $t_1=0$, $t_2\neq 0$, то утверждение следует из леммы 1. Пусть $t_i=0$, $i<j$, $t_j\neq 0$, $j=3, 4, 5$. Тогда если $T(\alpha * Ke(\alpha_3))$ не входит в H, то либо $Q(\alpha * Ke(\alpha_3)) \subset H$, либо $Q((\alpha * Ke(\alpha_3)) * Ke(\alpha_1)) \subset H$ и для произвольного элемента из H коэффициенты при $e(r_j)$ и $e(r_s)$, где r_j, по крайней мере, один из корней $(\substack{00110\\0})$, $(\substack{00100\\1})$, $(\substack{00110\\1})$ и r_s — один из корней $(\substack{00100\\1})$, $(\substack{00110\\1})$, обращаются в нуль лишь одновременно. Далее используем лемму 1.

Случай $t_1\neq 0$ рассматривается аналогично.

Рассмотрим лиево произведение $\alpha * Ke(\alpha_4)$. Перенумеровав слагаемые, как и в предыдущих случаях, по высоте $h(r+p)$, $p=\alpha_4$, получим

$$\alpha * Ke(\alpha_4) = K\big(t_1 e(\substack{01100\\0}) + t_2 e(\substack{00100\\1}) + t_3 e(00110) + t_4 e(\substack{00111\\0}) + t_5 e(\substack{11100\\0}) + t_6 e(\substack{01210\\1}) + t_7 e(\substack{01211\\1}) + t_8 (\substack{11210\\1})\big) \pmod I.$$

Пусть $t_1, t_2, t_3 \neq 0$, тогда $T(\substack{11100\\0}) \subset H$, $T(\substack{00111\\0}) \subset H$ и возможны четыре случая:

1) $T(\alpha * Ke(\alpha_4)) \subset H$;
2) $Q(\alpha * Ke(\alpha_4)) \subset H$;
3) $Q((\alpha * Ke(\alpha_4)) * Ke(\alpha_5)) \cup Q((\alpha * Ke(\alpha_4)) * Ke(\alpha_2)) \cup Q((\alpha * Ke(\alpha_4)) * * Ke(\alpha_3)) \subset H$,

и в двух последних случаях для произвольного элемента из H, по крайней мере, два коэффициента из трех — при $e(\alpha_2)$, $e(\alpha_3)$, $e(\alpha_5)$ — могут обращаться в нуль лишь одновременно;

4) $Q(((\alpha * Ke(\alpha_4)) * Ke(\alpha_5)) * Ke(\alpha_6)) \cup Q(((\alpha * Ke(\alpha_4)) * Ke(\alpha_3)) * * Ke(\alpha_1)) \subset H$,

и для любого элемента из H, по крайней мере, коэффициенты при одной из пар $e(\alpha_3)$, $e(\alpha_2)$ или $e(\alpha_2)$, $e(\alpha_5)$ обращаются в нуль лишь одновременно.

Далее рассуждения аналогичны приведенным выше.

Лиевы произведения $H*Ke(\alpha_5)$ и $H*Ke(\alpha_6)$ исследуем, используя симметрию диаграмм Дынкина и существование графового автоморфизма, переводящего α_6 в α_1 и α_5 в α_3.

Приведенная схема доказательства необходимости в теореме 2 сохраняется и для типов E_7 и E_8, хотя для этих случаев доказательство более громоздкое и мы его опускаем.

Достаточность условий теоремы 2 получается непосредственной проверкой замкнутости подгруппы H относительно лиева умножения. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1 получаем, показывая, как и в доказательстве теоремы 2, что нормальные подгруппы в $\langle NE_l(K), \circ\rangle$, $l=6, 7, 8$, есть в точности аддитивные подгруппы, описанные в теореме 2. При этом в доказательстве теоремы 2 лиево умножение заменяется коммутированием и используется

Лемма 3. *Пусть* $a \in N\Phi(K)$, $\Phi = E_l$, $l=6, 7, 8$, $r \in \Phi^+$, $t \in K$. *Тогда* $[te(r), a] = te(r) * a$ *по модулю* $L_{h(r)+2}$.

Доказательство вытекает из лемм 1 и 2, а также коммутаторных соотношений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левчук В. М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами//Алгебра и логика. 1976. 15, № 5. 558—579.
2. Левчук В. М., Мартынова Л. А. Нормальное строение унипотентных подгрупп групп Шевалле и идеалы ассоциированного кольца Ли//Конструкции в алгебре и логике. Тверь, 1990. 60—66.
3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли, IV—VI. М., 1972.

Поступила в редакцию
31.03.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1995. № 1

УДК 512.818

К. П. Суровихин

О ПСЕВДОАЛГЕБРАХ ЛИ

В настоящей работе доказывается, что каждая псевдогруппа G^∞ порождает псевдоалгебру L^∞, приводится закон коммутирования в L^∞ (являющийся обобщением соответствующего закона для коммутирования операторов в конечных алгебрах Ли L^k) и отмечается роль инволютивных коэффициентов в построении L^∞. В отличие от работы [1] наши построения носят более конкретный характер. Указывается также процесс расширения алгебр

$$L^0 \leftarrow L^1 \leftarrow L^2 \leftarrow \ldots,$$

с предельной псевдоалгеброй L^∞. Случай G^k, который является частным случаем G^∞, рассмотрен в [2].