Е. В. Щепин, Конечномерный бикомпактный абсолютный окрестностный ретракт метризуем, *Докл. АН СССР*, 1977, том 233, номер 3, 304–307

https://www.mathnet.ru/dan40369

Доклады Академии наук СССР
1977. Том 233, № 3

УДК 513.83 МАТЕМАТИКА

Е. В. ЩЕПИН

КОНЕЧНОМЕРНЫЙ БИКОМПАКТНЫЙ АБСОЛЮТНЫЙ ОКРЕСТНОСТНЫЙ РЕТРАКТ МЕТРИЗУЕМ

(Представлено академиком П. С. Александровым 6 I 1977)

Целью настоящей заметки является доказательство теоремы, сформулированной в заглавии. Это доказательство опирается, с одной стороны, на чисто геометрические рассуждения (лемма о перегородках в произведении бикомпакта на отрезок) и, с другой,— на рассуждения «несчетного» характера в духе статьи ([6]).

Под размерностью мы понимаем размерность dim, все рассматриваемые пространства бикомпактны, все отображения непрерывны.

1. Лемма о перегородках. Систему пар замкнутых множеств $Q=\{(F_1^+, F_1^-), (F_2^+, F_2^-), \ldots, (F_n^+, F_n^-)\}$ бикомпакта X мы будем называть *кубической* системой ранга n, если $F_i^+\cap F_i^-=\varnothing$ при $i=1, 2, \ldots, n$; *телом* кубической системы назовем объединение ее элементов $|Q|=\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i^\pm$. Кубическую систему будем называть *существенной*, если всякая система перегородок $\{C_i\}_{i=1}^n$, где C_i — перегородка между F_i^+ и F_i^-, имеет непустое пересечение. Как известно, размерность бикомпакта равна максимуму рангов имеющихся в нем существенных кубических систем.

Через I всюду далее обозначаем отрезок $[-1, 1]$, через I^n — n-мерный куб $I^n=\{(x_1\ldots x_n): |x_i|\leqslant 1\}$ и через S^{n-1} — его границу в n-мерном эвклидовом пространстве.

Лемма 1 (о перегородках). *Пусть $Q=\{F_i^\pm\}_{i=1}^n$ — существенная кубическая система n-мерного бикомпакта X; тогда в $X\times I$ существенной кубической системой является*

$$Q'=\{(F_1^+\times I, F_1^-\times I), \ldots, (F_n^+\times I, F_n^-\times I), (X\times 1, X\times(-1))\}.$$

Доказательство. Для любого $i\leqslant n$ возьмем такую непрерывную функцию f_i: $X\to I$, что $f_i(F_i^+)=1$ и $f_i(F_i^-)=-1$. Совокупность $\{f_i\}_{i=1}^n$ определяет отображение X в I^n, при котором тело системы $|Q|$ отображается в сферу S^{n-1}; ограничение этого отображения на $|Q|$ обозначим через χ и назовем *характеристическим отображением* системы Q. Легко видеть, что гомотопический тип характеристического отображения определяется самой кубической системой и не зависит от произвола, который имеется в определении самого характеристического отображения. Из лемм 2 и 3 работы ([2]), стр. 343, вытекает, что χ можно продолжить до непрерывного отображения всего X в S^{n-1} в том и только том случае, когда наша кубическая система несущественна.

Рассмотрим группы когомологий Александрова — Чеха $H^{n-1}(X)$, $H^{n-1}(F)$ и $H^{n-1}(S^{n-1})\cong\mathbf{Z}$. Зафиксируем образующую $e\in H^{n-1}(S^{n-1})$. Поскольку гомотопический тип характеристического отображения однозначно определен, то и класс $\chi^*(e)\in H^{n-1}(F)$ определяется однозначно нашей кубической системой; мы будем называть его *характеристическим классом* нашей системы. В силу теоремы Хопфа о продолжении отображений в сферу (см. ([1])) теперь можно заключить, что кубическая система существенна в том и только том случае, когда ее характеристический класс не принадлежит образу гомоморфизма ограничения i^*: $H^{n-1}(X)\to H^{n-1}(F)$ (i: $F\to X$ — тождественное вложение).

Рассмотрим теперь надстройку ΣX (она получается из $X\times I$ склеиванием в точки оснований $X\times 1$ и $X\times(-1)$). Для любого положительного $\varepsilon<1$ определим кубическую систему Q_ε в ΣX следующим образом:

$$Q_\varepsilon=\{(F_i^+\times[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon],\ F_i^-\times[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon])\}_{i=1}^n\cup$$
$$\cup(\{(x,\ t)\in\Sigma X\colon t\leqslant-1+\varepsilon\},\ \{(x,\ t)\in\Sigma X\colon t\geqslant 1-\varepsilon\}).$$

Очевидно, что системы Q' и Q_ε существенны или несущественны одновременно. Далее надстройка $\Sigma\chi$ над характеристическим отображением системы Q продолжается на некоторую окрестность $\Sigma|Q|$, которая содержит $|Q_\varepsilon|$ для достаточно малого ε; обозначим это продолжение через $\overline{\Sigma\chi}$. Так как когомологии надстройки естественно изоморфны когомологиям исходного пространства со сдвигом на единицу в размерностях, то $(\Sigma\chi)^*(\Sigma e)$ не принадлежит образу гомоморфизма $(\Sigma i)^*$ и потому отображение $\Sigma\chi$: $\Sigma|Q|\to\Sigma S^{n-1}\approx S^n$ не продолжается на ΣX. Тем более не продолжается на ΣX ограничение отображения $\overline{\Sigma\chi}$ на $|Q_\varepsilon|$ при любых ε. Но, как легко видеть, если ε достаточно мало, то ограничение $\overline{\Sigma\chi}$ на $|Q_\varepsilon|$ при достаточно малых ε будет гомотопно характеристическому отображению системы Q_ε, откуда можно заключить, что система Q_ε существенна для некоторого ε, а значит, существенна и система Q'. Лемма доказана.

2. О мягких отображениях.

Определение (см. [6]). Отображение f: $X\to Y$ топологического пространства X на Y называется **мягким**, если, каковы бы ни были паракомпакт Z, его замкнутое подпространство A и такие отображения g: $Z\to Y$, s: $A\to X$, что $fs=g|_A$, существует отображение $\bar{s}$: $Z\to X$, для которого $f\bar{s}=g$ и $\bar{s}|_A=s$.

Без доказательства отметим следующие элементарные свойства мягких отображений:

(1) Всякое мягкое отображение является r-отображением в смысле [3], т. е. обладает правым обратным.

(2) Мягкое отображение является гомотопической эквивалентностью. Более того, если X мягко отображается на Y, то Y вкладывается в X в качестве деформационного ретракта.

(3) Мягкое отображение является расслоением в смысле Серра.

(4) Как образ, так и прообраз абсолютного (окрестностного) ретракта при мягком отображении является абсолютным (окрестностным) ретрактом. Прообразы всех точек при мягком отображении являются абсолютными ретрактами.

Размерностью бикомпакта X в точке $x\in X$ называем минимум размерностей ее окрестностей и обозначаем $\dim_x X$.

Лемма 2. *Пусть f: $X\to Y$ — мягкое отображение бикомпактов и $x\in X$ является точкой неоднократности f (т. е. $x\neq f^{-1}f(x)$); тогда* $\dim_x X>\dim_{f(x)}Y$.

Доказательство. Пусть Ox — произвольная окрестность x. Из свойства 4 мягких отображений нетрудно вывести существование такого отображения p: $I\to Ox\cap f^{-1}f(x)$, что $p(1)=x$ и $p(-1)=x'\neq x$. Пусть π: $Y\times I\to Y$ — проекция произведения. Определим отображение s: $f(x)\times I\to X$ формулой $s(f(x),\ t)=p(t)$. Пусть $\bar{s}$: $Y\times I\to X$ — продолжение s на $Y\times I$, для которого $f\bar{s}=\pi$. Выберем такую замкнутую окрестность $Of(x)$, что $\bar{s}(Of(x)\times I)\subset Ox$ и $\bar{s}(Of(x)\times 1)\cap\bar{s}(Of(x)\times(-1))=\emptyset$ и $\dim Of(x)=\dim_{f(x)}Y=n$. Пусть $\{F_i^\pm\}_{i=1}^n$ — существенная кубическая система в $Of(x)$. Тогда система $\{F_i^\pm\times I\}_{i=1}^n\cup(Of(x)\times 1,\ Of(x)\times(-1))$ существенна в $Y\times I$ в силу леммы 1. При отображении $\bar{s}$ эта система переходит в кубическую систему в Ox, которая существенна, как образ существенной. Тем самым в Ox найдена существенная кубическая система ранга $>\dim_{f(x)}Y$ и наша лемма доказана.

3. О функторе конус. Конус над пространством X будем обозначать $\mathrm{Con}X$. Конус получается отождествлением в точку верхнего основания $X\times 1$ произведения $X\times[0, 1]$. Конусом над отображением f: $X\times Y$ называем естественное отображение $\mathrm{Con}\, f$: $\mathrm{Con}\, X\to\mathrm{Con}\, Y$. Таким образом, Con является ковариантным функтором Con: $B\to B$ (B — категория бикомпактов с непрерывными отображениями). Этот функтор непрерывен и сохраняет вес.

Дополним список свойств мягких отображений:

(5) Отображения f и $\mathrm{Con}\, f$ мягки одновременно.

Лемма 3. *X является* ANR *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Con}\, X$ *является* AR.

Доказательство. Во-первых, заметим, что конус над тихоновским кубом является абсолютным ретрактом (это следует из свойств (4) и (5) мягких отображений). Предположим теперь, что X является ANR и содержится в тихоновском кубе I^τ. Пусть r: $OX\to X$ — ретракция окрестности X. Зафиксируем такую функцию φ: $I^\tau\to[0, 1]$, что $\varphi(X)=0$ и $\varphi(I^\tau\setminus OX)=1$. Мы имеем $\mathrm{Con}\, X\subset\mathrm{Con}\, I^\tau$. Ретракция R: $\mathrm{Con}\, I^\tau\to\mathrm{Con}\, X$ задается формулой

$$R(x, t)=(r(x), \max(t, \varphi(x))).$$

Но ретракт абсолютного ретракта сам является абсолютным ретрактом, откуда $\mathrm{Con}\, X$ является AR.

Обратное утверждение доказывается еще проще и не будет использовано нами в дальнейшем.

Следующая лемма не используется при доказательстве основного результата этой работы и потому мы приведем ее без доказательства.

Лемма 4. *Пусть Ψ — решетка* (см. ([6])) *фактор-отображений бикомпакта X; тогда* $\mathrm{Con}\Psi=\{\mathrm{Con}\,\psi$: $\psi\in\Psi\}$ *является решеткой на* $\mathrm{Con}\, X$.

4. Доказательство теоремы, сформулированной в заглавии. Предположим, что X — неметризуемый конечномерный ANR. Тогда $\mathrm{Con}\, X$ в силу леммы 3 является конечномерным неметризуемым AR. В силу теоремы 10 ([6]) мягкие отображения образуют решетку на $\mathrm{Con}\, X$. Отсюда вытекает существование такого мягкого отображения f: $\mathrm{Con}\, X\to Y$, что вес $wY=\aleph_1$. Так как мягкое отображение не может повышать размерность (в силу свойства (1)), то Y является конечномерным AR. В силу результатов ([6]) существует такой непрерывный спектр $\{Y_\alpha;\ p_\alpha^\beta\}_{\beta<\omega_1}$, все пространства которого метризуемы и все проекции p_α^β мягки, а пределом является Y. Пусть $y\in Y$ — точка, в которой не выполнена первая аксиома счетности (такая существует, ибо AR с первой аксиомой счетности метризуем, как и всякий диадический бикомпакт). Тогда нетрудно для любого натурального n построить такую последовательность индексов $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$, что $p_{\alpha_n}(y)$ не является точкой однократности $p_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k}$ при $n\geqslant k\geqslant 2$. В силу леммы 2 получим

$$\dim_{p_{\alpha_1}(y)}Y_{\alpha_1}<\dim_{p_{\alpha_2}(y)}Y_{\alpha_2}<\ldots\dim_{p_{\alpha_n}(y)}Y_{\alpha_n}<\dim_y Y,$$

т. е., ввиду произвольности n, получим $\dim_y Y=\infty$ вопреки нашим предположениям.

5. В заключение анонсируем следующие результаты.

Теорема 1. *Если X — неметризуемый аппроксиамативный абсолютный окрестностный ретракт в смысле* ([7]) (AANR$_C$), *то* $\dim X=\infty$. *Более того,* $\dim_x X=\infty$ *для любой точки x, в которой не выполнена первая аксиома счетности.*

Теорема 2. *Всякий* ANR *имеет гомотопический тип конечного полиэдра. Всякий бикомпактный* ANR *содержит метризуемый* ANR *в качестве деформационного ретракта.*

Теорема 3. *Класс* ANR *адекватен классу мягких отображений.*

Теорема 4. *Всякий аппроксиамативный абсолютный окрестностный ретракт обладает решеткой аппроксиамативно мягких отображений.*

Теорема 2 следует из теоремы 3 и теоремы Веста ([5]), утверждающей, что всякий метризуемый компактный ANR имеет гомотопический тип конечного полиэдра.

Теорему 3 можно получить из теоремы 10 работы ([6]) при помощи конической конструкции, опираясь на лемму 4 и теорему о пересечении решеток ([6]).

Теорема 1 доказывается по той же схеме, что и доказанная нами теорема об абсолютных ретрактах, и опирается на теорему 4.

Определение аппроксиамативно мягкого отображения получится, если в определении мягкого отображения равенства $f\bar{s}=g$ и $\bar{s}|_A=s$ заменить на «приближенные». Заметим, что всякое аппроксиамативно мягкое отображение на $\varkappa$-метризуемый бикомпакт открыто, откуда следует, что всякий $\mathrm{AANR_C}$ $\varkappa$-метризуем (см. ([6])).

Добавление. Когда статья была уже сдана в печать, автору удалось доказать следующий результат.

Теорема 5. *Если f: $I^\tau \to X$ — непрерывное отображение тихоновского куба I^τ регулярного несчетного веса τ на бикомпакт X веса τ, то существует такое замкнутое подмножество $F \subset I^\tau$, гомеоморфное I^τ, что ограничение f на F является вложением.*

При помощи этой теоремы нетрудно доказать, что всякий неметризуемый абсолютный ретракт X веса τ содержит топологически $I^{\tau'}$ для любого регулярного $\tau' \leqslant \tau$ и, в частности, содержит $I^{\aleph_1}$, откуда мы другим путем можем заключить, что $\dim X = \infty$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. С. Александров*, Введение в гомологическую теорию размерности, М., «Наука», 1975. [2] *П. С. Александров, Б. А. Пасынков*, Введение в теорию размерности, М., «Наука», 1973. [3] *К. Борсук*, Теория ретрактов, М., «Мир», 1971. [4] *H. Noguchi*, Tohoku Math. J., v. 4, 93 (1952). [5] *J. E. West*, Bull. Am. Math. Soc., v. 81, № 1, 163 (1975). [6] *Е. В. Щепин*, УМН, т. 31, № 5 (1976). [7] *M. H. Clapp*, Fund. Math., v. 70, 117 (1971).