Доклады Академии наук СССР
1965. Том 162, № 4

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ

О МЕТОДАХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть дана система уравнений

$$dx / dt = f(t, x, u), \quad (x = x_1, \ldots, x_n), \quad (u = u_1, \ldots, u_m), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

с управляющими функциями $u(t)$ из некоторого полного функционального класса U и начальными условиями

$$x(t_0) = u_0$$

и непрерывный неотрицательный функционал $F[x]$, определенный на функциях $x(t)$, заданных в $t_0 \leqslant t \leqslant T$ [1, 2] (задача (1)).

Допустим, что в классе U существует оптимальное управление, т. е. что существует такая функция $\bar{u}^{(0)}(t)$, что $x(t, \bar{u}^{(0)})$ реализует минимум функционала $F[x]$

$$\inf_{u \in U} F[x(u)] = F_0.$$

Рассмотрим задачу о приближенном определении $\bar{u}^{(0)}(t)$.

Для приближенного нахождения оптимизирующего управления широко употребляется метод минимизации функционала F, в котором при помощи какого-либо алгоритма вычисляется последовательность функций $u_n(t)$ таких, что

$$F_n = F[x(u_n)] \underset{n \to \infty}{\to} F_0;$$

при этом функцию $u_n(t)$, для которой значение F_n достаточно близко к F_0, трактуют как приближение к $\bar{u}^{(0)}(t)$.

В дальнейшем будем допускать, что мы обладаем методом, позволяющим конструировать минимизирующие последовательности для рассматриваемых задач, и что U не содержит изолированных элементов.

Нетрудно убедиться в том, что гипотеза о приближении $u_n(t)$ к $\bar{u}^{(0)}(t)$ неверна. Какова бы ни была точность ε, нетрудно найти такое управление $\bar{\bar{u}}(t)$, что

$$F[x(\bar{\bar{u}})] \leqslant F_0 + \varepsilon,$$

и такое, что разность $\bar{u}^{(0)}(t) - \bar{\bar{u}}(t)$ может принимать как угодно большие значения, допустимые принадлежностью $\bar{\bar{u}}(t)$ классу U.

Выберем $\bar{\bar{u}}(t)$ совпадающей с $\bar{u}^{(0)}(t)$ всюду, кроме небольшого интервала $(t_1 - \eta,\ t_1 + \eta)$ около какой-либо точки t_1, в котором разность $\bar{\bar{u}}(t) - \bar{u}^{(0)}(t)$ сделаем превосходящей некоторое фиксированное число M_0, допустимое классом U. Очевидно, что для любой точности δ величину η можно выбрать так, чтобы разность $|x(t) - \bar{x}^{(0)}(t)| \leqslant \delta$. Выбирая η, а тем самым и δ достаточно малыми, будем иметь, что $\bar{\bar{F}} \leqslant F + \varepsilon$.

Вариационные задачи, для которых существуют минимизирующие последовательности функций, не сходящиеся равномерно к экстремальному решению, мы будем называть *некорректными вариационными задачами*. Таким образом, поставленная выше задача оптимального управления будет некорректной вариационной задачей.

Целью настоящей статьи является построение регуляризующих алгоритмов для нахождения оптимального управления, т. е. таких алгоритмов, что минимизирующие последовательности, построенные с их помощью, будут сходиться к $\bar{u}^{(0)}(t)$.

Рассмотрим сглаживающий функционал

$$G^\alpha[u] = F[x(u)] + \alpha\Omega[u],$$

где $\Omega[u]$ — регуляризующий функционал — выберем, например, в виде

$$\Omega[u] = \int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{m} [k_1(t)(u_i')^2 + k_0(t)(u_i)^2]\, dt, \quad k_1(t) > 0, \; k_0(t) > 0.$$

Функционал $G^\alpha[u]$ неотрицателен, и тем самым существует его нижняя грань G_0^α. Рассмотрим какую-либо убывающую последовательность чисел $\alpha_k \to 0$ и какие-либо управления $\hat{u}^{\alpha_k}(t)$, для которых

$$G^{\alpha_k}[\hat{u}^{\alpha_k}(t)] \leqslant G_0^{\alpha_k} + \alpha_k c,$$

где c константа, не зависимая от α.

Теорема 1. *Если существует единственное оптимальное управление $u^{(0)}(t)$ задачи* (1), *являющиеся гладкой функцией, то последовательность функций $\hat{u}^{\alpha_k}(t)$, удовлетворяющих условиям*

$$G^{\alpha_k}[\hat{u}^{\alpha_k}] \leqslant G_0^{\alpha_k} + \alpha_k c,$$

равномерно сходится к $\bar{u}^{(0)}(t)$.

Очевидно, что

$$G_0^{\alpha_k} \leqslant F[x(\bar{u}^{(0)})] + \alpha_k\Omega[\bar{u}^{(0)}] = F_0 + \alpha_k c_0 \quad (c_0 = \Omega[\bar{u}^{(0)}]).$$

Отсюда следует, что

$$G_0^{\alpha_k}[\hat{u}^{\alpha_k}] = F[x(\hat{u}^{\alpha_k})] + \alpha_k\Omega[\hat{u}^{\alpha_k}] \leqslant G_0^{\alpha_k} + \alpha_k c \leqslant F_0 + \alpha_k(c_0 + c)$$

и что

$$\alpha_k\Omega[\hat{u}^{\alpha_k}] \leqslant F_0 - F[x(\hat{u}^{\alpha_k})] + \alpha_k(c_0 + c) \leqslant \alpha_k(c_0 + c),$$

так как

$$F_0 - F[x(\hat{u}^{\alpha_k})] \leqslant 0.$$

Таким образом,

$$\Omega[\hat{u}^\alpha] \leqslant c_0 + c,$$

и совокупность функций $\{\hat{u}^{\alpha_k}(t)\}$ образует компактное семейство. Пусть подпоследовательность $\hat{u}^{\alpha_k}(t)$ равномерно сходится к функции $\bar{\bar{u}}(t)$. Очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty} F[x(\hat{u}^{\alpha_k})] + \alpha_k\Omega[\hat{u}^{\alpha_k}] = F[x(\bar{\bar{u}})] = F_0$$

и что, в силу единственности оптимального управления, $u(t) = \bar{u}^{(0)}(t)$.

Замечание 1. Если существует хотя бы одно оптимальное управление, принадлежащее классу W_2', то сходящаяся подпоследовательность из $\hat{u}^{\alpha_k}$ будет сходиться к одному из оптимальных управлений.

Замечание 2. Теорема 1 имеет место, если U содержит подмножество $\bar{U}$, допускающее новую метризацию $\rho_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, мажорантную по отношению к метрике C и такую, что $\bar{S}_C(\bar{u}) = \{\bar{u}\colon \rho(\bar{u}, O) \leqslant c\}$ (O — какой-либо фиксированный элемент в $\bar{U}$) компактно в U. В этом случае, полагая

$$\Omega[\bar{u}] = \rho_1^2(\bar{u}, O),$$

мы получим сходимость минимизирующей последовательности, если существует оптимальное управление $\bar{u}^{(0)} \in \bar{U}$ [3].

Обозначим $\overline{U}$ множество элементов $\bar{u} \in U$, для которых определено $\Omega[\bar{u}]$, и предположим, что $\overline{U}$ является выпуклым полным множеством в гильбертовой норме $(\Omega[\bar{u}])^{1/2}$.

Теорема 2. *Если $\overline{U}$ — множество элементов U, на которых определено $\Omega[u]$, выпукло и полно, то существует по крайней мере одна функция $u^\alpha(t) \in \overline{U}$, реализующая минимум функционала*

$$G^\alpha[\bar{u}] = F[x(\bar{u})] + \alpha\Omega[\bar{u}] \qquad (\bar{u} \in \overline{U}).$$

В самом деле, пусть последовательность минимизирующих функций u_n^α равномерно сходится к функции $\bar{\bar{u}}(t) \in U$. Покажем, что $\bar{\bar{u}} \in \overline{U}$ и что

$$\Omega[u_n^\alpha(t) - \bar{\bar{u}}(t)] \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Для этого достаточно доказать, что последовательность $u_n^\alpha(t)$ фундаментальна:

$$\Omega[u_n^\alpha - u_m^\alpha] \to 0 \qquad (n, m \to \infty).$$

Если это неверно, то существует такое ε_0, что для бесконечной последовательности номеров

$$\Omega[u_n^\alpha - u_{n+p_n}^\alpha] \geqslant \varepsilon_0.$$

Положим $\zeta_n = u_n^\alpha - u_{n+p_n}^\alpha$ и $\xi_n = \frac{1}{2}(u_n^\alpha + u_{n+p_n}^\alpha)$, так что $\xi_n = u_n^\alpha - \frac{1}{2}\zeta_n = u_{n+p_n}^\alpha + \frac{1}{2}\zeta_n$.

Далее, так как $u_n^\alpha \Rightarrow \bar{\bar{u}}$, то и $\xi_n \Rightarrow \bar{\bar{u}}$ и, в силу непрерывности функционала $F[x]$,

$$F[x(\xi_n)] - F[x(u_n^\alpha)] = \eta_n' \to 0; \quad F[x(\xi_n)] - F[x(u_{n+p_n}^\alpha)] = \eta_n'' \to 0.$$

Очевидно, что для функций ξ_n будем иметь

$$G^\alpha[\xi_n] \geqslant G_0^\alpha \geqslant G^\alpha[u_n^\alpha] - \varepsilon_1 \quad \text{для} \quad n \geqslant n(\varepsilon_1),$$

т. е. что

$$F[x(\xi_n)] + \alpha\{\Omega[u_n^\alpha] - \Omega[u_n^\alpha, \zeta_n] + \tfrac{1}{4}\Omega[\zeta_n]\} \geqslant$$
$$\geqslant F[x(u_n^\alpha)] + \alpha\Omega[u_n^\alpha] - \varepsilon_1$$

или

$$\alpha\{-\Omega[u_n^\alpha, \zeta_n] + \tfrac{1}{4}\Omega[\zeta_n]\} \geqslant F[x(u_n^\alpha)] - F[x(\xi_n)] - \varepsilon_1 \geqslant$$
$$\geqslant -\varepsilon_1 - |\eta_n'|.$$

Аналогично, используя представление $\xi_n = u^\alpha_{n+p_n} + \frac{1}{2}\zeta_n$, получим

$$\alpha\{\Omega[u_{n+p_n}^\alpha, \zeta_n] + \tfrac{1}{4}\Omega[\zeta_n]\} \geqslant -\varepsilon_1 - |\eta_n''|,$$

откуда

$$\alpha\{-\Omega[u_n^\alpha - u_{n+p_n}^\alpha, \zeta_n] + \tfrac{1}{2}\Omega[\zeta_n]\} \geqslant -2\varepsilon_1 - |\eta_n'| - |\eta_n''|$$

или

$$\Omega[\zeta_n] \leqslant \frac{2}{\alpha}[2\varepsilon_1 + |\eta_n'| + |\eta_n''|],$$

что при соответствующем выборе ε_1 противоречит предположению

$$\Omega[\zeta_n] \geqslant \varepsilon_0 \qquad (\varepsilon_1 < \tfrac{1}{2}\alpha\varepsilon_0)$$

для бесконечной последовательности номеров n.

Следуя основной идее доказательства теоремы 1, нетрудно убедиться, что функции $u^\alpha(t)$, реализующие минимум $G^\alpha[u]$, таковы, что $u^\alpha(t) \Rightarrow \bar{u}^{(0)}$, если $\bar{u}^{(0)}(t)$ — единственное оптимальное управление.

Аналогично исследуется вопрос об устойчивости задачи по отношению к малым возмущениям f и F.

Поступило
13 III 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961. [2] Р. Беллман, Динамическое программирование, М., 1960. [3] А. Н. Тихонов, ДАН, 151, № 3 (1963); 161, № 5 (1965).