С. А. Айсагалиев, Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений, *Дифференц. уравнения*, 1991, том 27, номер 9, 1475–1486

СЕНТЯБРЬ 1991 г., ТОМ 27, № 9

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938

С. А. АЙСАГАЛИЕВ

УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕКОТОРОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дана система

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u+f(x,u,t),\ t\in[t_0,t_1], \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы с кусочно-непрерывными элементами порядков $n\times n$, $n\times r$ соответственно, вектор-функция $f(x,u,t)$ непрерывна по совокупности переменных при всех $(x,u,t)\in E^n\times E^r\times[t_0,t_1]$ и удовлетворяет условиям

$$|f(x,u,t)-f(y,u,t)|\leqslant L(t)|x-y|,\ (x,u,t),\ (y,u,t)\in E^n\times E^r\times[t_0,t_1],$$

$$|f(x,u,t)|\leqslant c_0(|x|+|u|^2)+c_1(t),\ (x,u,t)\in E^n\times E^r\times[t_0,t_1],$$

функция $L(t)\geqslant 0$, $L(t)\in L_1[t_0,t_1]$, $c_1(t)\geqslant 0$, $c_1(t)\in L_1[t_0,t_1]$, $c_0=\mathrm{const}\geqslant 0$. При указанных предположениях система (1) при любом фиксированном $u(t)\in L_2[t_0,t_1]$ имеет единственное решение $x(t)=x(t;t_0,x_0,u)$, $t\in[t_0,t_1]$.

Ставится задача: найти управление $u(t)\in L_2[t_0,t_1]$, которое переводит траекторию системы (1) из любого начального состояния $x_0=x(t_0)\in E^n$ в любое конечное состояние $x_1=x(t_1)\in E^n$ за заданное время t_1-t_0.

Частные случаи управляемости системы вида (1) рассмотрены в [1, 2, с. 45; 3, 4].

1°. Пусть линейная нестационарная система

$$\dot{y}=A(t)y+B(t)v,\ y(t_0)=x_0,\ y(t_1)=x_1,\ t\in[t_0,t_1], \tag{2}$$

вполне управляема в момент времени t_0, т. е. $y(t_1)=y(t_1;t_0,x_0,v)=x_1$. Тогда, согласно результатам работы [5], матрица

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau)\,d\tau$$

положительно-определенная, где матрица $\Phi(t,\tau)=\theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\xi}=A(t)\xi$, $(*)$ — знак транспонирования.

Л е м м а 1. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно-определенная. Для того чтобы значение $y(t_1)=x_1$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$v(t)\in U=\{v(t)\in L_2[t_0,t_1]/v(t)=\nu(t)+\lambda_1(t)+N_1(t)z(t_1)\}\subset L_2[t_0,t_1], \tag{3}$$

где $\nu(t)\in L_2[t_0,t_1]$ — произвольная функция, функция $z(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, — решение дифференциального уравнения

$$\dot{z}(t)=A(t)z+B(t)\nu(t),\ z(t_0)=0,\ t\in[t_0,t_1], \tag{4}$$

вектор-функция $\lambda_1(t)=C(t)a$, матрица $N_1(t)=-C(t)\Phi(t_0,t_1)$, $C(t)=B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)$, $a=\Phi(t_0,t_1)x_1-x_0$.

Доказательство. Решение дифференциального уравнения (2) запишется так:

$$y(t)=\Phi(t, t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t, \tau)B(\tau)v(\tau)d\tau,\ t\in[t_0, t_1].$$

Отсюда следует, что искомое управление $v(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)v(t)dt=a. \tag{5}$$

Лемма утверждает, что управление $v(t)\in L_2[t_0, t_1]$ удовлетворяет условию (5) тогда и только тогда, когда оно принадлежит множеству U. Пусть $V\subset L_2[t_0, t_1]$ — множество управлений, каждый элемент которого удовлетворяет условию (5). Докажем, что $V=U$. Покажем, что $U\subset V$. В самом деле, если $v(t)\in U$, то, как следует из соотношений (3), (5),

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)v(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)[\nu(t)+\lambda_1(t)+N_1(t)z(t_1)]dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)\nu(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)C(t)dta-\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)\times$$

$$\times C(t)dt\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)\nu(t)dt=a.$$

Отсюда следует, что $v(t)\in V$. Следовательно, множество $U\subset V$.

Покажем, что $V\subset U$. Пусть $v_*(t)\in V$, т. е. для управления $v_*(t)$ выполнено равенство (5). Поскольку функция $\nu(t)\in L_2[t_0, t_1]$ произвольная, то, в частности, когда $\nu(t)=v_*(t)$, из выражения (3) следует, что

$$v(t)=v_*(t)+\lambda_1(t)+N_1(t)z(t_1)=v_*(t)+C(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)v_*(t)dt-$$

$$-C(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0, t)B(t)v_*(t)dt=v_*(t).$$

Следовательно, $v_*(t)=v(t)\in U$. Отсюда следует, что $V\subset U$. Итак, множество $V=U$. Лемма доказана.

Таким образом, построено множество всевозможных управлений в $L_2[t_0, t_1]$, переводящих траекторию системы (2) из любого начального состояния $x_0\in E^n$ в любое конечное состояние $x_1\in E^n$. Заметим, что решение системы (2), соответствующее управлению $v(t)\in U$, имеет вид

$$y(t)=z(t)+\lambda_2(t)+N_2(t)z(t_1),\ t\in[t_0, t_1], \tag{6}$$

где $\lambda_2(t)=\Phi(t, t_0)W(t, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)x_0+\Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)x_1$, $N_2(t)=-\Phi(t, t_0)W(t_0, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1)$.

В качестве приложения рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(v)=\int_{t_0}^{t_1}f_0(y(t), v(t), t)dt\to\inf \tag{7}$$

при условиях

$$\dot y=A(t)y+B(t)v,\ y(t_0)=x_0,\ y(t_1)=x_1,\ v(t)\in L_2[t_0, t_1], \tag{8}$$

где $f_0(y, v, t)$ — заданная функция в области $y\in E^n$, $v\in E^r$, $t\in[t_0, t_1]$, моменты времени t_0, t_1 фиксированы, x_0, $x_1\in E^n$ — заданные точки.

Подставляя значения фазового состояния системы $y(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, из соотношений (6) и значения управления $v(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, из формулы

(3) в правую часть функционала (7), получим

$$J(\nu)=\int_{t_0}^{t_1} F_0(z(t),\nu(t),z(t_1),t)\,dt\to\inf \tag{9}$$

при условиях

$$\dot z=A(t)z+B(t)\nu,\ z(t_0)=z_0,\ \nu(t)\in L_2[t_0,t_1], \tag{10}$$

где функция $F_0(z(t),\nu(t),z(t_1),t)=f_0(z(t)+\lambda_2(t)+N_2(t)z(t_1),\ \nu(t)+ +\lambda_1(t)+N_1(t)z(t_1),t)$. Заметим, что оптимизационная задача (7), (8) равносильна задаче (9), (10), коль множество $U=V$. Оптимизационная задача (9), (10) в отличие от исходной задачи (7), (8) является задачей оптимального управления со свободным правым концом, которая легко решается методом последовательных приближений.

Теорема 1. *Пусть функция $F_0(z,\nu,\bar z,t)$ определена при $z\in E^n$, $\nu\in E^r$, $\bar z\in E^n$, $t\in[t_0,t_1]$, непрерывна по совокупности своих аргументов $(z,\nu,\bar z,t)\in E^n\times E^r\times E^n\times[t_0,t_1]$ вместе с частными производными по переменным $(z,\nu,\bar z)\in E^n\times E^r\times E^n$ и функции $\partial F_0/\partial z$, $\partial F_0/\partial\nu$, $\partial F_0/\partial\bar z$ удовлетворяют условиям Липшица. Тогда функционал (9) при условиях (10) непрерывно дифференцируем в $L_2[t_0,t_1]$, и его градиент $J'(v)$ в точке $\nu=\nu(t)\in L_2[t_0,t_1]$ вычисляется по формуле*

$$J'(v)=\frac{\partial F_0(z(t),\nu(t),z(t_1),t)}{\partial\nu}-B^*(t)\psi(t)\in L_2[t_0,t_1], \tag{11}$$

где функция $z(t)=z(t;\nu)$ — решение системы (10) при $\nu=\nu(t)\in \in L_2[t_0,t_1]$, а функция $\psi(t)=\psi(t,\nu)$ — решение сопряженной системы

$$\dot\psi=\frac{\partial F_0(z(t),\nu(t),z(t_1),t)}{\partial z}-A^*(t)\psi(t),\ t\in[t_0,t_1], \tag{12}$$

$$\psi(t_1)=-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F_0(z(t),\nu(t),z(t_1),t)}{\partial z(t_1)}\,dt. \tag{13}$$

Кроме того, градиент $J'(\nu)\in L_2[t_0,t_1]$ удовлетворяет условию Липшица на $L_2[t_0,t_1]$, т. е. $\|J'(\nu_1)-J'(\nu_2)\|\leqslant L_1\|\nu_1-\nu_2\|$ $\forall\nu_1,\nu_2\in L_2[t_0,t_1]$, $L_1=\mathrm{const}>0$.

Теорема может быть доказана по известной схеме вычисления производной Фреше функционала. Заметим, что выражения (11)—(13) могут быть использованы для построения минимизирующих последовательностей $\{\nu_k(t)\}$, $\{z_k(t)\}$. Для случая, когда $f_0(y,v,t)=y^*Q(t)y+ +v^*R(t)v$, $Q(t)=Q^*(t)\geqslant 0$, $R(t)=R^*(t)>0$, $t\in[t_0,t_1]$, доказательство теоремы 1 и пакеты прикладных программ для решения оптимизационной задачи (7), (8) можно найти в [6].

Следует отметить, что построение конструктивных методов решения задачи оптимального управления с закрепленными концами траектории является одной из актуальных задач математической теории управления. Поэтому полученные выше результаты представляют интерес как для теории управления, так и для ее приложения.

2°. Выше рассмотрен случай, когда $f(x,u,t)\equiv 0$. Рассмотрим решение исходной задачи. Введем следующие обозначения:

$$S_1(t)=-C(t)\theta(t_0),\ S_2(t)=-\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\theta(t_0).$$

Теорема 2. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно-определенная и пусть функции $v(t)$, $y(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, определяются выражениями (3), (6). Тогда управление $u(t)\in L_2[t_0,t_1]$, являющееся решением* *интегральных уравнений*

$$u(t)=v(t)+S_1(t)\int_{t_0}^{t_1}\theta^{-1}(t)f(x(t),u(t),t)\,dt, \tag{14}$$

$$x(t)=y(t)+S_2(t)\int_{t_0}^{t_1}\theta^{-1}(t)f(x(t),u(t),t)\,dt+$$
$$+\theta(t)\int_{t_0}^{t}\theta^{-1}(\tau)f(x(\tau),u(\tau),\tau)\,d\tau,\quad t\in[t_0,t_1], \tag{15}$$

переводит траекторию системы (1) из начального состояния $x_0=x(t_0)$ *в состояние* $x_1=x(t_1)$, *где* $x_0, x_1\in E^n$ *— любые заданные векторы.*

Доказательство. Легко проверить, что решение системы (1) при управлении $u(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, определяемое по формуле (14), запишется в виде (15). Из выражения (15) следует, что значение $x(t_0)=y(t_0)=x_0$, так как $S_2(t_0)=0$. Далее, для момента времени $t=t_1$ имеем $x(t_1)=y(t_1)=x_1$, поскольку $S_2(t_1)=-\theta(t_1)$. Теорема доказана.

Ниже рассмотрены методы решения интегральных уравнений (14), (15). Наиболее простым является случай, когда вектор-функция $f(x,u,t)$ не зависит от переменной x, т. е. $f(x,u,t)=f(u,t)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть* $f(x,u,t)=f(u,t)$ *и* n-*вектор* q_* *является решением системы нелинейных алгебраических уравнений*

$$q=\int_{t_0}^{t_1}\theta^{-1}(\tau)f(v(\tau)+S_1(\tau)q,\tau)\,d\tau. \tag{16}$$

Тогда управление

$$u(t)=v(t)+S_1(t)q_*,\quad t\in[t_0,t_1], \tag{17}$$

переводит траекторию системы (1) из начального состояния $x_0=x(t_0)$ *в состояние* $x_1=x(t_1)$, *где* $x_0, x_1\in E^n$ *— любые заданные векторы.*

Доказательство. В случае, когда функция $f(x,u,t)=f(u,t)$, интегральное уравнение (14) решается независимо от интегрального уравнения (15). Если ввести вектор $q=\int_{t_0}^{t_1}\theta^{-1}(\tau)f(u(\tau),\tau)\,d\tau$, то интегральное уравнение (14) запишется в виде $u(t)=v(t)+S_1(t)q$, $t\in[t_0,t_1]$. Подставляя значение $u(t)$ в правую часть выражения для q, получим систему нелинейных алгебраических уравнений (16). Если вектор q_* — решение системы (16), то искомое управление $u(t)\in L_2[t_0,t_1]$ определяется по формуле (17). Решение системы (1) определяется выражением

$$x(t)=y(t)+S_2(t)q_*+\theta(t)\int_{t_0}^{t}\theta^{-1}(\tau)f(v(\tau)+S_1(\tau)q_*,\tau)\,d\tau.$$

Теорема доказана.

Естественно, возникает вопрос, когда интегральные уравнения (14), (15) имеют решения. Пусть вектор-функция $\mu(t)=(u(t),x(t))$, $g(t)=(g^1(t),g^2(t))$, $t\in[t_0,t_1]$, где

$$g^1(t)=v(t)+S_1(t)\int_{t_0}^{t_1}\theta^{-1}(\tau)f(\mu(\tau),\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

$$g^2(t)=y(t)+S_2(t)\int_{t_0}^{t_1}\theta^{-1}(\tau)f(\mu(\tau),\tau)\,d\tau+\theta(t)\int_{t_0}^{t}\theta^{-1}(\tau)f(\mu(\tau),\tau)\,d\tau. \tag{19}$$

Так как управление $u(t)\in L_2[t_0,t_1]$ и соответствующее решение дифференциального уравнения (1) — функция $x(t)\in C[t_0,t_1]$, то вектор-функция $\mu(t)\in L_2[t_0,t_1]\dot{+}C[t_0,t_1]$, где $\dot{+}$ означает прямую сумму банаховых пространств. Поскольку функции $v(t)\in L_2[t_0,t_1]$, $y(t)\in C[t_0,t_1]$, матрицы $S_1(t)$, $S_2(t)$, $\theta(t)$, $\theta^{-1}(t)$ имеют непрерывные элементы, то функция $g(t)\in L_2[t_0,t_1]\dot{+}C[t_0,t_1]$. Уравнения (18), (19) в операторной форме можно записать так:

$$g=A\mu, \tag{20}$$

где нелинейный оператор A отображает пространство $L_2[t_0,t_1]\dot{+}C[t_0,t_1]$ в себя. Тогда решение интегральных уравнений (14), (15) сводится к определению неподвижной точки оператора A.

Теорема 4. *Пусть матрица $W(t_0,t_1)$ положительно-определенная и пусть функция $f_1(\mu,t)=\theta^{-1}(t)f(\mu,t)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной* μ, т. е.

$$|f_1(\mu^1,t)-f_1(\mu^2,t)|\leqslant\varphi(t)|\mu^1-\mu^2|, \tag{21}$$

при всех μ^1, $\mu^2\in E^{n+r}$, $\varphi(t)\geqslant 0$, $\varphi(t)\in L_1[t_0,t_1]$. Тогда оператор A является сжимающим, если $\rho<1$, где $\rho=\max(\rho_1,\rho_2)$,

$$\rho_1=[\sqrt{2}\,(t_1-t_0)\|S_1(t)\|_c+\|S_2(t)\|_c+\|\theta(t)\|_c]\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t)dt,$$

$$\rho_2=[\sqrt{2}(\int_{t_0}^{t_1}\|S_1(t)\|^2dt)^{1/2}+\|S_2(t)\|_c+\|\theta(t)\|_c](\int_{t_0}^{t_1}\varphi^2(t)dt)^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть $v(t)\in U$ — фиксированное управление, а функция $y(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, — соответствующее решение системы (2), определяемое по формуле (6). Покажем, что при выполнении условий (21), $\rho<1$, существует единственная точка $\mu_*\in X$, $X=L_2[t_0,t_1]\dot{+}C[t_0,t_1]$, такая, что $\mu_*=A\mu_*$. Пусть $\mu^1(t)$, $\mu^2(t)\in X$ и $\bar{g}=A\mu^1$, $\bar{\bar{g}}=A\mu^2$, где $\bar{g}=(\bar{g}^1(t),\bar{g}^2(t))$, $\bar{\bar{g}}=(\bar{\bar{g}}^1(t),\bar{\bar{g}}^2(t))$ определяются формулами (18), (19). Отсюда, используя неравенство (21) и учитывая, что $|\mu^1-\mu^2|\leqslant|u^1-u^2|+|x^1-x^2|$, $\mu^1=(u^1,x^1)$, $\mu^2=(u^2,x^2)$, получим следующие оценки:

$$|\bar{g}^1(t)-\bar{\bar{g}}^1(t)|\leqslant\|S_1(t)\|(\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t)|u^1(t)-u^2(t)|dt+\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t)|x^1(t)-$$

$$-x^2(t)|dt)\leqslant\|S_1(t)\|_C\max_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}|x^1(t)-x^2(t)|\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t)dt+$$

$$+\|S_1(t)\|\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t)|u^1(t)-u^2(t)|dt,$$

$$|\bar{g}^2(t)-\bar{\bar{g}}^2(t)|\leqslant(\|S_2(t)\|_c+\|\theta(t)\|_c)\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t)dt\|x^1-x^2\|_c+$$

$$+(\|S_2(t)\|+\|\theta(t)\|)\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t)|u^1(t)-u^2(t)|dt,$$

где $\|S_2(t)\|_c=\max\|S_2(t)\|$, $\|S_1(t)\|_c=\max\|S_1(t)\|$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$; $\|\theta(t)\|_c=\max\|\theta(t)\|$, $\|x^1-x^2\|_c=\max|x^1(t)-x^2(t)|$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$.

Далее, применяя неравенства $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$, $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a+b$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ и

$$\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t)|u^1(t)-u^2(t)|dt\leqslant(\int_{t_0}^{t_1}\varphi^2(t)dt)^{1/2}(\int_{t_0}^{t_1}|u^1(t)-u^2(t)|^2dt)^{1/2},$$

получим

$$\|\bar{g}-\bar{\bar{g}}\|_X=\|\bar{g}^1-\bar{\bar{g}}^1\|_{L_2}+\|\bar{g}^2-\bar{\bar{g}}^2\|_c\leqslant\rho_1\|x^1-x^2\|_c+$$
$$+\rho_2\|u^1-u^2\|_{L_2}\leqslant\rho\|\mu^1-\mu^2\|_X,$$

где $\rho=\max(\rho_1, \rho_2)$. Отсюда следует, что при $\rho<1$ оператор A сжимающий. Теорема доказана.

Заметим, что: а) как следует из выражения для определения величин ρ_1, ρ_2, путем выбора моментов времени t_0, t_1 можно обеспечить выполнение условия $\rho<1$; б) решение интегральных уравнений (16), (17) — функция $\mu_*(t)=(u_*(t), x_*(t))$, $t\in[t_0, t_1]$, определяется как предел последовательностей $u_*(t)=\lim\limits_{n\to\infty} u^{(n)}(t)$, $x_*(t)=\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, где

$$u^{(n+1)}(t)=v(t)+S_1(t)\int_{t_0}^{t_1} f_1(x^{(n)}(t), u^{(n)}(t), t)dt, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

$$x^{(n+1)}(t)=y(t)+S_2(t)\int_{t_0}^{t_1} f_1(x^{(n)}(t), u^{(n)}(t), t)dt+$$

$$+\theta(t)\int_{t_0}^{t} f_1(x^{(n)}(\tau), u^{(n)}(\tau), \tau)d\tau, \quad n=0, 1, 2, \ldots;$$

в) выбирая различные $v(t)\in U$, можно построить множество управлений $\{u(t)\}\subset L_2[t_0, t_1]$, которые переводят траекторию системы (1) из начального состояния $x_0\in E^n$ в состояние $x_1\in E^n$.

3°. Рассмотрим другие методы решения интегральных уравнений (14), (15) на основе выбора функции $v(t)\in U$. Поскольку функция $v(t)=\nu(t)+\lambda_1(t)+N_1(t)z(t_1)$, $t\in[t_0, t_1]$, где $\nu(t)\in L_2[t_0, t_1]$ — произвольная функция, то целесообразно выбрать $\nu(t)$ так, чтобы итерационный процесс сходился к решению интегральных уравнений (14), (15). Предлагаются два метода решения интегральных уравнений.

Построим последовательности $\{u^{(n)}(t)\}$, $\{\nu^{(n)}(t)\}$ по следующему правилу:

а) выберем начальную точку $u^{(0)}(t)\in L_2[t_0, t_1]$ и определим решение дифференциального уравнения (1), функция $x^{(0)}(t)=x^{(0)}(t, u^{(0)})$, $t\in [t_0, t_1]$;

б) выберем функцию $\nu^{(0)}(t)=u^{(0)}(t)-C(t)a+C(t)q^{(0)}(t_1)$, где

$$q^{(0)}(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)f(x^{(0)}(t), u^{(0)}(t), t)dt;$$

в) определим

$$u^{(1)}(t)=\nu^{(1)}(t)+C(t)a+N_1(t)z^{(0)}(t_1)-C(t)q^{(0)}(t_1)=$$

$$=u^{(0)}(t)+C(t)a-C(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)u^{(0)}(t)dt-C(t)q^{(0)}(t_1);$$

г) в общем случае

$$u^{(n+1)}(t)=u^{(n)}(t)+C(t)a-C(t)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)B(t)u^{(n)}(t)dt-$$

$$-C(t)q^{(n)}(t_1), \quad n=0, 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

$$q^{(n)}(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)f(x^{(n)}(t), u^{(n)}(t), t)dt, \tag{23}$$

$$\nu^{(n)}(t)=u^{(n)}(t)-C(t)a+C(t)q^{(n)}(t_1), \quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

Теорема 5. *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно-определенная и пусть последовательности $\{u^{(n)}(t)\}$, $\{q^{(n)}(t_1)\}$, $\{\nu^{(n)}(t)\}$ определяются формулами (22)—(24). Если последовательность n-векторов $\{q^{(n)}(t_1)\}$ сходится, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} q^{(n)}(t_1)=q_*$, то пределы $\lim x^{(n)}(t_1)=x_1$, $\lim\|u_n-u_{n+1}\|=0$, $n\to\infty$.*

Доказательство. Пусть $u^{(0)}(t) \in L_2[t_0, t_1]$ — начальная точка и $x^{(0)}(t) = x^{(0)}(t, u^{(0)})$, $t \in [t_0, t_1]$, — решение уравнения (1). Определим функцию $\nu^{(0)}(t) \in L_2[t_0, t_1]$ из условия

$$\|u^{(0)}(t) - \nu(t) - C(t)a - N_1(t)z(t_1) + C(t)q^{(0)}(t_1)\| \to \inf.$$

Из решения данной оптимизационной задачи следует, что $\nu^{(0)}(t) = u^{(0)}(t) - C(t)a + C(t)q^{(0)}(t_1)$, $t \in [t_0, t_1]$. Если $u^{(0)}(t)$ — искомое управление, то значение функционала при $\nu(t) = \nu^{(0)}(t)$ равно нулю и $u^1(t) = u^{(0)}(t)$, в противном случае процесс построения последовательностей продолжается. Таким образом, последовательности (22)—(24) построены так, чтобы на каждой итерации норма разностей левой и правой частей интегрального уравнения (14) была минимальна.

Решение дифференциального уравнения (1), соответствующее управлению $u^{(n+1)}(t)$, определяемое по формуле (22), равно

$$x^{(n+1)}(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u^{(n+1)}(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)f(x^{(n+1)}(\tau), u^{(n+1)}(\tau), \tau)d\tau.$$

Отсюда для момента времени $t = t_1$ имеем

$$x^{(n+1)}(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \Phi(t_1, t_0)\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)u^{(n+1)}(t)dt +$$

$$+ \Phi(t_1, t_0)q^{(n+1)}(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \Phi(t_1, t_0)a + \Phi(t_1, t_0) \times$$

$$\times [q^{(n+1)}(t_1) - q^{(n)}(t_1)] = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \Phi(t_1, t_0)\,[\Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0] +$$

$$+ \Phi(t_1, t_0)\,[q^{(n+1)}(t_1) - q^{(n)}(t_1)] = x_1 + \Phi(t_1, t_0)\,[q^{(n+1)}(t_1) - q^{(n)}(t_1)].$$

Отсюда с учетом того, что последовательность $\{q^{(n)}(t_1)\}$ сходится, т. е. $\lim_{n\to\infty} |q^{(n+1)}(t_1) - q^{(n)}(t_1)| = 0$, имеем $\lim_{n\to\infty} x^{(n+1)}(t_1) = x_1$. Можно показать, что разность $u^{(n+1)}(t) - u^{(n)}(t) = C(t)\,[q^{(n-1)}(t_1) - q^{(n)}(t_1)]$. Следовательно, норма $\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 4 последовательность $\{q^{(n)}(t_1)\}$ сходится.

Другой метод решения интегральных уравнений (14), (15) можно получить путем сведения их к дифференциальному уравнению специального вида. Вводя обозначения

$$\eta(t) = \int_{t_0}^{t} \theta^{-1}(\tau)f(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau, \tag{25}$$

интегральные уравнения (14), (15) запишем в виде

$$u(t) = v(t) + S_1(t)\eta(t_1), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{26}$$

$$x(t) = y(t) + S_2(t)\eta(t_1) + \theta(t)\eta(t), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{27}$$

где функции $v(t)$, $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, определяются формулами (3), (6) соответственно.

Дифференцируя по t левую и правую части (25), с учетом выражений (26), (27), (3), (6) имеем

$$\dot\eta(t) = Q(\eta(t), \eta(t_1), z(t), z(t_1), \nu(t), t), \tag{28}$$

$$\eta(t_0) = 0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

где функция $Q = \theta^{-1}(t)f(z(t) + \lambda_2(t) + \theta(t)\eta(t) + S_2(t)\eta(t_1) + N_2(t)z(t_1),$ $\nu(t) + \lambda_1(t) + N_1(t)z(t_1) + S_1(t)\eta(t_1), t)$.

Теперь решение исходной задачи сводится к решению следующей оптимизационной задачи: минимизировать функционал

$$J_1(\nu, b) = |\eta(t_1; b, \nu) - b|^2 \to \inf \tag{29}$$

при условиях

$$\dot{\eta}(t) = Q(\eta(t), b, z(t), z(t_1), \nu(t), t), \ \eta(t_0) = 0, \tag{30}$$

$$\dot{z}(t) = A(t)z + B(t)\nu(t), \ z(t_0) = 0, \ t \in [t_0, t_1], \tag{31}$$

$$\nu(t) \in L_2[t_0, t_1], \ b \in E^n, \tag{32}$$

где $\eta(t; b, \nu)$, $t \in [t_0, t_1]$, — решение системы (30) при выбранном управлении $\nu(t) \in L_2[t_0, t_1]$, $b \in E^n$. Заметим, что уравнение (30) получено из (28) путем замены $\eta(t_1)$ на вектор $b \in E^n$.

Теорема 6. *Пусть функция $Q(\eta, b, z, \bar{z}, \nu, t)$ непрерывна по совокупности своих аргументов вместе со своими частными производными по переменным $(\eta, b, z, \bar{z}, \nu)$ в области $\eta \in E^n$, $b \in E^n$, $z \in E^n$, $\bar{z} \in E^n$, $\nu \in E^r$, и пусть функции Q, $\partial Q/\partial \eta$, $\partial Q/\partial b$, $\partial Q/\partial z$, $\partial Q/\partial \bar{z}$, $\partial Q/\partial \nu$ удовлетворяют условиям Липшица по переменным $(\eta, b, z, \bar{z}, \nu) \in E^n \times E^n \times E^n \times E^n \times E^r$ с постоянной Липшица $L = \mathrm{const} > 0$. Тогда функционал (29) при условиях (30)—(32) непрерывен и дифференцируем по (b, ν) в норме $E^n \dotplus L_2[t_0, t_1]$, причем его градиент в точке $(b, \nu(t)) \in E^n \dotplus L_2[t_0, t_1]$ представим в виде*

$$J_1'(b, \nu) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2[b - \eta(t_1; b, \nu)] - \int_{t_0}^{t_1} \left(\dfrac{\partial Q(\eta(t), b, z(t), z(t_1), \nu(t), t)}{\partial b}\right)^* \psi_1(t)\,dt \\ B^*(t)\psi_2(t) - \left(\dfrac{\partial Q(\eta(t), b, z(t), z(t_1), \nu(t), t)}{\partial \nu}\right)^* \psi_1(t) \end{pmatrix} \in$$

$$\in E^n \dotplus L_2[t_0, t_1], \tag{33}$$

где функции $z(t)$, $\eta(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, — решения уравнений (31), (30) соответственно, а вектор-функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, — решения следующих сопряженных систем:

$$\begin{gathered} \dot{\psi}_1(t) = -\left(\frac{\partial Q(\eta(t), b, z(t), z(t_1), \nu(t), t)}{\partial \eta}\right)^* \psi_1(t), \\ \psi_1(t_1) = -2[\eta(t_1; b, \nu) - b]; \end{gathered} \tag{34}$$

$$\begin{gathered} \dot{\psi}_2(t) = \left(\frac{\partial Q(\eta(t), b, z(t), z(t_1), \nu, t)}{\partial z}\right)^* \psi_1(t) - A^*(t)\psi_2(t), \\ \psi_2(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial Q(\eta(t), b, z(t), z(t_1), \nu(t), t)}{\partial z(t_1)}\right)^* \psi_1(t)\,dt. \end{gathered} \tag{35}$$

Доказательство. Пусть $Y = E^n \dotplus L_2[t_0, t_1]$ — прямая сумма банаховых пространств E^n, $L_2[t_0, t_1]$ со скалярным произведением $\langle (b, \nu), (c, w) \rangle = \langle b, c \rangle_{E^n} + \langle \nu, w \rangle_{L_2}$ $\forall (b, \nu)$, $(c, w) \in Y$ и нормой $\|(b, \nu)\| = |b|_{E^n} + \|\nu\|_{L_2}$. Пространство Y гильбертово. Пусть (b, ν), $(b + \Delta b, \nu(t) + h(t)) \in Y$ и функции $z(t; \nu + h) = z(t, \nu) + \Delta z(t)$, $\eta(t; b + \Delta b, \nu + h) = \eta(t; b, \nu) + \Delta\eta(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, — соответствующие решения уравнений (31), (30). Поскольку функция Q удовлетворяет условию Липшица, то верны оценки

$$|\Delta z(t)| \leqslant c_1 \sqrt{t_1-t_0}\,(|\Delta b| + \|h\|),\ t\in[t_0,t_1], \tag{36}$$

$$|\Delta\eta(t)| \leqslant c_2(|\Delta b| + \|h\|),\ t\in[t_0,t_1], \tag{37}$$

где $c_1=\sup\|\Phi(t,\tau)B(\tau)\|$, $t_0\leqslant t$, $\tau\leqslant t_1$, $c_2=[2Lc_1(t_1-t_0)^{3/2}+L_1]\,e^{L(t_1-t_0)}$, $L_1=\max(L(t_1-t_0),\ L\sqrt{t_1-t_0})$. Поскольку функции $\partial Q/\partial\eta$, $\partial Q/\partial b$, $\partial Q/\partial z$, $\partial Q/\partial\bar z$ удовлетворяют условиям Липшица с общей постоянной Липшица $L>0$ и сопряженные системы определяются формулами (34), (35), то приращение функционала равно

$$\Delta J_1(b,\nu)=J_1(b+\Delta b,\nu+h)-J_1(b,\nu)=\Delta b^*[2(b-\eta(t_1;b,\nu))]-$$

$$-\Delta b^*\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial Q(\eta(t),b,z(t),z(t_1),\nu,t)}{\partial b}\right)^*\psi_1(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\psi_1^*(t)\,\frac{\partial Q(\eta(t),b,z(t),z(t_1),\nu,t)}{\partial\nu}h(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}\psi_2^*(t)B(t)h(t)dt+R, \tag{38}$$

где $R=\sum_{i=1}^{6}R_i$. Используя оценки (36), (37), получим

$$|R|\leqslant c_4(|\Delta b|+\|h\|)^2, \tag{39}$$

где $c_4=c_3+2L\|\psi_1\|_c[(2\bar c_1+c_2)^2(t_1-t_0)+k(t_1-t_0)]$, $k>\max(1,\ 1/\sqrt{t_1-t_0},\ 1/(t_1-t_0))$, $\bar c_1=c_1\sqrt{t_1-t_0}$, $\|\psi_1\|_c=\sup|\psi_1(t)|$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, $c_3=1+c_2^2+2c_2$. Из формулы (38) и оценки (39) следует, что градиент функционала $J_1'(b,\nu)$ определяется выражением (33). Теорема доказана.

Заметим, что если $\eta(t_1;b,\nu)=b$, то функция $\psi_1(t)\equiv 0$, $t\in[t_0,t_1]$ (см. (34)), следовательно, функция $\psi_2(t)\equiv 0$, $t\in[t_0,t_1]$ (см. (35)). Тогда, как следует из выражения (33), градиент $J'(b,\nu)\equiv 0$, $t\in[t_0,t_1]$.

Далее, по известному градиенту функционала (33) и сопряженных систем (34), (35) могут быть построены минимизирующие последовательности $\{b^{(k)}\}$, $\{\nu^{(k)}(t)\}$. Пусть $\lim_{k\to\infty} b^{(k)}=b^*$, $\nu^{(k)}(t)\xrightarrow{\text{сл}}\nu_*(t)$ при $k\to\infty$ и $\eta(t_1;b^*,\nu_*)=b^*$. Тогда искомое управление $u_*(t)=v_*(t)+S_1(t)b^*$, $t\in[t_0,t_1]$.

4°. В качестве приложения наметим пути решения следующей оптимизационной задачи: минимизировать функционал

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_1}f_0(x(t),u(t),t)dt\to\inf \tag{40}$$

при условиях

$$\dot x=A(t)x+B(t)u+f(x,u,t),\ x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1, \tag{41}$$

$$u(t)\in L_2[t_0,t_1]. \tag{42}$$

Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда, подставляя значения функций $x(t)$, $u(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ из соотношений (14), (15), приходим к следующей оптимизационной задаче:

$$J(\nu)=\int_{t_0}^{t_1}F_0(\eta(t),\eta(t_1),z(t),z(t_1),\nu(t),t)dt\to\inf \tag{43}$$

при условиях

$$\dot\eta=Q(\eta(t),\eta(t_1),z(t),z(t_1),\nu(t),t),\ \eta(t_0)=0, \tag{44}$$

$$\dot z=A(t)z+b(t)\nu,\ z(t_0)=0,\ \nu(t)\in L_2[t_0,t_1], \tag{45}$$

где $F_0=f_0(z(t)+\lambda_2(t)+\theta(t)\eta(t)+S_2(t)\eta(t_1)+N_2(t)z(t_1),\ v(t)+$

$+S_1(t)\eta(t_1)+\lambda_1(t)+N_1(t)z(t_1), t)$. В общем случае оптимизационные задачи (40)—(42) и (43)—(45) не являются равносильными. Рассмотрим вспомогательную задачу: минимизировать функционал (43) при условиях

$$\dot{\eta}=Q(\eta(t), b, z(t), z(t_1), v(t), t), \ \eta(t_0)=0, \ t\in[t_0, t_1], \tag{46}$$

$$\dot{z}(t)=A(t)z+B(t)v(t), \ z(t_0)=0, \ t\in[t_0, t_1], \tag{47}$$

$$v(t)\in L_2[t_0, t_1], \ b\in E^n. \tag{48}$$

Предположим, что для системы (41), (42) решена задача управляемости, т. е. найдена пара $(b^*, v_*(t))\in Y$, следовательно, $\eta(t_1; b^*, v_*)=b^*$. Вычислим градиент функционала (43) при условиях (46)—(48) в точке $(b^*, v_*)\in Y$.

Теорема 7. *Пусть выполнены все условия теоремы 6 и пусть, кроме того, функция F_0 непрерывна по совокупности своих аргументов $(\eta, \bar{\eta}, z, \bar{z}, v, t)\in E^n\times E^n\times E^n\times E^n\times E^r\times[t_0, t_1]$ вместе со своими частными производными по переменным $(\eta, \bar{\eta}, z, \bar{z}, v)$ и функции $\partial F_0/\partial z$, $\partial F_0/\partial \bar{z}$, $\partial F_0/\partial\eta$, $\partial F_0/\partial\bar{\eta}$, $\partial F_0/\partial v$ удовлетворяют условиям Липшица по переменным $(\eta, \bar{\eta}, z, \bar{z}, v)$ в области $E^n\times E^n\times E^n\times E^n\times E^r$ с общей постоянной Липшица $L=\mathrm{const}>0$. Тогда функционал (43) при условиях (46)—(48) непрерывен и дифференцируем по $(b, v)\in Y$, причем его градиент в точке $(b^*, v_*)\in Y$ равен*

$$J'(b^*, v_*)=\begin{pmatrix} -\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\dfrac{\partial Q(*)}{\partial b}\right)^*\psi_1(t)\,dt \\ \dfrac{\partial F_0(**)}{\partial v}-B^*(t)\psi_2(t)-\left(\dfrac{\partial Q(*)}{\partial v}\right)\psi_1(t)\end{pmatrix}\in Y, \tag{49}$$

где $(*)=(\eta(t; b^*, v_*), \ b^*, z(t, v_*), \ z(t_1, v_*), \ v_*, t)$, $(**)=(\eta(t; b^*, v_*), \eta(t_1; b^*, v_*), z(t, v_*), z(t_1, v_*), v_*, t)$, *функции* $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, — *решения следующих сопряженных систем:*

$$\dot{\psi}_1(t)=\frac{\partial F_0(**)}{\partial\eta}-\left(\frac{\partial Q(*)}{\partial\eta}\right)^*\psi_1(t), \ \psi_1(t_1)=-\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F_0(**)}{\partial\eta(t_1)}\right)^*dt, \tag{50}$$

$$\dot{\psi}_2(t)=-A^*(t)\psi_2(t)+\left(\frac{\partial F_0(**)}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial Q(*)}{\partial z}\right)^*\psi_1(t),$$

$$\psi_2(t_1)=-\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F_0(**)}{\partial z(t_1)}\right)dt+\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial Q(*)}{\partial z(t_1)}\right)^*\psi_1(t)\,dt. \tag{51}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 6. Введем обозначения:

$$J_1'(b^*, v_*)=-\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial Q(*)}{\partial b}\right)^*\psi_1(t)\,dt,$$

$$J_2'(b^*, v_*)=\frac{\partial F_0(**)}{\partial v}-B^*(t)\psi_2(t)-\left(\frac{\partial Q(*)}{\partial v}\right)^*\psi_1(t).$$

Тогда градиент функционала $J'(b^*, v_*)=(J_1'(t), J_2'(t))\in Y$. Определим пару $(b^{(1)}, v^{(1)}(t))\in Y$ по формуле

$$b^{(1)}=b^*-A_0J_1'(t), \ v^{(1)}(t)=v_*(t)-B_0J_2'(t), \tag{52}$$

где $A_0=\mathrm{diag}(\alpha_0^{(1)}, \dots, \alpha_0^{(n)})>0$, $B_0=\mathrm{diag}(\beta_0^{(1)}, \dots, \beta_0^{(r)})>0$.

Лемма 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 7 и пусть, кроме того, градиент $J'(b, v)\in Y$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\|J'(b^1, v^1)-J'(b^2, v^2)\|\leqslant l(|b^1-b^2|+\|v^1-v^2\|) \tag{53}$$

при всех $b^1, b^2 \in E^n$, v^1, $v^2 \in L_2[t_0, t_1]$, $l=\mathrm{const}>0$. *Пусть матрицы* $I_n - lA_0 > 0$, $I_r - lB_0 > 0$. *Тогда* $J(b^{(1)}, v^{(1)}) < J(b^*, v_*)$, *где пара* $(b^{(1)}, v^{(1)}(t)) \in Y$ *определяется формулой (52),* I_n, I_r — *единичные матрицы порядков* $n \times n$, $r \times r$.

Доказательство. Поскольку функционал $J(b, v)$ непрерывно дифференцируем в Y и градиент функционала $J'(b, v)$ удовлетворяет условию (53), то, в частности, для пар (b^*, v_*), $(b^{(1)}, v^{(1)})$ справедливо неравенство

$$J(b^*, v_*) - J(b^{(1)}, v^{(1)}) \geqslant \langle J'(b^*, v_*),\ (b^* - b^{(1)}, v_* - v^{(1)}) \rangle_Y -$$
$$- \frac{l}{2} (|b^* - b^{(1)}| + \|v_* - v^{(1)}\|)^2.$$

Отсюда с учетом неравенства $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ и (52) получим

$$J(b^*, v_*) - J(b^{(1)}, v^{(1)}) \geqslant [J_1']^*(A_0 - lA_0^2)J_1' + \int_{t_0}^{t_1} [J_2'(t)]^*(B_0 - lB_0^2)J_2'(t)\,dt.$$

Так как матрицы $I_n - lA_0 > 0$, $A_0 > 0$, $B_0 > 0$, $I_r - lB_0 > 0$ и $J'(b^*, v_*) \not\equiv 0$, то $J(b^*, v_*) - J(b^{(1)}, v^{(1)}) > 0$. Лемма доказана.

Вводя диагональные матрицы $N_0 = \mathrm{diag}(J_1'^{(1)}, \dots, J_1'^{(n)})$, $M_0(t) = \mathrm{diag}(J_2'^{(1)}(t), \dots, J_2'^{(r)}(t))$ и векторы $\alpha_0 = (\alpha_0^{(1)}, \dots, \alpha_0^{(n)})$, $\beta_0 = (\beta_0^{(1)}, \dots, \beta_0^{(r)})$, соотношение (52) запишем в виде

$$b^{(1)} = b^* - N_0\alpha_0,\ v^{(1)}(t) = v_*(t) - M_0(t)\beta_0,\ t \in [t_0, t_1]. \tag{54}$$

Теперь условия $A_0 > 0$, $I_n - lA_0 > 0$, $B_0 > 0$, $I_r - lB_0 > 0$ относительно векторов $\alpha_0 \in E^n$, $\beta_0 \in E^r$ запишутся в виде

$$0 < \alpha_0^{(i)} < l^{-1},\ 0 < \beta_0^{(j)} < l^{-1},\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, r}. \tag{55}$$

Определим пару $(b^{(1)}, v^{(1)}(t)) \in Y$ как решение оптимизационной задачи: минимизировать функционал

$$J_1(b^{(1)}, v^{(1)}) = |\eta(t_1; b^{(1)}, v^{(1)}) - b^{(1)}| \to \inf \tag{56}$$

при условиях

$$\dot\eta = Q(\eta(t; b^{(1)}, v^{(1)}), b^{(1)}, z(t, v^{(1)}), z(t_1, v^{(1)}), v^{(1)}, t),\ \eta(t_0) = 0,\ t \in [t_0, t_1], \tag{57}$$

$$\dot z(t) = A(t)z + B(t)v^{(1)}(t),\ z(t_0) = 0,\ t \in [t_0, t_1], \tag{58}$$

$$v^{(1)}(t) = v_* - B_0J_2'(t),\ b^{(1)} = b^* - A_0J_1'. \tag{59}$$

Легко убедиться в том, что оптимизационная задача (56)—(59) равносильна следующей задаче: минимизировать функционал

$$J_1(\alpha_0, \beta_0) = |\Delta\eta(t_1) + N_0\alpha_0| \to \inf \tag{60}$$

при условиях

$$\Delta\dot\eta(t) = Q_1(\Delta\eta(t), \alpha_0, \Delta z(t), \Delta z(t_1), \beta_0, t),\ \Delta\eta(t_0) = 0, \tag{61}$$

$$\Delta\dot z(t) = A(t)\Delta z(t) - B(t)M_0(t)\beta_0,\ \Delta z(t_0) = 0,\ t \in [t_0, t_1], \tag{62}$$

$$\varepsilon \leqslant \alpha_0^{(i)} \leqslant l^{-1} - \varepsilon,\ \varepsilon \leqslant \beta_0^{(j)} \leqslant l^{-1} - \varepsilon,\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, r}, \tag{63}$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, функция $Q_1 = Q(\eta(t, b^*, v_*) + \Delta\eta(t), b^* - N_0\alpha_0, z(t, v_*) + \Delta z(t), z(t_1, v_*) + \Delta z(t_1), v_*(t) - M_0(t)\beta_0, t) - Q(*)$. Задача (60)—(63) может быть решена методом проекции градиента.

Пусть пара $(\alpha_0^*, \beta_0^*) \in E^n \times E^r$ — решение оптимизационной задачи (60)—(63), причем $J_1(\alpha_0^*, \beta_0^*) = 0$. Тогда искомая пара $(b_*^{(1)}, v_*^{(1)}(t)) \in Y$, согласно соотношениям (54), (55), определяется формулами

$$b_*^{(1)}=b^*-N_0\alpha_0^*,\ \ v_*^{(1)}(t)=v_*(t)-M_0(t)\beta_0^*,\ \ t\in[t_0,t_1].$$

Управление $u_*^{(1)}(t)=v_*^{(1)}(t)+\lambda_1(t)+N_1(t)z(t_1,v_*^{(1)})+S_1(t)b_*^{(1)},\ t\in[t_0,t_1]$. Аналогичным путем строятся и другие элементы последовательности $\{u_*^{(n)}(t)\}$ для задачи (40)—(42). Заметим, что управление $u_*^{(1)}(t)\in L_2[t_0,t_1]$ переводит траекторию системы (41) из начального состояния $x_0\in E^n$ в состояние $x_1\in E^n$, причем $J(u_*^{(1)})<J(u_*)$.

Литература

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М., 1979.
2. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М., 1975.
3. Айсагалиев С. А. // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1987. № 3. С. 3—10.
4. Айсагалиев С. А. // Автоматика и телемеханика. 1987. № 5. С. 29—39.
5. Калман Р. // Тр. I Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. М., 1961. Т. 2. С. 521—547.
6. Управление нелинейными динамическими объектами. Пакет прикладных программ, № 01900043975 / Под руководством С. А. Айсагалиева. Алма-Ата, 1991. С. 42.

Казахский государственный университет им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию 22 января 1987 г.

УДК 517.929

Р. Г. АЛИЕВ

О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей работе изучается уравнение

$$Lu(t)\equiv\Big(D_t-\sum_{j=0}^{m}[A_j+A_j(t)]S_{h_j+h_j(t)}\Big)u(t)=f(t),\ \ t\in\mathbf{R},\tag{1}$$

с неограниченными операторными коэффициентами A_j, $A_j(t)$, области определения которых принадлежат некоторому гильбертовому пространству X, $(A_j+A_j(t))u(t)\in Y$, причем $X\subset Y$, $\|\cdot\|_X\geqslant\|\cdot\|_Y$,

$$\|(A_j+A_j(t))u\|_Y\leqslant c\|u\|_X\ \ \forall u\in X,\ c=\mathrm{const},\ j=0,1,\dots,m,\ t\in\mathbf{R}.$$

Переменные отклонения аргумента $h_j(t)$ полагаются абсолютно непрерывными функциями, $h_j'(t)\leqslant r<1$, $t\in\mathbf{R}$, $j=1,2,\dots,m$, $h_0(t)\equiv h_0=0$,

$$S_{h_j+h_j(t)}u(t)\equiv u(t-h_j-h_j(t)),\quad D_t=\frac{1}{i}\,\frac{d}{dt},\quad \mathbf{R}=(-\infty,\infty).$$

Оператор L рассматривается как оператор, действующий из гильбертова пространства $X_{\mathbf{R}}^{1,\alpha}$ с нормой

$$\|u(t)\|_{\mathbf{R}}^{1,\alpha}=\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\alpha t)\,(\|u(t)\|_X^2+\|D_tu(t)\|_Y^2)dt\Big)^{1/2}$$

в гильбертово пространство $Y_{\mathbf{R}}^{0,\alpha}$ с нормой

$$\|u(t)\|_{\mathbf{R}}^{0,\alpha}=\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\alpha t)\,\|u(t)\|_Y^2dt\Big)^{1/2},\ \ \alpha=\mathrm{const}\in\mathbf{R}.$$

Введем еще пространство $L^2(\Delta,H)$ с нормой

$$\|u(t)\|=\Big(\int_{\Delta}\|u(t)\|_H^2dt\Big)^{1/2},\quad \Delta\subseteq\mathbf{R}.$$