Ю. Л. Ершов, Кратно нормированные поля, *Докл. АН СССР*, 1980, том 253, номер 2, 274–277

где $C = 6 \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} (2\alpha e^7)^{1/\alpha}$. Как следует из работы ([1]), правая часть последнего неравенства асимптотически с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией распределения нормы процесса.

В заключение автор выражает признательность Ю.К. Беляеву и И.Е. Островскому за ценные замечания и внимание к работе.

Обнинский филиал
Московского инженерно-физического института

Поступило
19 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю.К. Беляев, В.И. Питербарг*, ДАН, т. 203, № 1, 9 (1972). [2] *R.M. Dudley*, J. Funct. Anal., v. 1, № 2, 290 (1967). [3] *X. Fernique*, Regularite des trajectories des fonction aleatories gaussiennes, Lectures Notes in Mathematics, № 480, Berlin, 1975. [4] *S.M. Berman*, Ann.Probab., v. 2, № 6, 8 (1974).

УДК 518.5 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Ю.Л. ЕРШОВ

КРАТНО НОРМИРОВАННЫЕ ПОЛЯ

Все нужные для дальнейшего сведения об элементарных теориях и нормированных полях можно найти в монографии ([1]). Однако напомним важнейшие для дальнейшего определения и результаты.

Пусть F – поле, R – кольцо нормирования поля F, т.е. такое подкольцо поля F, что для любого $x \in F^*$ (F^* – мультипликативная группа ненулевых элементов поля F) $x \in R$ или $x^{-1} \in R$; R является локальным кольцом, максимальный идеал которого обозначим $\mathfrak{m}(R)$; фактор-поле $R / \mathfrak{m}(R)$ – поле вычетов кольца R – будем обозначать F_R. Естественный гомоморфизм $R \to F_R$ будем обозначать чертой (если $\alpha \in R$, то $\bar{\alpha} \in F_R$ – образ α при этом гомоморфизме). Кольцо R определяет на поле F линейный предпорядок $\leqslant_R$: $a \leqslant_R b \rightleftharpoons bR \subseteq aR$, $a, b \in \in F$. Полагаем $a \equiv_R b$, если $a \leqslant_R b$ и $b \leqslant_R a$; $a <_R b$, если $a \leqslant_R b$ и $\neg(a \equiv_R b)$. Предпорядок $\leqslant_R$ индуцирует линейный порядок $\leqslant_R$ на фактор-группе F^* / R^*, где $R^* \rightleftharpoons R \setminus \mathfrak{m}(R) = \{a \mid a \in F,\ a \equiv_R 1\}$ – мультипликативная группа обратимых элементов кольца R. Линейно упорядоченную группу $\langle F^* / R^*, \leqslant_R \rangle$ будем называть *группой нормирования* и обозначать Γ_R. Гомоморфизм из F^* в Γ_R называется *нормированием*; будем обозначать его v_R.

Кольцо нормирования R называется p-*адическим* (p – простое число), если F – поле характеристики 0, $F_R = GF(p)$ – поле из p элементов, а $v_R(p)$ – наименьший положительный элемент группы Γ_R (здесь p рассматривается как элемент поля Q рациональных чисел и $Q \leqslant F$, так как F – поле характеристики 0).

Кольцо R (и нормированное поле $\langle F, R \rangle$) называется *гензелевым*, если для любого унитарного многочлена $f \in R[x]$, любого $\tilde{\alpha} \in F_R$ такого, что $\bar{f}(\tilde{\alpha}) = 0$, $\bar{f}'(\tilde{\alpha}) \neq 0$, в R существует элемент α такой, что $f(\alpha) = 0$ и $\bar{\alpha} = \tilde{\alpha}$ (здесь $\bar{f}$ – образ f при естественном гомоморфизме $R[x] \to F_R[x]$, а штрих означает формальную производную).

Замечание. Для дальнейшего следует указать, что для гензелевых колец нормирования справедливо следующее

Утверждение (теорема Гензеля – Рихлика). *Для любого унитарного многочлена $f \in R[x]$ и элемента $\alpha \in R$ такого, что $f'(\alpha)^2 <_R f(\alpha)$, существует $\alpha_0 \in \in R$ такой, что $f(\alpha_0) = 0$ и $\alpha - \alpha_0 \equiv_R f(\alpha) - f'(\alpha)^{-1}$.*

Если F' – расширение поля F, R' – кольцо нормирования поля F' такое, что $R' \cap F = R$, то обозначать это будем так: $\langle F, R \rangle \leqslant \langle F', R' \rangle$. Заметим, что в этом случае существуют естественные вложения $F_R \to F_{R'}$ и $\Gamma_R \to \Gamma_{R'}$, так что не уменьшая общности будем считать, что $F_R \leqslant F_{R'}$ и $\Gamma_R \leqslant \Gamma_{R'}$.

Для любого нормированного поля $\langle F, R \rangle$ существует "наименьшее" расширение $\langle F', R' \rangle$ такое, что $\langle F,R \rangle \leqslant \langle F',R' \rangle$ и R' гензелево; это расширение называется гензелизацией и обозначается $\langle F, R \rangle^h = \langle F^h, R^h \rangle$; для гензелизации имеет место $F_R = F_{R^h}$, $\Gamma_R = \Gamma_{R^h}$.

Основным результатом, касающимся элементарных теорий гензелевых полей, является следующая

Теорема ([1], § 8, гл. 4). *Если $\langle F, R \rangle$ и $\langle F', R' \rangle$ – два гензелевых нормированных поля, поле вычетов F_R имеет характеристику 0, то $\langle F, R \rangle$ и $\langle F', R' \rangle$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда элементарно эквивалентны поля вычетов F_R и $F_{R'}$ и группы нормирований Γ_R и $\Gamma_{R'}$.*

Аналогичное утверждение справедливо для гензелевых p-адических колец нормирований R и R'.

Основная задача – найти некоторый аналог гензелевости для кратно нормированных полей, т.е. полей с несколькими кольцами нормирований. Заметим, что требование гензелевости от каждого кольца нормирования сразу приводит к тривиальности: *если поле F обладает двумя нетривиальными независимыми гензелевыми кольцами нормирований R_1 и R_2 (независимость означает, что $R_1 R_2 = F$), то F является сепарабельно замкнутым.*

Оказывается, что можно найти подходящее понятие, так что оно охватывает широкий класс кратно нормированных полей и такое, что справедлив аналог вышеприведенной теоремы.

Перейдем к точным определениям. Пусть $n > 1$ – натуральное число, F – поле, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ – кольца нормирований поля F (всегда будем предполагать, что $R_i \neq F$, $i = 1, 2, \ldots, n$). Алгебраическую систему $\mathbf{F} = \langle F, R_1, R_2, \ldots, R_n \rangle$ будем называть n-кратно нормированным полем. Если $\mathbf{F}' = \langle F', R_1', R_2', \ldots, R_n' \rangle$ – другое n-кратно нормированное поле, то запись $\mathbf{F} \leqslant \mathbf{F}'$ будет означать, что $F \leqslant F'$ и $R_i' \cap F = R_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; будем использовать обозначения $F_i \rightleftharpoons F_{R_i}$, $F_i' \rightleftharpoons F_{R_i'}$, $\Gamma_i \rightleftharpoons \Gamma_{R_i}$, $\Gamma_i' \rightleftharpoons \Gamma_{R_i'}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; тогда из $\mathbf{F} \leqslant \mathbf{F}'$ следует, что $F_i \leqslant F_i'$, $\Gamma_i \leqslant \Gamma_i'$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

n-Кратно нормированное поле $\mathbf{F}$ назовем когерентно полным, если выполнены следующие условия:

1) кольца нормирований $R_1, R_2, \ldots, R_n$ попарно независимы, т.е. $R_i R_j = F$ для $1 \leqslant i < j \leqslant n$;

2) для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ нормированное поле $\langle F, R_i \rangle$ плотно в гензелизации $\langle F, R_i \rangle^h$;

3) для любого $f \in R[x_1, x_2, \ldots, x_k, y]$, $R \rightleftharpoons \bigcap_{i=1}^{n} R_i$, унитарного в y и неприводимого над F, для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $\beta \in R$ таких, что $f_y'(\bar{\alpha}, \beta)^2 <_{R_i} f(\bar{\alpha}, \beta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, любых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in F^*$ существуют $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_k'$, $\beta' \in R$ такие, что $f(\bar{\alpha}', \beta') = 0$; $\gamma_i <_{R_i} \alpha_s' - \alpha_s$, $s = 1, 2, \ldots, k$ и $\beta - \beta' \equiv_{R_i} f(\bar{\alpha}, \beta) f_y'(\bar{\alpha}, \beta)^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Никакого аналога понятия гензелизации в рассматриваемом случае нет, однако справедливо

Предложение 1. *Пусть $\mathbf{F}$ – n-кратно нормированное поле; тогда существует такое n-кратно нормированное когерентно полное поле $\mathbf{F}'$, что $\mathbf{F} \leqslant \mathbf{F}'$; $F_i = F_i'$ и $\Gamma_i \leqslant \Gamma_i'$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Здесь символ $\preccurlyeq$ означает элементарную вложимость.

Пусть $\mathbf{F} = \langle F, R_1, R_2, \ldots, R_n \rangle$ – такое n-кратно нормированное поле, что поля F_i имеют характеристику 0 для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть AbsF – алгебраическое замыкание поля Q рациональных чисел в F. Поле AbsF естественно вложено во все поля F_1, пусть $\langle F_i, \mathrm{AbsF} \rangle$ – алгебраическая система, полученная из F_i естественным обогащением до сигнатуры, содержащей константные символы для элементов AbsF.

Основным результатом об элементарных теориях когерентно полных n-кратно нормированных полей является

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{F}'$ – *когерентно полные n-кратно нормированные поля такие, что для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$ *поля* F_i *,*F_i' *имеют характеристику* 0. *Алгебраические системы* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{F}'$ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такой изоморфизм* φ: $\mathrm{AbsF} \to \mathrm{AbsF}'$, *что для всех* $i = 1, 2, \ldots,$ *n элементарно эквивалентны системы* $\langle F_i, \mathrm{AbsF} \rangle$ *и* $\langle F_i', \varphi\mathrm{AbsF} \rangle$ *и упорядоченные группы* Γ_i *и* Γ_i'.

Можно сформулировать аналогичное утверждение и для случая, когда некоторые кольца нормирования R_i являются p-адическими.

В условиях теоремы 1 справедливо

Предложение 2. *Если* $\mathbf{F} \leqslant \mathbf{F}'$, *то* $\mathbf{F}$ – *элементарная подсистема* $\mathbf{F}'$ ($\mathbf{F} \preccurlyeq \mathbf{F}'$) *тогда и только тогда, когда* $F_i \preccurlyeq F_i'$ *и* $\Gamma_i \preccurlyeq \Gamma_i'$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – простые числа, $\mathfrak{F}_{k+1}, \mathfrak{F}_{k+2}, \ldots, \mathfrak{F}_n$ – аксиоматизируемые классы полей характеристики 0, $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k$ – аксиоматизируемые классы линейно упорядоченных групп, имеющих наименьший положительный элемент, $\mathfrak{G}_{k+1}, \mathfrak{G}_{k+2}, \ldots, \mathfrak{G}_n$ – аксиоматизируемые классы нетривиальных линейно упорядоченных групп. Обозначим через $\langle p_1, p_2, \ldots, p_k, \ \mathfrak{F}_{k+1}, \mathfrak{F}_{k+2}, \ldots \ldots, \mathfrak{F}_n; \ \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n \rangle$ класс всех когерентно полных n-кратно нормированных полей $\mathbf{F} = \langle F, R_1, R_2, \ldots, R_n \rangle$ таких, что для $i = 1, 2, \ldots, k$ R_i – p-адическое кольцо нормирования, $\Gamma_i \in \mathfrak{G}_i$; для $i = k+1, k+2, \ldots, n$ $F_i \in \mathfrak{F}_i$, $\Gamma_i \in \mathfrak{G}_i$.

Теорема 2. *Если классы* $\mathfrak{F}_{k+1}, \mathfrak{F}_{k+2}, \ldots, \mathfrak{F}_n, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$ *имеют разрешимую теорию, то и класс* $\langle p_1, p_2, \ldots, p_k, \ \mathfrak{F}_{k+1}, \mathfrak{F}_{k+2}, \ldots, \mathfrak{F}_n; \ \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n \rangle$ *имеет разрешимую теорию.*

Теорема 2 позволяет указать большое количество новых классов полей с разрешимой теорией.

В связи с работой ([3]) приведем следующее

Предложение 3. *Для любого набора простых чисел* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *существует когерентно полное n-кратно нормированное поле* $\mathbf{F} = \langle F, R_1, R_2, \ldots, R_n \rangle$ *с разрешимой теорией такое, что для любого* $i = 1, 2, \ldots, n$ R_i – p-адическое кольцо нормирования и F – алгебраическое расширение поля Q.

Для того чтобы объяснить одну из идей доказательства предыдущих утверждений, сформируем еще ряд утверждений о существовании модельных компаньонов. Для сокращения формулировок ограничимся только нормированиями с полями вычетов характеристики 0.

Пусть для $i = 1, 2, \ldots, n$ $\mathfrak{F}_i$ – аксиоматизируемый класс полей характеристики 0, σ_i – такое формульное множество предикатов, что для класса $\mathfrak{F}_i$ в сигнатуре $\sigma_f \cup \sigma_i$ (σ_f – сигнатура теории полей) существует модельный компаньон $\mathfrak{F}_i^*$; $\mathfrak{G}_i$ – аксиоматизируемый класс нетривиальных линейно упорядоченных абелевых групп, τ_i – такое формульное множество предикатов, что для класса $\mathfrak{G}_i$ в сигнатуре $\tau_l \cup \tau_i$ (τ_l – сигнатура линейно упорядоченных групп) существует модельный компаньон $\mathfrak{G}_i^*$. Через $[\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n; \ \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n]$ обозначим класс всех n-кратно нормированных полей $\mathbf{F} = \langle F, R_1, R_2, \ldots, R_n \rangle$ таких, что $F_i \in \mathfrak{F}_i$, $\Gamma_i \in \mathfrak{G}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; если $\sigma \rightleftharpoons \sigma_f \cup \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_n \cup \tau_l \cup \tau_1 \cup \ldots \cup \tau_n \cup$

$\cup \langle R_1^1, R_2^1, \ldots, R_n^1 \rangle$, то n-кратно нормированное поле из этого класса можно естественно (как в (1), гл. 4, § 8) рассматривать как алгебраическую систему сигнатуры.

Теорема 3. *Класс* $\langle \mathfrak{F}_1^*, \mathfrak{F}_2^*, \ldots, \mathfrak{F}_n^*; \mathfrak{S}_1^*, \mathfrak{S}_2^*, \ldots, \mathfrak{S}_n^* \rangle$ *в сигнатуре* σ *является модельным компаньоном для класса алгебраических систем* $[\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n; \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n]$ *сигнатуры* σ.

Замечание. В диссертации (2) исследованы поля с n линейными порядками (в частности, явно описан модельный компаньон для этого класса и доказана его разрешимость) и получены некоторые результаты о полях с p-адическими нормированиями и порядками. Однако описание модельного компаньона для полей с p-адическими нормированиями дано неявно, что, по-видимому, не позволило получить в работе (3) предложение 3 настоящей работы. Знакомство с диссертацией (2) оказало на автора стимулирующее действие.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР, Новосибирск

Поступило
2 IV 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю.Л. Ершов,* Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., "Наука", 1980. [2] *L.P.D. Van den Dries,* Model Theory for Fields, Utrecht, 1978. [3] *L. Van den Dries,* Proc. Am. Math. Soc., v. 77, № 2, 251 (1979).

УДК 519.214.9

МАТЕМАТИКА

А.Ю. ЗАЙЦЕВ

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 1 III 1980)

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые k-мерные случайные векторы, $\xi_i = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{ik})$; F_i – распределения ξ_i, F_{ij} – распределения ξ_{ij}, F – распределение $\xi_1 + \ldots + \xi_n$, E_y – распределение, сосредоточенное в точке y; $E = E_0$. Произведения и степени мер мы будем понимать в смысле свертки. Если $\lambda > 0$, а G – некоторая мера, то

$$\exp(\lambda(G - E)) = e^{-\lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^s}{s!} G^s.$$

Обозначим

$$\mathfrak{A} = \{P \subset R^k,\ P = \{x = (x_1, \ldots, x_k) \mid x_j \in (a_j, b_j),\ j = 1, 2, \ldots, k\},$$

$\mathfrak{A}$ – совокупность параллелепипедов в R^k с ребрами, параллельными координатным осям. Если

$$P = \{x = (x_1, \ldots, x_k) \mid x_j \in (a_j, b_j),\ j = 1, 2, \ldots, k\} \in \mathfrak{A},$$

то для положительных чисел $L_1, \ldots, L_k$ мы обозначим

$$P(L_1, \ldots, L_k) = \{x = (x_1, \ldots, x_k) \mid x_j \in (a_j - L_j, b_j + L_j),\ j = 1, 2, \ldots, k\}.$$