А. Н. Ветохин, К бэровской классификации остаточных показателей, *Дифференц. уравнения*, 1998, том 34, номер 8, 1039–1042

1998. Т. 34, № 8. С. 1039 — 1042

УДК 517.926.4

К БЭРОВСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ОСТАТОЧНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

А. Н. Ветохин

Для заданного натурального числа n рассмотрим множество систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \in R^+, \tag{1}$$

где $A : R^+ \to \operatorname{End} R^n$ — непрерывная ограниченная оператор-функция. В процессе развития качественной теории дифференциальных уравнений введено большое число различных характеристик асимптотического поведения решений систем вида (1). Многие из этих характеристик являются разрывными функциями на пространстве систем вида (1), наделенном различными топологиями (например, показатели Ляпунова [1], рассматриваемые как функции на пространстве систем вида (1), наделенном топологией равномерной сходимости коэффициентов на R^+ [2]). В. М. Миллионщиков предложил использовать для классификации этих характеристик классификацию Бэра разрывных функций [3, 4]. В частности, он установил, что показатели Ляпунова принадлежат второму классу Бэра на пространстве систем вида (1), наделенном топологиями равномерной или компактной сходимости коэффициентов [5, 6], а М. И. Рахимбердиев [7] доказал, что показатели Ляпунова не принадлежат первому классу Бэра на этих же топологических пространствах.

В настоящей работе исследуются вопросы о непринадлежности первому классу Бэра различных показателей.

Обозначим через (M_n, ρ) метрическое пространство, точками которого являются системы вида (1), а метрика удовлетворяет условию

$$\rho(A, B) = \rho(A - B, 0), \quad A, B \in M_n. \tag{2}$$

Для произвольной оператор-функции A обозначим через $X(A)$ множество тех оператор-функций, которые совпадают с A на всей полуоси, кроме, быть может, некоторого отрезка конечной длины.

Лемма 1. *Для любой системы A и любой системы $B \in \overline{X}(A)$ имеет место включение $\overline{X}(A) \subset \overline{X}(B)$ ($\overline{X}$ — замыкание множества X).*

Доказательство. Пусть $B, C \in \overline{X}(A)$, тогда существуют последовательности функций $\{A_m^1\}_{m=1}^{\infty}, \{A_m^2\}_{m=1}^{\infty} \subset X(A)$ такие, что предел первой равен B, а второй — C. Последовательность $B_m = B - A_m^1 + A_m^2$ принадлежит $X(B)$, так как $A_m^1(t) = A_m^2(t)$, кроме, быть может, некоторого отрезка конечной длины. Используя свойство (2), получаем неравенства

$$\lim_{m\to\infty} \rho(C, B_m) = \lim_{m\to\infty} \rho(C, B - A_m^1 + A_m^2) = \lim_{m\to\infty} \rho(0, A_m^2 - C + B - A_m^1) = \lim_{m\to\infty} \rho(C - A_m^2, B - A_m^1) \le$$
$$\le \lim_{m\to\infty} (\rho(C - A_m^2, 0) + \rho(B - A_m^1, 0)) = \lim_{m\to\infty} (\rho(C, A_m^2) + \rho(B, A_m^1)) = 0.$$

Итак, $C \in \overline{X}(B)$, а значит, $\overline{X}(A) \subset \overline{X}(B)$. Лемма доказана.

Следуя [8], функционал $\lambda : M_n \to R$ назовем остаточным, если для любой системы A и любой системы $B \in X(A)$ выполнено равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Лемма 2. *Если (M_n, ρ) — полное метрическое пространство, а λ — произвольный остаточный функционал, принадлежащий первому классу Бэра на этом пространстве, то для любой системы $A \in M_n$ и любой системы $B \in \overline{X}(A)$ имеем равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$.*

Доказательство. Допустим, что существует система $B \in \overline{X}(A)$ такая, что $\lambda(A) \ne$ $\ne \lambda(B)$. Так как λ — остаточный функционал, то для любой $C \in X(A)$ и любой $D \in X(B)$

имеет место неравенство $\lambda(C) = \lambda(A) \neq \lambda(B) = \lambda(D)$. Так как $\overline{X}(A) \subset \overline{X}(B)$ (см. лемму 1), т.е. в любой окрестности произвольной точки из $\overline{X}(A)$ есть точки из $X(A)$ и $X(B)$, то получаем, что каждая точка замкнутого множества $\overline{X}(A)$ является точкой разрыва сужения функции λ на $\overline{X}(A)$, а значит, остаточный функционал λ не является функцией первого класса Бэра на (M_n, ρ) (см. [4, с. 243]). Лемма доказана.

С помощью этой леммы найдем условия, необходимые для принадлежности остаточного функционала первому классу Бэра на пространстве M_n, наделенном топологией равномерной сходимости коэффициентов (полученное таким образом метризуемое топологическое пространство будем обозначать через M_n^u).

Теорема 1. *Пусть остаточный функционал λ принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Тогда для любых двух систем $A(t), B(t) \in M_n$ из условия*

$$\lim_{t\to\infty} |A(t) - B(t)| = 0 \tag{3}$$

вытекает равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Доказательство. Пусть A — произвольная система из M_n. Докажем, что любая система B, удовлетворяющая условию (3), принадлежит множеству $\overline{X}(A)$. Рассмотрим последовательность функций из $X(A)$, определенных следующим образом:

$$A_m(t) = \begin{cases} B(t) & \text{при } t \in [0, m], \\ B(t)(m+1-t) + A(t)(t-m) & \text{при } t \in [m, m+1], \\ A(t) & \text{при остальных } t. \end{cases} \tag{4}$$

Так как

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |A_m(t) - B(t)| \le \sup_{t\in[m+1,\infty)} |A(t) - B(t)| + \sup_{t\in[m,m+1)} |A_m(t) - B(t)| =$$

$$= \sup_{t\in[m+1,\infty)} |A(t) - B(t)| + \sup_{t\in[m,m+1)} |B(t)(m+1-t) + A(t)(t-m) - B(t)| \le 2 \sup_{t\in[m,\infty)} |A(t) - B(t)|,$$

то из (3) получаем $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{t\in[0,\infty)} |A_m(t) - B(t)| \le 2 \lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{t\in[m,\infty)} |A(t) - B(t)| = 0$, т.е. $A_m \to B$ при $m \to \infty$ в пространстве M_n^u. Итак, имеем $B \in \overline{X}(A)$. Поскольку M_n^u — полное метрическое пространство, то из леммы 2 получаем, что $\lambda(A) = \lambda(B)$. Теорема доказана.

С помощью леммы 2 найдем условия, необходимые и достаточные для принадлежности остаточного функционала первому классу Бэра на пространстве M_n, наделенном топологией компактной сходимости коэффициентов (полученное таким образом метризуемое топологическое пространство будем обозначать через M_n^c).

Теорема 2. *Для принадлежности остаточного функционала λ первому классу Бэра на пространстве M_n^c необходимо и достаточно, чтобы $\lambda(A) = \lambda(B)$ для любых $A(t), B(t) \in M_n$.*

Доказательство. Докажем необходимость условия. Пусть A — произвольная функция из M_n. Убедимся, что любая функция $B \in M_n$ принадлежит множеству $\overline{X}(A)$. Рассмотрим последовательность функций из $X(A)$, определенных формулой (4). Так как $A_m(t) = B(t)$ на отрезке $[0, m]$, то $A_m \to B$ при $m \to \infty$ в пространстве M_n^c, а следовательно, $B \in \overline{X}(A)$. Поскольку пространство M_n^c может быть метризовано полной метрикой [9, с. 96, 97], удовлетворяющей условию (2), то из леммы 2 получаем, что $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Докажем достаточность условия. Любая функция, принимающая единственное значение на всем пространстве M_n^c, является непрерывной функцией, а тем более функцией первого класса Бэра на этом пространстве. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров применения полученных выше результатов для определения класса Бэра некоторых показателей.

Обозначим через G_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, множество всех векторных подпространств $L \subset R^n$ размерности k и зафиксируем некоторую систему $A \in M_n$. Будем использовать стандартные обозначения из [10]: $X(t, s)$ — оператор Коши системы A, а $X_L(t, s)$ — его сужение на подпространство L, показатели Ляпунова системы (1)

$$\lambda_k(A) = \inf_{L\in G_k} \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln |X_L(t, 0)|, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим величины, тесно связанные с показателями Ляпунова,

$$\delta_k(A) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \inf_{L\in G_k} \ln |X_L(t,0)|. \tag{5}$$

Лемма 3. *Существуют две системы из* M_n *такие, что* $\delta_1(A_1) \le 0$, $\delta_1(A_2) = \delta_2(A_1) = 1/3$, $\delta_2(A_2) \ge 1/2$ *и* $\lim\limits_{t\to\infty} |A_1(t) - A_2(t)| = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = (-1)^{k-1}$ при $t \in [2^{2l-3+k}, 2^{2l-2+k})$, $k = 1,2$; $l = 1,2,\ldots$, и функцию $g(t) = 1/l$ при $t \in [2^{l-1}, 2^l)$, $l = 1,2,\ldots$; значения f и g на $[0,1)$ не играют роли: для простоты считаем здесь $f(t) = g(t) = 0$. Рассмотрим две системы $\dot x = U_1(t)x$ и $\dot y = U_2(t)y$, где

$$U_1(t) = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2(t) = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор Коши первой системы имеет вид $X(t,0) = \operatorname{diag}[F(t),1]$, $F(t) \equiv \exp\int_0^t f(\tau)\,d\tau$, а второй — $Y(t,0) = X(t,0) + (y_{ij}(t,0))_{i,j=2}^2$, где $y_{ij} \equiv 0$, $i \ge j$, $y_{12}(t,s) \equiv F(t)\int_s^t g(\tau)F^{-1}(\tau)\,d\tau$. Из формулы (5) имеем для системы U_1

$$\delta_1(U_1) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln \inf_{x\ne 0} |X(t,0)x| \le 0, \quad \delta_2(U_1) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln |X(t,0)| = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \max\{\ln F(t), 0\},$$

а для системы U_2

$$\delta_1(U_2) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln \inf_{x\ne 0} |Y(t,0)x| = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln F(t),$$

$$\delta_2(U_2) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln |Y(t,0)| \ge \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln y_{12}(t,0).$$

В работе [11, с. 148 — 150] установлено, что

$$\delta_1(U_2) = \delta_2(U_1) = 1/3. \tag{6}$$

Докажем, что $\delta_2(U_2) \ge 1/2$. Для доказательства достаточно взять $t'_m = 2^{2m}$ и $t_m = 2^{2m+1}$. Тогда, согласно (6) и определению $f(t)$, имеем

$$\ln F(t_m) = (1/3 + \varepsilon_m)t_m, \quad \varepsilon_m \to 0, \tag{7}$$

а для $s \in [t'_m, t_m]$

$$\ln F(s) = \ln F(t'_m) + \ln[F(s)/F(t'_m)] = (-1/3 - \varepsilon'_m)t'_m + (s - t'_m), \quad \varepsilon'_m \to 0. \tag{8}$$

Далее

$$\delta_2(U_2) \ge \overline{\lim_{t_m\to\infty}}\, t_m^{-1} \ln y_{12}(t_m, t'_m).$$

Оценим последнее выражение снизу с помощью (7) и (8). Так как

$$F^{-1}(t_m)y_{12}(t_m, t'_m) = (2m+1)^{-1}e^{(1/3+\varepsilon'_m)t'_m}(1 - e^{(t'_m - t_m)}) \ge (2(2m+1))^{-1}e^{(1/3+\varepsilon'_m)t'_m},$$

то получаем $\delta_2(U_2) \ge \overline{\lim\limits_{t_m\to\infty}}\, t_m^{-1}((1/3+\varepsilon_m)t_m + (1/3+\varepsilon'_m)t'_m - \ln((2m+1)\cdot 2)) = 1/2$. Отметим, что $\lim\limits_{t\to\infty} |U_2(t) - U_1(t)| = 0$.

По кусочно-непрерывным функциям U_1 и U_2 построим непрерывные функции A_1 и A_2 (см. [11, с. 467]) такие, что $\delta_1(U_1) = \delta_1(A_1)$, $\delta_2(U_1) = \delta_2(A_1)$, $\delta_1(U_2) = \delta_1(A_2)$, $\delta_2(U_2) = \delta_2(A_2)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} |A_2(t) - A_1(t)| = 0$. Лемма доказана.

Теорма 3. *Если* $n > 1$, *то функция* $\delta_k : M_n \to R$ *на пространствах* M_n^u, M_n^c *принадлежит второму классу Бэра, но не принадлежит первому классу Бэра.*

Доказательство. Перепишем (5) в виде $\delta_k(A) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \inf\limits_{L\in G_k} m^{-1}\ln|X_L(m,0)|$. Отсюда и из теоремы о непрерывной зависимости решений от правой части системы получаем, что функция δ_k принадлежит второму классу Бэра на пространствах M_n^c, M_n^u. Докажем, что функция δ_k не принадлежит первому классу Бэра на пространствах M_n^u, M_n^c. Рассмотрим две блочно-диагональные системы

$$\dot{x} = \{2,\dots,2,A_1(t),\underbrace{0,\dots,0}_{k-1}\}x, \quad \dot{y} = \{2,\dots,2,A_2(t),\underbrace{0,\dots,0}_{k-1}\}y,$$

где $A_1(t)$, $A_2(t)$ из леммы 3. Из леммы 3 и формулы (5) получаем для первой системы $\delta_k = 0$, $\delta_{k+1} = 1/3$, а для второй системы $\delta_k = 1/3$, $\delta_{k+1} \geq 1/2$. Значит, функции δ_{k+1}, δ_k не принадлежат первому классу Бэра на пространствах M_n^u, M_n^c. Теорема доказана.

Отметим, что при $n = 1$ функция δ_1 принадлежит нулевому классу Бэра на пространстве M_n^u, а на пространстве M_n^c — в точности второму классу Бэра. Действительно, так как при $n = 1$ имеем

$$\delta_1(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m}\int_0^m A(t)\,dt,$$

то функция δ_1 непрерывна на пространстве M_n^u (принадлежит нулевому классу) и принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c. Для доказательства непринадлежности функции первому классу Бэра на пространстве M_n^c достаточно рассмотреть два уравнения: $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 1$. Для первого уравнения $\delta_1 = 0$, а для второго $\delta_1 = 1$. Таким образом, получаем, что функция δ_1 не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_1^c.

Рассмотрим другой пример. Через $\lambda_k^{\max}(\cdot)$ обозначим минимальную полунепрерывную сверху мажоранту k-го показателя Ляпунова как функции на множестве M_n^u, т.е. $\lambda_k^{\max}(A) = \overline{\lim\limits_{B\to A}} \lambda_k(B)$, $A \in M_n$. В работе [12] поставлена задача о наименьшем классе Бэра, которому принадлежит функция $\lambda_k^{\max}(\cdot)$ на пространстве M_n^c, а в [13] установлено, что она принадлежит второму классу Бэра. Следующая теорема утверждает, что она не принадлежит первому классу Бэра.

Теорема 4. *Пусть $k \in \{1,2,\dots,n\}$, тогда функция $\lambda_k^{\max} : M_n \to R$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Доказательство. Пусть $k \in \{1,2,\dots,n\}$. Рассмотрим две диагональные системы $\dot{x} = \{\underbrace{0,\dots,0}_{n}\}x$, $\dot{y} = \{\underbrace{1,\dots,1}_{n}\}y$, для первой системы $\lambda_k^{\max} = 0$, а для второй $\lambda_k^{\max} = 1$. Следовательно, функция $\lambda_k^{\max}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^c. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность В. М. Миллионщикову за постановку задачи и И. Н. Сергееву за внимание к работе.

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
2. *Perron O.* // J. reine und angew. Math. 1931. Vol. 142. P. 254 — 270.
3. *Бэр Р.* Теория разрывных функций. М.; Л., 1932.
4. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л., 1934.
5. *Миллионщиков В. М.* // Мат. заметки. 1985. Т. 38, № 1. С. 92 — 109.
6. *Миллионщиков В. М.* // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 1. С. 29 — 51.
7. *Рахимбердиев М. И.* // Мат. заметки. 1962. Т. 31, № 6. С. 925 — 931.
8. *Сергеев И. Н.* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111 — 166.
9. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства. М., 1967.
10. *Сергеев И. Н.* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1986. Вып. 11. С. 32 — 73.
11. *Былов Б. Ф. Виноград Г. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1968.
12. *Миллионщиков В. М.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1457.
13. *Миллионщиков В. М.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 6. С. 1090.

Московский педагогический университет

Поступила в редакцию
28 мая 1997 г.