

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Мень, Теоретические аспекты определения теплопроводности полупрозрачных веществ. I, *ТВТ*, 1973, том 11, выпуск 2, 290–299

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.239.90.61

10 ноября 2024 г., 23:58:43



УДК 536.2

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПОЛУПРОЗРАЧНЫХ ВЕЩЕСТВ. I

А. А. Мень

На базе точных уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена (РКТ) получены соотношения, позволяющие определять истинную теплопроводность полупрозрачных веществ. Проведены оценки справедливости допущений, лежащих в основе приближенных методик, указаны причины их ограниченности. Исследованы особенности вычислительного процесса, возникающие при значительной лучистой составляющей теплопереноса. Приведены значения коэффициентов, необходимых для расчета теплопроводности, полученные многократными численными решениями на ЭВМ интегрального уравнения РКТ для ряда значений определяющих параметров, варьирующихся в широких пределах.

Все методы определения теплопроводности материалов основываются на тех или иных аналитических соотношениях, связывающих коэффициент теплопроводности λ с измеряемыми в эксперименте величинами: тепловым потоком, температурой и геометрическими параметрами образца. Так как эти соотношения обычно опираются на уравнение Фурье, то известные методы не пригодны для полупрозрачных веществ, внутри которых теплоперенос осуществляется одновременно теплопроводностью и радиацией (радиационно-кондуктивный теплообмен, РКТ). По этой причине определение теплопроводности полупрозрачных материалов (твердых, жидких или газообразных) представляет собой особую область тепловых измерений, базирующуюся на более общем уравнении РКТ. Наличие излучения приводит к необходимости учитывать ряд специфических факторов, таких как характер отражения излучения у границ, излучение граничащих с образцом тел и других, что неизбежно приводит к существенному усложнению используемых соотношений даже в случае простейшей геометрии образца. Положение усугубляется еще и тем, что теплофизические свойства полупрозрачного вещества всегда оказываются связанными с его оптическими характеристиками, представляющими собой сложные функции частоты ν . В силу указанных обстоятельств вряд ли можно ожидать появления единой методики определения истинного значения теплопроводности рассматриваемых материалов. Более того, представляются целесообразными и значимыми не только такие способы исключения лучистой составляющей, которые основаны на строгом учете всех перечисленных выше факторов, но и те, что используют упрощенные модели теплопереноса (если они обоснованы и обеспечивают требуемую точность). Таким образом, исследуемая проблема включает в себя ряд аспектов, изложению которых и посвящена данная работа.

Общие соотношения и анализ приближенных методик. Далее будут исследоваться только абсолютные стационарные методы определения теплопроводности с помощью образцов плоской либо цилиндрической формы. Рассматриваются однородные, частично прозрачные материалы, не имеющие внутренних источников тепла (рассеивающие среды здесь не затрагиваются). Уравнение РКТ для плоского и цилиндрического слоев

имеет вид

$$-\lambda(dT/dx) + E(x) = Q, \quad (1)$$

$$-\lambda(dT/dr) + E(r) = Qr_1/r, \quad (2)$$

где Q — плотность полного потока энергии, выделяемой у «горячей» границы образца, т. е. полезная удельная мощность нагревателя (в случае цилиндрического слоя нагреватель считается расположенным внутри образца; Q — плотность потока на поверхности наименьшего радиуса r_1); E — плотность потока лучистой энергии, представляющая собой функционал температурного распределения в слое [1, 2]. Эта величина определяется решением уравнения переноса излучения

$$dI_\nu/ds = -k_\nu I_\nu + j_\nu(T) \quad (3)$$

с помощью равенства

$$E = 2\pi \int_{\nu=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} I_\nu \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \quad (4)$$

где I_ν — интенсивность излучения; k_ν — коэффициент поглощения среды; $j_\nu(T) = k_\nu n_\nu^2 I_n(\nu, T)$ — объемная плотность излучения вещества; n_ν — показатель преломления; $I_n(\nu, T)$ — функция Планка. Вид решения уравнения (3) существенно зависит от граничных условий для интенсивности I_ν . В экспериментах по определению теплопроводности, как правило, слой исследуемого вещества находится в непосредственном тепловом контакте с непрозрачными поверхностями нагревателя и холодильника. Поэтому в граничные значения I_ν включается собственное тепловое излучение этих непрозрачных границ и учитываются их отражательные свойства. В общем случае отражение носит зеркально-диффузный характер, и, как показано в [3], строгий учет индикатрисы отражения на поверхности приводит к системе интегральных уравнений, не решаемых в аналитическом виде. Однако в действительности поверхности нагревателя и холодильника — хорошо обработанные плоскости, шероховатости которых стремятся уменьшить (например, из-за нежелательных термических сопротивлений на границе), так что остаточные микрошероховатости сравнимы или меньше длины волны теплового излучения (в ИК-области спектра). Это дает основание утверждать, что диффузная составляющая отражения очень мала и границы полупрозрачной среды — зеркально отражающие поверхности. В таком случае коэффициенты отражения $R_{1\nu}$ и $R_{2\nu}$ определяются формулами Френеля, причем учитывается, что излучение отражается в среду с показателем преломления, отличным от единицы [4]. Следует отметить, что попытки использовать для отыскания теплопроводности материалов решения уравнения РКТ, основанные на математической более простой модели чисто диффузного отражения [5, 6], нельзя признать удачными.

Пусть плоский слой имеет толщину H . Интегрируя (1) от нуля до H и обозначая $\Delta T = T(0) - T(H)$, находим

$$\lambda = \frac{QH}{\Delta T} - \frac{1}{\Delta T} \int_0^H E(x) dx. \quad (5)$$

Аналогично для цилиндрического слоя

$$\lambda = \frac{Qr_1}{\Delta T} \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{1}{\Delta T} \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr. \quad (6)$$

Так как величины Q и ΔT , а также H , r_1 и r_2 определяются опытным путем, то проблема сводится к вычислению интегральных членов в равенствах (5) и (6). Как уже указывалось, величина E включает в себя все особенности лучистой составляющей в каждой конкретной задаче.

Обратимся вначале к плоскому слою. Поток энергии излучения можно представить в следующем виде (подробный вывод для случая зеркально-отражения границ приведен в [7, 8]):

$$E(x) = E^{(1)}(x) + E^{(2)}(x), \quad (7)$$

где

$$E^{(1)}(x) = -\Delta T 2\pi \int_{\nu=0}^{\infty} \nu^2 \left(\frac{\partial I_B}{\partial T} \right)_{T_1} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} [1 - R_{2\nu}(\varphi)] \times \\ \times \sin \varphi \cos \varphi \left\{ R_{1\nu} \exp \left[-\frac{k_\nu(H+x)}{\cos \varphi} \right] - \exp \left[-\frac{k_\nu(H-x)}{\cos \varphi} \right] \right\} \times \\ \times \left[1 - R_{1\nu} R_{2\nu} \exp \left(-\frac{2k_\nu H}{\cos \varphi} \right) \right]^{-1} d\varphi d\nu, \quad (8)$$

$$E^{(2)}(x) = -2\pi \int_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \nu^2 \left(\frac{\partial I_B}{\partial T} \right)_{T_1} \left(\int_{\xi=0}^x \vartheta(\xi) E_2[k_\nu(x-\xi)] d\xi - \right. \\ \left. - \int_{\xi=x}^H \vartheta(\xi) E_2[k_\nu(\xi-x)] d\xi + \int_{\xi=0}^H \vartheta(\xi) \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin \varphi \left\{ R_{1\nu} \exp \left[-\frac{k_\nu(x+\xi)}{\cos \varphi} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + R_{1\nu} R_{2\nu} \exp \left[-\frac{k_\nu(2H+x-\xi)}{\cos \varphi} \right] - R_{2\nu} \exp \left[-\frac{k_\nu(2H-x-\xi)}{\cos \varphi} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - R_{1\nu} R_{2\nu} \exp \left[-\frac{k_\nu(2H-x+\xi)}{\cos \varphi} \right] \right\} \left[1 - R_{1\nu} R_{2\nu} \exp \left(-\frac{2k_\nu H}{\cos \varphi} \right) \right]^{-1} d\varphi d\xi \right) d\nu, \quad (9)$$

$E_m(x)$ — интегро-экспоненциальные функции порядка m . При выводе принималось во внимание, что при измерении теплопроводности перепад температур на образце всегда мал, так что $\Delta T \ll T_1$. Это обстоятельство позволило линеаризовать выражение $E(x)$ с помощью соотношения

$$I_B(\nu, T_1) - I_B[\nu, T(x)] = (\partial I_B / \partial T)_{T_1} \vartheta(x), \quad (10)$$

где $\vartheta(x) = T_1 - T(x)$. Легко показать, что приближенное равенство (10) очень мало отличается от точного, если только $\alpha = \vartheta(x) / T_1 \ll 1$, и потому изучая теплопроводность полупрозрачных веществ, нет смысла использовать громоздкий аппарат нелинейного анализа для уравнения РКТ, а можно ограничиться решением линейных уравнений. Численные оценки влияния нелинейности, полученные при сопоставлении решений нелинейного и линеаризованного уравнений РКТ, подтверждают этот вывод [9].

Как видно из (7), поток излучения состоит из двух слагаемых: первое связано с излучением границ, второе соответствует излучению собст-

венно полупрозрачной среды. Это последнее зависит от температурного профиля в слое $\vartheta(x)$, определение которого и представляет основную трудность. Строгое аналитическое решение линеаризованного интегрального уравнения РКТ для отыскания $\vartheta(x)$ даже в случае неселективной среды оказывается настолько громоздким [9, 10], что использовать его в соотношениях (9), (7) и (5) совершенно невозможно. Для того чтобы получить более простые расчетные формулы, в ряде работ авторы пошли по пути значительного упрощения физической модели теплопереноса. Так, если рассматривать теплопередачу только во внутренних слоях, настолько удаленных от поверхностей, что тепловым излучением границ и отражением радиации от поверхностей можно пренебречь, то в равенстве (7) часть $E^{(1)}(x)$ полагается равной нулю, так же как и последнее интегральное слагаемое в (9). Кроме того, в оставшихся интегралах пределы 0, H заменяются на $\mp \infty$. Эти преобразования, существенно облегчающие описание явления, положены в основу авторами [11–14]. Однако и этого оказывается недостаточно и для получения приемлемых аналитических результатов пришлось наложить дополнительное условие [14]

$$dI_B(\nu, T) / dx = \text{const.} \quad (11)$$

Только после таких весьма произвольных ограничений удалось найти для потока энергии излучения градиентное представление [11–13]

$$E = -\lambda_{\pi} (dT / dx), \quad (12)$$

где λ_{π} — лучистая теплопроводность, определяемая равенством

$$\lambda_{\pi} = \frac{4}{3} \pi \int_0^{\infty} \frac{n_{\nu}^2}{k_{\nu}} \frac{\partial I_B}{\partial T} d\nu. \quad (13)$$

Последнее соотношение — обобщение известной формулы Росселанда

$$\lambda_{\pi} = 16/3 (n^2 \sigma T^3 / k) \quad (14)$$

на случай селективной среды, поэтому все ограничения, о которых говорилось выше, целиком относятся также к соотношению (14). К сожалению, последнее равенство ввиду его простоты часто применяется для исключения лучистой составляющей в условиях, весьма далеких от области его применимости (см., например, [15–18]). Заметим, что условие (11) для «серой» среды равносильно предположению $T'(x) = ax + b$, которое иногда используют при решении уравнения РКТ методом итераций [5].

В большинстве случаев граничными эффектами пренебречь нельзя, так как используемые образцы по ряду причин не могут быть взяты достаточно толстыми. (Расчеты, проведенные в [9], показали, что в пластине плавленого кварца влияние границ весьма ощутимо даже на толщине $H = 20$ см при $T = 1500^{\circ}$ К.) Учитывая этот факт, для $E(x)$ сохраняют оба слагаемых (7), а упрощения достигают за счет подстановки в (9) вместо действительного профиля температур функции

$$\vartheta(x) = \Delta T (x / H), \quad (15)$$

избавляясь таким образом от решения уравнения РКТ. Так поступил Польд [19], который для случая неселективной среды получил следующее упрощенное выражение для интегрального члена в (5):

$$\frac{1}{\Delta T} \int_0^H E(x) dx = \frac{16}{3} \frac{n^2 \sigma T^3}{k} Y(\epsilon, \tau_0), \quad (16)$$

где $\tau_0 = kH$ — оптическая толщина слоя, и привел таблицу функции $Y(\epsilon, \tau_0)$ для ряда значений ϵ и τ_0 . Автор [19] указал, что его результатами можно пользоваться, когда лучистая составляющая — лишь малая доля от всего теплопереноса, но не приводит количественных критериев, позволяющих оценить применимость равенства (16) в конкретных условиях. Составляя точное решение задачи РКТ с данными Польца, установлено, что формулой (16) можно пользоваться и при значительной фотонной теплопроводности, если только оптическая толщина слоя τ_0 мала, поскольку для малых τ_0 функция $\vartheta(x)$ действительно очень слабо отличается от линейной, однако с ростом τ_0 и самой лучистой составляющей погрешность (16) становится существенной. Применимость равенства (16) ниже будет рассматриваться более подробно.

Случай очень малых τ_0 (оптически тонкий слой) позволяет также упростить анализ, так как все экспоненты в (8) и (9) могут быть заменены линейными функциями (первыми членами разложения в ряд Тейлора) [8]. Что же касается $\vartheta(x)$, то автор [8, 21] проводит разложение ее в ряд по параметру $1/\lambda$, который должен быть достаточно малым, и ограничивается двумя членами этого ряда. Физически это означает, как указывает сам автор, что лучистая теплопроводность мала и играет роль искажающего фактора на фоне кондуктивной составляющей.

Отметим, что в слое малой оптической толщины излучение полупрозрачного материала ничтожно по сравнению с излучением границ. Поэтому $E^{(2)} \ll E^{(1)}$ и $E(x)$ можно определять с помощью (8), что гораздо проще, нежели решения из [8]. Расчеты показывают, что для кварцевых пластин толщиной 2–5 мм при нагреве до 1200° К, даже когда роль граничных поверхностей играет платиновая фольга (вещество с малой степенью черноты), сохраняется преобладающее влияние излучения поверхностей над излучением нагретого кварца.

Плоский слой неселективной среды. Рассмотрим возможности определения истинной теплопроводности полупрозрачного материала на основе строгого решения уравнения РКТ, не пренебрегая граничными эффектами и не задаваясь видом функции $\vartheta(x)$. Толщину слоя будем считать произвольной. Начнем с более простого случая «серой» среды, когда спектральной зависимостью $k(\nu)$ и $n(\nu)$ можно пренебречь, используя усредненные по спектру значения k и n . Что такое усреднение в ряде случаев возможно, было показано в [1]: расчет температурного поля в приближении «серой» среды и с учетом селективности для таких материалов, как серпнистый кадмий или селенисто-мышьяковистое стекло, не обнаружил заметного различия даже при значительной фотонной составляющей теплопереноса. Априори можно утверждать, что ряд органических жидкостей (толуол) также может быть описан в приближении «серой» среды, поскольку для них функция $k(\nu)$ не претерпевает значительных колебаний в широкой спектральной области, включающей максимум теплового излучения.

Способы вычисления среднего значения k могут быть различными [20, 22], предпочтительным оказывается росселандово среднее

$$k = \int_{\nu=0}^{\infty} n_s^2 \frac{\partial I_B}{\partial T} d\nu \left/ \int_{\nu=0}^{\infty} \frac{n_s^2}{k_s} \frac{\partial I_B}{\partial T} d\nu. \right. \quad (17)$$

Что же касается величины n , то ее отыскание не представляет трудности, поскольку в области полупрозрачности $n(\nu)$ — монотонная медленно меняющаяся функция. Наконец, еще одно условие применимости приближения «серой» среды связано с коэффициентами отражения границ R_1 и R_2 . Как известно, интегральный коэффициент отражения зависит не толь-

ко от свойств поверхности, но и от падающего излучения

$$R = \int_{\nu=0}^{\infty} R_{\nu} I_{\nu} d\nu \left/ \int_{\nu=0}^{\infty} I_{\nu} d\nu, \right. \quad (18)$$

поэтому применение среднего значения R эффективно лишь тогда, когда в интересующем нас спектральном диапазоне величина R_{ν} мало изменяется, так что ее можно вынести за знак интеграла в (18).

Интегрируем (1), вводя переменную $\vartheta(x) = T_1 - T(x)$ и используя безразмерные параметры

$$N = 8n^2 \sigma T_1^3 / k\lambda; \quad kx = \tau; \quad k\xi = \tau'; \quad kH = \tau_0, \quad (19)$$

с помощью (1)–(9) для неселективной среды находим (см. [7])

$$\vartheta(\tau) = \frac{Q\tau}{k\lambda} - N \cdot \Delta T \cdot F(\tau) - N \int_0^{\tau_0} \vartheta(\tau') K(\tau, \tau') d\tau', \quad (20)$$

где

$$F(\tau) = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} (1 - R_2) \sin \varphi \cos^2 \varphi \left[R_1 \exp\left(-\frac{\tau_0 + \tau}{\cos \varphi}\right) + \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau}{\cos \varphi}\right) - \right. \\ \left. - (1 + R_1) \exp\left(-\frac{\tau_0}{\cos \varphi}\right) \right] \left[1 - R_1 R_2 \exp\left(-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}\right) \right]^{-1} d\varphi, \quad (21)$$

$$K(\tau, \tau') = E_3 |\tau - \tau'| - E_3(\tau') + \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \left[R_1 \exp\left(-\frac{\tau + \tau'}{\cos \varphi}\right) + \right. \\ \left. + R_1 R_2 \exp\left(-\frac{2\tau_0 + \tau - \tau'}{\cos \varphi}\right) + R_2 \exp\left(-\frac{2\tau_0 - \tau - \tau'}{\cos \varphi}\right) + \right. \\ \left. + R_1 R_2 \exp\left(-\frac{2\tau_0 - \tau + \tau'}{\cos \varphi}\right) - R_1 \exp\left(-\frac{\tau'}{\cos \varphi}\right) - (1 + R_1) R_2 \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{2\tau_0 - \tau'}{\cos \varphi}\right) - R_1 R_2 \exp\left(-\frac{2\tau_0 + \tau'}{\cos \varphi}\right) \right] \left[1 - R_1 R_2 \exp\left(-\frac{2\tau_0}{\cos \varphi}\right) \right]^{-1} d\varphi. \quad (22)$$

Для уменьшения числа независимых переменных введем новую функцию

$$\varphi(\tau) = \vartheta(\tau) / (Q\tau_0 / k\lambda) = \vartheta(\tau) / \Delta T_0. \quad (23)$$

Величина $\Delta T_0 = QH / \lambda$ представляет собой перепад температур, который устанавливается в слое при отсутствии излучения, но при неизменных прочих условиях. Линеаризованное уравнение РКТ теперь имеет вид

$$\varphi(\tau) = \frac{\tau}{\tau_0} - N \cdot \varphi(\tau_0) F(\tau) - N \int_0^{\tau_0} \varphi(\tau') K(\tau, \tau') d\tau'. \quad (24)$$

Его решение зависит только от N , τ_0 и коэффициентов отражения границ. Если угловой зависимостью $R_1(\varphi)$ и $R_2(\varphi)$ можно пренебречь и, кроме того, границы одинаковы $R_1 = R_2 = R$, то число переменных сокращается до трех.

Линейное интегральное уравнение всегда может быть решено численными методами. Наиболее удобен метод квадратурных формул. Поскольку $\varphi(\tau_0)$ неизвестно и находится только в ходе решения, необходимо использовать формулу закрытого типа, например, формулу Маркова [23]. Тогда решение (24) сводится к решению системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^p \varphi_j \left[\delta_{ij} + N \left(\frac{\tau_0}{2} A_j K_{ij} + F_i \delta_{pj} \right) \right] = \tau_i / \tau_0 \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad (25)$$

где A_i и τ_i — коэффициенты и узлы квадратурной формулы; $K_{ij} = K(\tau_i, \tau_j)$, $F_i = F(\tau_i)$, $\varphi_j = \varphi(\tau_j)$, δ_{ij} и δ_{pj} — символы Кронеккера. Порядок формулы p может быть взят достаточно высоким, чтобы обеспечить надлежащую точность счета — в силу непрерывности $K(\tau, \tau')$ это легко достигается.

Пусть решение (24) найдено и определено значение $\varphi(\tau_0) = \varphi_m$. Тем самым определено отношение

$$\Delta T \cdot \lambda / QH = \varphi_m,$$

откуда

$$\lambda = \varphi_m (QH / \Delta T) = \lambda_{\text{эф}} \varphi_m. \quad (26)$$

Так как эффективная теплопроводность находится опытным путем по измеренным значениям Q , H и ΔT , то равенство (26) позволяет определять истинную теплопроводность λ , если известно значение φ_m для реализуемых в данном эксперименте значений τ_0 , N и R .

Рассмотрим некоторые аспекты использования соотношения (26). Если лучистая составляющая значительна, то $\lambda_{\text{эф}}$ и λ заметно разнятся, и величина $N = 8n^2 \sigma T^3 / k\lambda$ заранее неизвестна. Так как φ_m находится из решения (24), то φ_m — функция λ и точное отыскание последней возможно лишь в следующем цикле итерационного типа:

$$\lambda_i = \lambda_{\text{эф}} \varphi_m (\lambda_{i-1}). \quad (27)$$

Возникает вопрос о сходимости процесса (27). Зависимость φ_m от λ заложена в интегральном уравнении (24) и не может быть найдена в явном виде. Однако имея в распоряжении таблицу значений φ_m , полученную в результате многократного решения уравнения (24) для набора значений независимых параметров, можно вычислить производную $\frac{d\varphi_m}{d\lambda} = - \frac{d\varphi_m}{dN} \frac{N}{\lambda}$.

Процесс простых итераций типа $x_n = F(x_{n-1})$, как известно, сходится к решению уравнения $x = F(x)$, если абстрактная функция $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица [24], и, в частности, если $\|F_x'\| < 1$. В нашем случае имеем

$$|F_\lambda'| = \lambda_{\text{эф}} / \lambda \cdot d\varphi_m / dN \cdot N < 1. \quad (28)$$

Серия расчетов проведена на ЭВМ БЭСМ-4 и М-222, определены величины φ_m более чем для двухсот комбинаций параметров из области $0 < \tau_0 \leq 1$; $0,1 \leq N \leq 40$; $0 \leq R \leq 1$. Во всех случаях оказалось, что $d\varphi_m / dN \cdot N < 0,2$. Так как трудно ожидать, чтобы $\lambda_{\text{эф}}$ превышало λ более чем в два-три раза (чаще всего отличие не превосходит 30–50%), то условие (28) выполняется со значительным запасом и процесс (27) — быстро сходящийся даже при больших N .

Воспользуемся полученными результатами для анализа погрешности формулы Польца (16). После подстановки (16) в (5) в работе [19] получено равенство

$$\lambda = \lambda_{\text{эф}} - \frac{16}{3} \frac{n^2 \sigma T^3}{k} Y(\varepsilon, \tau_0),$$

которое с помощью введенного выше параметра N преобразуется к виду

$$\lambda = \lambda_{\text{эф}} / \left[1 + \frac{2}{3} N \cdot Y(\varepsilon, \tau_0) \right]. \quad (29)$$

Таким образом, результат Польца также представляется соотношением (26), но роль φ_m выполняет величина $[1 + \frac{2}{3} N \cdot Y(\varepsilon, \tau_0)]^{-1}$ (в дальнейшем обозначаемая $\varphi_{\text{П}}$). В таблице приведены значения $\varphi_{\text{П}}$ и φ_m для разных τ_0 , N и R , а также погрешность $\Delta = (\varphi_{\text{П}} - \varphi_m) / \varphi_m$, вычисленная по отношению к точному значению φ_m и представляющая собой непосредственно погрешность определения λ . Как видно, для всех τ_0 при малых N $\varphi_{\text{П}}$ очень близко к φ_m . При $N \geq 1 \div 2$ уже для $\tau_0 = 0,2$ погрешность Δ возрастает до 2–12%, а при $N = 30-40$ достигает 50–60%. Характерно, что для больших N даже при очень малой оптической толщине погрешность данных [19] составляет 15–30%. Последние столбцы таблицы показывают, что с уменьшением R погрешность величины $\varphi_{\text{П}}$ увеличивается. Выше указывалось, что приближение [19] построено на представлении (15), что равносильно замене решения уравнения (24) $\varphi(\tau)$ прямой линией. На рис. 1 показаны относительные температурные профили в слое со значительной лучистой составляющей ($N = 40$). Видно, что отклонение $\varphi(\tau)$ от прямой значительно меньше той погрешности, которую вносит замена (15) в определение φ_m и λ . Причина этого в следующем. Замена поля температур линейной функцией не только игнорирует отклонение истинного профиля от прямой линии, но вносит также ошибку в наклон этой прямой, т. е. в определение величин ΔT и $\varphi(\tau_0)$, что и оказывает решающее влияние на общую

Сопоставление результатов точного анализа РКТ с данными [19]

τ_0	0,01			0,02			0,1			0,2			0,8		
	φ_m	$\varphi_{\text{П}}$	$\Delta, \%$	φ_m	$\varphi_{\text{П}}$	$\Delta, \%$	φ_m	$\varphi_{\text{П}}$	$\Delta, \%$	φ_m	$\varphi_{\text{П}}$	$\Delta, \%$	φ_m	$\varphi_{\text{П}}$	$\Delta, \%$
R	0														
N															
0,1	0,999	0,999	0,1	0,998	0,999	0,1	0,991	0,995	0,4	0,984	0,992	0,9	0,996	0,998	0,2
0,2	0,998	0,999	0,1	0,996	0,996	0,2	0,983	0,991	0,8	0,969	0,982	1,3	0,992	0,997	0,5
0,5	0,995	0,997	0,2	0,990	0,995	0,5	0,957	0,975	1,9	0,926	0,956	3,2	0,981	0,992	1,1
1	0,990	0,995	0,5	0,981	0,990	0,9	0,918	0,953	3,8	0,863	0,919	6,5	0,963	0,984	2,2
2	0,981	0,990	0,9	0,962	0,981	2,0	0,849	0,910	7,2	0,758	0,849	12,0	0,828	0,967	4,2
5	0,963	0,975	2,3	0,911	0,954	4,8	0,693	0,801	15,6	0,556	0,692	24,4	0,839	0,924	10,1
10	0,910	0,953	4,7	0,837	0,910	8,7	0,530	0,667	25,9	0,385	0,529	37,4	0,725	0,858	18,4
20	0,836	0,911	9,0	0,719	0,835	16,8	0,350	0,501 ^{5/6}	38,8	0,239	0,360	50,7	0,573	0,752	31,3
30	0,771	0,870	12,9	0,631	0,771	22,2	0,273	0,402	47,3	0,173	0,273	58,0	0,476	0,668	40,0
40	0,717	0,823	14,8	0,562	0,716	27,4	0,220	0,334	52,0	0,136	0,220	62,0	0,409	0,603 ^v	47,5

погрешность Δ . Действительно, приближение (15) в конечном итоге влияет на подынтегральную функцию в (24), и через нее — на все элементы матрицы коэффициентов системы (25), а при больших N даже малые изменения

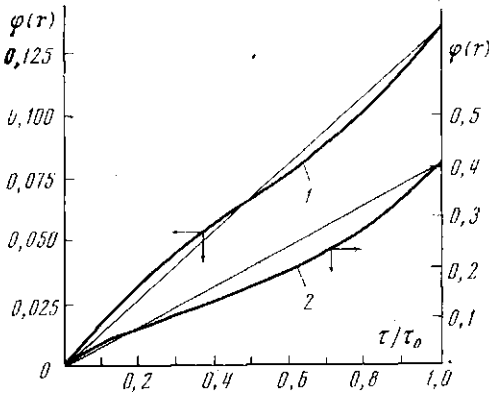


Рис. 1. Относительное температурное распределение $\varphi(\tau) = (T_1 - T(\tau)) / \Delta T_0$ в плоском слое ($\tau_0 = 0,2, N = 40$):
1 — $R = 0$; 2 — $0,8$

этой функции заметно сказываются на результате решения в каждой точке слоя, в том числе и в точке $\tau = \tau_0$.
Иногда исследование температурного поля в условиях РКТ ограничивается довольно грубыми приближениями, особенно в тех случаях, когда, как в равенстве (5), конечной целью изучения фотонной составляющей является определение среднего в слое потока лучистой энергии. При этом ссылаются на консервативность величины E по отношению к температурному профилю. Как показывает сравнение с приближенным анализом Польца, такой подход далеко не всегда может быть оправдан.

Возвращаясь к определению теплопроводности с помощью равенства (26), заметим, что оно может быть практически использовано при нали-

нии среднего в слое потока лучистой энергии. При этом ссылаются на консервативность величины E по отношению к температурному профилю. Как показывает сравнение с приближенным анализом Польца, такой подход далеко не всегда может быть оправдан.

Возвращаясь к определению теплопроводности с помощью равенства (26), заметим, что оно может быть практически использовано при нали-

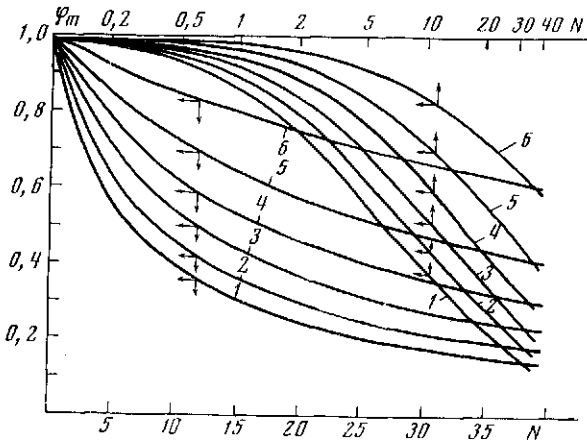


Рис. 2. Значения функции $\varphi_m(N)$ для $\tau_0 = 0,2$:
1 — $R = 0$; 2 — $0,2$; 3 — $0,4$; 4 — $0,6$; 5 — $0,8$; 6 — $1,0$

чин подробных данных о значениях функции φ_m . Так как величины τ_0, N и R , от которых зависит φ_m , могут варьироваться в очень широких пределах от опыта к опыту, то представляется целесообразным рассчитывать таблицы опорных точек, по которым можно легко построить в произвольном масштабе графики $\varphi_m(N, R)$ для ряда значений τ_0 . Пример такого семейства кривых показан на рис. 2 для оптической толщины $0,2$, причем опорными точками при построении этого графика послужили (частично) значения φ_m из таблицы. Точность вычислительного процесса по отысканию λ может быть повышена следующим приемом. Пусть значения $N_1 =$

$= f(\lambda_{\text{эф}})$, $\varphi_m(N_1)$ и производная $(d\varphi_m/dN)_N$, найдены с помощью упомянутого графика. Разлагая $\varphi_m(N)$ в ряд и учитывая быстроту сходимости итераций (27), можно переписать это равенство

$$\lambda_i = \lambda_{\text{эф}}[\varphi_m(\lambda_i) + (d\varphi_m/dN)_{N_1}(N_{i-1} - N_{i-2})] \quad (30)$$

и далее проводить вычисления, не связанные с погрешностью графической обработки. Для малых τ_0 величина $d\varphi_m/dN$ практически постоянная в

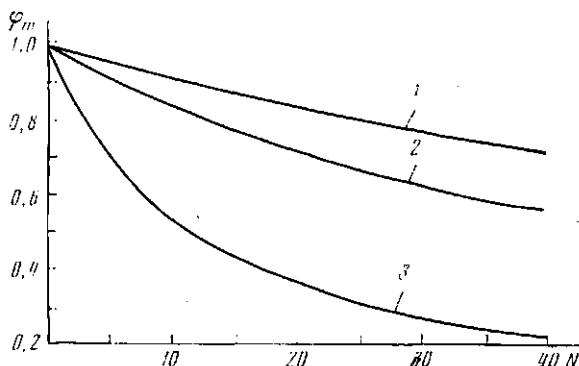


Рис. 3. Значения функции $\varphi_m(N)$ для $R = 0$:

1 — $\tau_0 = 0,01$; 2 — $0,02$; 3 — $0,1$

широком диапазоне N , но уже при $\tau_0 = 0,1$ $\varphi_m(N)$ обладает существенной кривизной (как это видно из рис. 3). Следует отметить, что при малых N нет необходимости проводить итерационный процесс (27) или (30), можно ограничиться лишь отысканием $N_1 = f(\lambda_{\text{эф}})$ и $\varphi_m(\lambda_{\text{эф}})$ для соответствующих τ_0 и R . Таблица опорных точек для функции $\varphi_m(N, R)$ в настоящее время рассчитывается для ряда значений $\tau_0 > 0,2$ путем многократного решения уравнения (26) с помощью ЭВМ. Эти расчеты проводятся для облегчения использования полученных результатов в практике теплофизического эксперимента.

Случай цилиндрического слоя и среды с селективными оптическими свойствами рассматриваются во второй части данной работы.

Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева

Поступила в редакцию
17 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Мень, О. А. Сергеев. Теплофизика высоких температур, 9, 353, 1971.
2. А. А. Мень. Тр. ВНИИМ, вып. 129 (189), 290, 1971.
3. А. А. Мень. Инж.-физ. ж., 20, № 5, 1971.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, 1959.
5. В. Н. Андрианов. В сб. Тепло- и массообмен, 2, Минск, 1965.
6. Н. А. Рубцов, П. И. Степаненко. Инж.-физ. ж., 18, № 2, 1970.
7. А. А. Мень, О. А. Сергеев. Тр. ВНИИМ, вып. 111(171), 119, 1969.
8. Л. П. Филиппов. Вестник МГУ, Серия физ.-матем. и естеств. наук, № 2, 51, 1954.
9. А. А. Мень. Автореф. канд. дис., Минск, 1970.
10. А. А. Мень. Инж.-физ. ж., 18, № 3, 1970.
11. L. Genzel. Glasstech. Ber., 26 (3), 64, 1953.
12. L. Genzel. Z. Physik, 135, 177, 1953.
13. H. Gefken. Glasstech. Ber., 25, 392, 1952.
14. F. Engelmann, H. E. Schmidt. Nucl. Sci. Eng., 24, № 4, 317, 1966.
15. А. И. Вишневецкий. Теплофизика высоких температур, 7, № 3, 1969.
16. И. А. Петров. Физика твердого тела, 13, 291, 1971.
17. Е. Д. Десяткова, И. А. Смирнов. Физика твердого тела, 2, 561, 1960.
18. И. А. Розов, А. Ф. Чудновский, В. И. Кокорина. ФТП, 1, № 7, 1968.
19. H. Poltz. Int. J. Heat Mass Transfer, 8, 515, 1965.
20. А. А. Мень, О. А. Сергеев. Инж.-физ. ж., 22, № 1, 171, 1972.
21. Л. П. Филиппов. Исследование теплопроводности жидкостей. Изд. МГУ, 1970.
22. В. В. Соколов. Курс теоретической астрофизики. «Наука», 1967.
23. В. И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. Физматгиз, 1964.
24. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. «Наука», 1968.