A. T. Nurtazin, Strong and weak constructivizations, and enumerable families, *Algebra Logika*, 1974, Volume 13, Number 3, 311–323

Алгебра и логика, 13, № 3(1974), 311-323.

УДК 517.15

СИЛЬНЫЕ И СЛАБЫЕ КОНСТРУКТИВИЗАЦИИ И ВЫЧИСЛИМЫЕ СЕМЕЙСТВА

А. Т. НУРТАЗИН

В статье вводится понятие вычислимого семейства конструктивных моделей и изучаются конструктивизации сильно конструктивизируемой модели $\mathfrak{A}$. Приводятся необходимые и достаточные условия неавтоустойчивости $\mathfrak{A}$ относительно сильных конструктивизаций и существования слабых. Определяется возможное число сильных и слабых конструктивизаций.

§ 0. Определения и обозначения

Пусть $\mathfrak{A}=\langle A,\sigma\rangle$ - счетная модель языка σ и $\sigma\cap N=\emptyset$. Отображение ν множества N натуральных чисел на A называется нумерацией модели $\mathfrak{A}$, а пара $(\mathfrak{A},\nu)$ - нумерованной моделью. Если $(\mathfrak{A},\nu)$ - нумерованная модель, то $\mathfrak{A}_\nu$ - модель, полученная из $\mathfrak{A}$ добавлением в ее сигнатуру всех натуральных чисел, которые при этом интерепретируются посредством нумерации ν. Нумерованная модель $(\mathfrak{A},\nu)$ конструктивна, если вычислимо множество $D(\mathfrak{A}_\nu)$ всех атомных и отрицаний атомных предложений, истинных в модели $\mathfrak{A}_\nu$, и сильно конструктивна, если вычислима $Th(\mathfrak{A}_\nu)$ теория модели $\mathfrak{A}_\nu$. В этих случаях ν называется конструктивизацией и сильной конструктивизацией. Конструктивизацию, не являющуюся сильной, будем называть слабой. Конструктивизации ν_1 и ν_2 модели $\mathfrak{A}$ автоэквивалентны, если существует автоморфизм Θ модели $\mathfrak{A}$ и о.р.ф. f такие, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle\nu_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\nu_2} \\ \mathfrak{A} & \xrightarrow{\theta} & \mathfrak{A} \end{array}$$

Пусть K - некоторый класс конструктивизаций модели $\mathfrak{A}$. Модель $\mathfrak{A}$ автоустойчива относительно K, если любые две конструктивизации из

K автоэквивалентны. По-видимому, автоэквивалентные нумерации с точки зрения теории конструктивных моделей не следует считать различными, так же как в обычной теории моделей не различаются изоморфные модели.

Если задан произвольный класс $\mathcal{R}$ конструктивных моделей сигнатуры σ, то может быть интересным вопрос о возможности задания этого класса при помощи единого эффективного процесса. В этом случае $\mathcal{R}$ называется вычислимым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс $\mathcal{R}$ (сильно) вычислим, если существует о.р.ф. $f(x,y)$ такая, что для каждого фиксированного x_0 функция $f(x_0,y)$ вычисляет $(Th(\mathfrak{A}_\nu)) D(\mathfrak{A}_\nu)$, где $(\mathfrak{A},\nu)$ автоэквивалентна некоторой модели семейства $\mathcal{R}$ и для каждой модели из $\mathcal{R}$ существует соответствующее x_0.

Это определение можно специализировать несколькими путями. Например, если $\mathcal{R}$ задан эффективно и заиндексирован натуральными числами, то можно потребовать, чтобы было эффективным нахождение по x_0 индекса соответствующей модели, и наоборот. Обычное диагональное рассуждение показывает, что класс всех конструктивных моделей данной бесконечной сигнатуры невычислим. Некоторые свойства сильно вычислимых классов получены в первой теореме.

Всюду в дальнейшем $(\mathfrak{A},\mu)$ сильно конструктивна (с.к.), $\mu(n)=a_n$, $T=Th(\mathfrak{A})$ и f_s – одноместная ч.р.ф. номера s, а f_s^t – её часть, вычисленная к шагу t; $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ – гёделевская последовательность всех предложений языка $\sigma \cup N$; m, n, i, p, q, r, s – натуральные числа; x, y – переменные; $\overline{m}_{(i)}$, $\overline{a}_{(i)}$ и $\overline{x}_{(i)}$ ($\overline{n}_{(i)}$, $\overline{b}_{(i)}$ и $\overline{y}_{(i)}$) – конечные последовательности натуральных чисел, элементов модели $\mathfrak{A}$ и переменных одинаковой длины; $i: N \to N$ – тождественное отображение.

§ 1. Сильные конструктивизации

Теорема этого параграфа дает необходимые и достаточные условия существования неавтоэквивалентных сильных конструктивизаций данной модели $\mathfrak{A}$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $(\mathfrak{A},\mu)$ – сильно конструктивная модель полной теории T. Тогда эквивалентны следующие ус-*

ловия:

(1) $\mathfrak{A}$ не автоустойчива относительно сильных конструктивизаций;

(2) не существует конечной последовательности $\bar{a}_0$ элементов модели $\mathfrak{A}$ такой, что $\mathfrak{A}$ - простая модель $T(\bar{a}_0)$ и семейство множеств атомов булевых алгебр $F_n(T(\bar{a}_0))$ вычислимо;

(3) существует сильно вычислимое семейство моделей $(\mathfrak{A},\mu_0),\ldots,(\mathfrak{A},\mu_s),\ldots$ члены которого попарно элементарно конструктивно невложимы друг в друга;

(4) не существует сильно вычислимого семейства моделей сигнатуры σ, содержащего все сильные конструктивизации модели $\mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, (3) $\longrightarrow$ (1),

(4) $\longrightarrow$ (1) и

(1) $\longrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ $\neg$ (2) $\longrightarrow$ $\neg$ (1).

Докажем $\neg$ (2) $\longrightarrow$ $\neg$(1). Пусть для $\bar{a}_0$ $\mathfrak{A}$ является простой моделью $T(\bar{a}_0)$ и семейство множеств атомов алгебр $F_n(T(\bar{a}_0))$ вычислимо. Для доказательства достаточно по двум простым моделям $T(\bar{a}_0)$ $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ с основным множеством N таким, что $(\mathfrak{N}_1, i)$ и $(\mathfrak{N}_2, i)$ с.к. модели, уметь строить общерекурсивное элементарное отображение $f:\mathfrak{N}_1 \xrightarrow{\text{на}} \mathfrak{N}_2$. Временно обозначим: $[\bar{m}]_i$ - атом алгебры $F_n(T(\bar{a}_0))$, которому удовлетворяет последовательность $\bar{m}$ длины n в модели $\mathfrak{N}_i$ (находится эффективно по допущению). Определим $f=\{<m_0,n_0>,\ldots,<m_t,n_t>,\ldots\}$. По теореме Воота [7], f - изоморфизм, если для любого t $[<m_0,\ldots,m_t>]_1=[<n_0,\ldots,n_t]_2$. По индукции положим: $m_{2t}=\min(N\setminus\{m_0,\ldots,m_{2t-1}\})$ и

$$n_{2t}=\min\{n:[<m_0,\ldots,m_{2t}>]_1=[<n_0,\ldots,n_{2t-1},n>]_2\};$$

$$n_{2t+1}=\min(N\setminus\{n_0,\ldots,n_{2t}\})$$

и

$$m_{2t+1} = \min\{m : [\langle m_0,\dots,m_{2t},m\rangle]_1 = [\langle n_0,\dots,n_{2t+1}\rangle]_2 .$$

Нахождение n_{2t} и m_{2t+1} эффективно, так как $(\mathfrak{N}_1,i)$ и $(\mathfrak{N}_2,i)$ сильно конструктивны. Очевидно, f отображает N на N.

(2) $\longrightarrow$ (3). Шагами по t определим индуктивный процесс. На шаге $t+1$ строим конечные нумерации $\mu_0^{t+1},\dots,\mu_t^{t+1}$ и конечные множества $T_0^{t+1},\dots,T_t^{t+1}$ предложений языка $\sigma \cup N$. Кроме того, для $s \leq t$ некоторые μ_s^t номера отмечаются тройками $\langle p_0,q_0,r_0\rangle,\dots,\langle p_t,q_t,r_t\rangle$ из упорядоченного по типу ω множества всех троек натуральных чисел, где $p_i \neq q$. Процесс будет обладать свойствами 1°–8°:

1°. Тройка $\langle p,q,r\rangle$ на шаге t может отмечать некоторые μ_p^t и некоторые μ_q^t номера.

2°. Если $T_p^t = T_p^t(\bar m)$, то μ_p^t определена на числах из $\bar m$ и $\mathfrak{A}^p \models \&[T_p^t(\mu_p^t(\bar m))]$.

3°. Если на шаге t тройка $\langle p,q,r\rangle$ стоит, то среди отмечаемых ею μ_p^t и μ_q^t номеров найдутся последовательности $\bar m$ и $\bar n$ такие, что для некоторой формулы $\varphi(\bar x)$ языка σ выполняется

$$\neg\varphi(\bar m) \in T_p^t, \quad \varphi(\bar n) \in T_q^t \quad \text{и} \quad f_r^t : \bar m \longrightarrow \bar n .$$

Итак, f_r не будет в дальнейшем определять элементарное вложение $(\mathfrak{A},\mu_p)$ в $(\mathfrak{A},\mu_q)$.

Зафиксируем шаг t, нумерацию μ_p^t и множество предложений $T_p^t = T_p^t(\bar m_0,\bar m_1,\bar m_2)$. Пусть $\mu_p^t : \bar m_0 \longrightarrow \bar a_0$. Типом последовательности $\bar m_1$ в μ_p^t относительно $\bar m_0$ называется формула $\Phi(\bar a_0,\bar x_1) = \exists \bar x_2 [\& [T_p^t(\bar a_0,\bar x_1,\bar x_2)]]$ языка $\sigma \cup \bar a_0$. Если на шаге t тройка $\langle p,q,r\rangle$ не установлена и f_r^t определена на числах из $\bar m_0$ и $\bar m_1$, где $\bar m_0$ состоит из всех μ_p^t номеров, отмеченных меньшими тройками, и предложение $\varphi(\bar m_0,\bar m_1,\bar m_2)$ таково, что

$$T(\bar a_0) \vdash \exists \bar x_1 \bar x_2 [\& T_p^t(\bar a_0,\bar x_1,\bar x_2) \,\&\, \varphi(\bar a_0,\bar x_1,\bar x_2)],$$

то определим действие φ на тройку $\langle p,q,r\rangle$ в μ_p^t:

1. φ устанавливает в μ_p^t тройку $\langle p,q,r\rangle$, если $\varphi = \varphi(\bar m_0,\bar m_1)$;

$$T(\bar a_0) \vdash \exists \bar x_1 \bar x_2 [\& T_p^t(\bar a_0,\bar x_1,\bar x_2) \,\&\, \varphi(\bar a_0,\bar x_1)]$$

и

$$T(\bar{a}_0) \vdash \exists \bar{x}_1 \bar{x}_2 [\& T_p^t (\bar{a}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) \& \neg \varphi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)].$$

2. φ в μ_p^t не влияет на тройку $\langle p,q,r\rangle$, если

$$T(\bar{a}_0) \vdash \exists \bar{x}_2 [\& T_p^t (\bar{a}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)] \to \exists \bar{x}_2 [\& T_p^t (\bar{a}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) \& \varphi(\bar{a}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)].$$

3. φ в μ_p^t влияет на $\langle p,q,r\rangle$, если не выполняется 2. Понятно, что если $\varphi(\bar{m}_0, \bar{m}_1, \bar{m}_2)$ влияет на $\langle p,q,r\rangle$, то $\exists \bar{x}_2 [\& T(\bar{m}_0, \bar{m}_1, \bar{x}_2) \& \& \varphi(\bar{m}_0, \bar{m}_1, \bar{x}_2)]$ устанавливает $\langle p,q,r\rangle$ и если φ устанавливает $\langle p,q,r\rangle$, то и $\neg\varphi$ устанавливает $\langle p,q,r\rangle$.

Индуктивное определение. Шаг $t+1$. Для $s \leqslant t$ определим сначала нумерации $\mu_s^{t'}$, тогда $\mu_s^{t+1} = \mu_s^{t'} \cup \{\langle m_s, a_{n_s}\rangle\}$, где $m_s = \min\{m : m$ не является $\mu_s^{t'}$ номером$\}$ и $n_s = \min\{n : a_n$ не имеет $\mu_s^{t'}$ номера$\}$.

Пусть $\varphi_{\langle t\rangle_1^3} = \varphi(\bar{m})$ и $\langle t\rangle_2^3 = p$. Поступаем по-разному в следующих случаях:

1. $\varphi(\bar{m})$ в μ_p^t устанавливает тройку $\langle p,q,r\rangle$ из множества первых t троек и не влияет на меньшие тройки;

$$f_r^t : \bar{m} \to \bar{n} \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} \models \varphi(\mu_q^t(\bar{n})) \quad , \text{ и } \quad \varphi(\bar{n}) \quad \text{в } \mu_q^t$$

не влияет ни на одну из троек меньших, чем $\langle p,q,r\rangle$.

В этом случае полагаем

$$T_p^{t+1} = T_p^t \cup \{\neg \varphi(\bar{m})\} \qquad \text{и} \quad T_q^{t+1} = T_q^t \cup \{\varphi(\bar{n})\};$$

нумерация $\mu_p^{t'}$ на $\bar{m}_0$ совпадает с μ_p^t, а на $\bar{m}_1 \wedge \bar{m}_2$ такова, что $\mathfrak{A} \models \& T_p^{t+1}(\mu_p^{t'}(\bar{m}))$. Кроме того, все элементы из $\mathfrak{A}$, потерявшие при такой перенумерации свои μ_p^t номера снабжаются новыми $\mu_p^{t'}$ номерами. Для $s \neq p$ имеем $\mu_p^{t'} = \mu_s^t$.

Все μ_p^{t+1} и μ_q^{t+1} номера отмечаются тройкой $\langle p,q,r\rangle$.

2. $\mathfrak{A} \models \varphi(\mu_p^t(\bar{m}))$ и $\varphi(\bar{m})$ в μ_p^t не влияет ни на одну из первых t троек.

Полагаем

$$T_p^{t+1} = T_p^t \cup \{\varphi(\bar{m})\}.$$

3. В любом другом случае $\mu_s^{t'} = \mu_s^t$, $T_s^{t+1} = T_s^t$ и никакие новые тройки не устанавливаются. Определение закончено.

Очевидно, для любого s и t имеем $T_s^t \subseteq T_s^{t+1}$. Положим $T_s = \bigcup_t T_s^t$. Свойства 1° – 3° проверяются непосредственно.

Из индуктивного определения следует, что в нашей конструкции каждый элемент модели $\mathfrak{A}$ получает некоторый μ_s^t -номер и каждое натуральное число становится μ_s^t номером. Более того,

4°. Для любых m_0, a_1 и s существуют шаг t', элемент a_{n_0} и число m_1 такие, что для $t \geq t'$:

$$\mu_s^t(m_0) = a_{n_0} \Leftarrow \mu_s(m_0),$$

$$\mu_s^t(m_1) = a_{n_1} = \mu_s(m_1).$$

Действительно, если $\mu_s^t(m_0) \neq \mu_s^{t+1}(m_0)$ и на шаге t μ_s^t -номер m не был отмечен, то на шаге $t+1$ он отмечается; если же на шаге t m_0 уже отмечался, то на шаге $t+1$ он отмечается тройкой меньшей, чем все тройки, отмечавшие его на шаге t. Такое возможно лишь конечное число раз. И если μ_s^t и μ_s^{t+1} - номера элемента a_{n_1} -различны, то возникает аналогичная ситуация.

5°. Для каждого i существует шаг t_i, начиная с которого, новые тройки из множества $\{\langle p_0, q_0, z_0\rangle, \ldots, \langle p_i, q_i, z_i\rangle\}$ не устанавливаются.

6°. Если на шаге t предложение ψ устанавливает в μ_p^t тройку $\langle p, q, z\rangle$, то на некотором шаге $t'(\geq t)$ действительно ставится тройка, меньшая или равная $\langle p, q, z\rangle$.

Доказательство ведется индукцией по величине тройки $\langle p, q, z\rangle$. Действительно, на достаточно большом шаге, если в качестве φ взять предложение ψ или его отрицание, то возникнет случай 1 индуктивного определения. В противном случае на этом шаге найдется предложение, устанавливающее строго меньшую тройку, и применима индукция.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если на шаге t_i тройка $\langle p_i, q_i, z_i\rangle$ не установлена, а функция $f_{z_i}^{t_i}$ определена на $\mu_{p_i}^{t_i}$ номерах из $\bar{m}_0$, отмеченных меньшими тройками, то на нее не может влиять никакое предложение. Начиная с шага t_i, последовательность $\bar{m}_0$ состоит из $\mu_{p_i}^t$ номеров одной и той же последовательности элементов $\bar{a}_0$. Если для $t'(\geq t_i)$ функция $f_{z_i}^{t'}$ будет определена на $\mu_{p_i}^t$ номерах из последовательности длины k и $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_0 \cap \bar{m}_1 = \emptyset$, то тип $\bar{m}_1$ относительно $\bar{m}_0$ в

$\mu_p^{t'}$ является атомом $F_K(T(\bar{a}_0))$.

7°. Если функция f_{z_i} общерекурсивна, то на шаге t_i тройка $\langle p_i, q_i, z_i \rangle$ стоит.

Доказательство от противного.

Допустим, что на шаге t_i тройка $\langle p_i, q_i, z_i \rangle$ ничего не отмечает, и пусть функция $f_{z_i}^{t_i}$ определена на $\mu_{p_i}^{t_i}$ номерах из $\bar{m}_0$, отмеченных меньшими тройками. Возможны два случая:

а) Существует последовательность элементов модели $\mathfrak{A}$ $\bar{a}_1$, порождающая неглавный тип над $\bar{a}_0$.

По свойству 4°, с некоторого шага $t'(\geq t_i)$ a_1 имеет постоянную последовательность $\mu_{p_i}^t$ номеров $\bar{m}_1$ и функция $f_{z_i}^t$ определена на числах из $\bar{m}_1$. По предыдущему замечанию, последовательность $\bar{m}_1$ относительно $\bar{m}_0$ в $\mu_{p_i}^{t'}$ имеет определенный тип $\Phi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$, который должен быть атомом. Противоречие.

б) Семейство множеств атомов алгебр $F_n(T(\bar{a}))$ невычислимо.

Пусть $\varphi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$ – произвольная, совместная с $T(\bar{a}_0)$ формула языка $\mathfrak{S} \cup \bar{a}_0$, которая не удовлетворяется последовательностями, содержащими элементы из $\bar{a}_0$ и $\bar{x}_1$ длины K. Пользуясь индукцией, начиная с шага t_i, узнаем, является ли $\varphi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$ атомом алгебры $F_K(T(\bar{a}_0))$. В модели $\mathfrak{A}$ имеется последовательность элементов a_1 такая, что

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}_0, \bar{a}_1).$$

Найдется шаг $t'(>t_i)$, для которого $\bar{a}_1$ имеет $\mu_{p_i}^t$ номера из $\bar{m}_1$, и $\bar{m}_0$ и $\bar{m}_1$ входят в область определения функции $f_{z_i}^{t'}$. По предыдущему замечанию, тип $\bar{m}_1$ относительно $\bar{m}_0$ в $\mu_{p_i}^{t'}$ является атомом, совместным с $\varphi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$. Таким образом, продолжая процесс с шага t_i, мы можем дождаться шага t, на котором тип некоторой последовательности $\mu_{p_i}^t$ номеров, входящих в область определения функции $f_{z_i}^t$, относительно $\bar{m}_0$ в $\mu_{p_i}^t$ совместен с формулой $\varphi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$, и сравнить их. Если они совпадут, то $\varphi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$ – атом $F_K(T(\bar{a}_0))$. Таким образом, семейство множеств атомов алгебр $F_n(T(\bar{a}_0))$ вычислимо. Противоречие.

Так как на каждом шаге может устанавливаться не более одной тройки, то по 7° любая последовательность μ_p^t номеров для некоторого i отмечается некоторой тройкой $\langle p_i, q_i, r_i \rangle$.

8°. Пусть $\mu_{p_i} : \overline{m} \to \overline{a}$ и $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$. Тогда $\varphi(\overline{m}) \in T$. Найдется шаг $t' \ (\geq t_i)$ такой, что $\mu_p^{t'}(\overline{m}) = \overline{a}$ и $\varphi(\overline{m}) = \varphi_{\langle t \rangle_1^3}$. По определению 5° шага t_i, $\varphi(\overline{m})$ не может влиять в $\mu_{p_i}^{t'}$ на тройки $\langle p_i, q, r \rangle$. То есть имеет место случай 2 индуктивного определения и $\varphi(\overline{m}) \in T_{p_i}^{t'+1}$.

Из свойства 4° следует, что все μ_p являются нумерациями модели $\mathfrak{A}$. Они сильно конструктивны в силу 8°. Из 7° следует, что все модели $(\mathfrak{A}, \mu_0), \ldots, (\mathfrak{A}, \mu_p), \ldots$ попарно элементарно конструктивно не вложимы друг в друга.

(2) $\longrightarrow$ (4). Доказательство от противного.

Пусть имеется сильно вычислимое семейство, содержащее все сильные конструктивизации модели $\mathfrak{A}$. Индуктивный процесс из доказательства (2) $\longrightarrow$ (3) можно определить так, что для $p \neq 0$ вычисляются сильные конструктивизации нашего семейства. Тогда для $p = 0$ вычисляется сильная конструктивизация модели $\mathfrak{A}$, не эквивалентная ни одной из конструктивизаций этого семейства. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Сильно конструктивизируемая модель $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда автоустойчива относительно сильных конструктивизаций, когда для некоторой последовательности $\overline{a}$ элементов из $\mathfrak{A}$ система $\mathfrak{A}$ является простой моделью $Th(\mathfrak{A}, \overline{a})$ и семейство множеств атомов алгебр $F_n(Th(\mathfrak{A}, \overline{a}))$ вычислимо.*

ПРИМЕР 1. Если $\mathfrak{A}$ насыщена над конечными множествами, $Th(\mathfrak{A})$ не K_0-категорична и $\mathfrak{A}$ сильно конструктивизируема, то $\mathfrak{A}$ имеет бесконечно много сильных конструктивизаций.

ПРИМЕР $1'$ [6]. Счетная ненасыщенна модель разрешимой K_1, $\neg K_0$-категоричной теории имеет бесконечно много сильных конструктивизаций.

ПРИМЕР $1''$. (А. И. Мальцев [4]). Полная абелева группа без кручения конечного ранга автоустойчива, а бесконечного – не автоустойчива.

ПРИМЕР 2. (Е. А. Палютин, М. Г. Перетятькин). Если T разрешима и K_0 категорична, то семейство множеств атомов алгебр $F_n(T)$ невычислимо тогда и только тогда, когда функция $f(n) = |F_n(T)|$ не общерекурсивна. Примеры таких теорий были независимо построены Е. А. Палютиным и М. Г. Перетятькиным. По теореме 1 счетные модели этих теорий допускают бесконечно много сильных конструктивизаций.

§ 2. Слабые конструктивизации

Известно [1], что конструктивная модель полной модельно полной разрешимой теории сильно конструктивна.

ЛЕММА. Если для некоторой конечной последовательности $\bar{a}_0$ элементов из $\mathfrak{A}$ теория $Th(\mathfrak{A}, \bar{a}_0)$ разрешима и для произвольной последовательности $\bar{a}_1$ любая выполнимая на $\bar{a}_1$ формула $\varphi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$ следует из некоторой выполнимой на $\bar{a}_1$ $\exists$-формулы $\psi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$, то каждая конструктивизация ν модели $\mathfrak{A}$ будет сильной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам достаточно для произвольной формулы $\varphi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$ и последовательности чисел $\bar{m}_1$ узнать, верно ли $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}_0, \nu(\bar{m}_1))$? В силу конструктивности нумерации ν мы можем эффективно перечислять все $\exists$-формулы теории $T(\bar{a}_0)$, выполняющиеся на последовательности $\nu(\bar{m}_1)$. Используя разрешимость $T(\bar{a}_0)$, можно эффективно перечислять и все их следствия, среди которых, по предложению, обязательно встретится $\varphi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$ или $\neg\varphi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$. Это дает разрешающую процедуру для $Th(\mathfrak{A}_\nu)$.

ТЕОРЕМА 2. Для сильно конструктивной модели $(\mathfrak{A}, \mu)$ эквивалентны следующие условия:

(1) $\mathfrak{A}$ имеет слабую конструктивизацию;

(2) $\mathfrak{A}$ не удовлетворяет условиям леммы;

(3) существует счетное вычислимое семейство слабо конструктивных моделей $(\mathfrak{A}, \nu_0), \dots, (\mathfrak{A}, \nu_p), \dots$ члены которо-

го попарно элементарно конструктивно невложимы друг в друга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (3) $\longrightarrow$ (1). Очевидно.

(1) $\longrightarrow$ (2) Допускаем противное и используем лемму.

(2) $\longrightarrow$ (3). Индукцией по t определим эффективный процесс, в ходе которого на каждом шаге t определяются конечные нумерации модели $\mathfrak{A}$ $\nu_0^t, \ldots, \nu_s^t, \ldots$ и соответствующие диаграммы $\mathcal{D}_0^t, \ldots$ $\ldots, \mathcal{D}_s^t, \ldots$, т.е. если $\varphi(\overline{m})$ - атомное или отрицание атомного предложения языка $\mathfrak{S} \cup N$, то $\varphi(\overline{m}) \in \mathcal{D}_s^t \Longleftrightarrow$ числа из $\overline{m}$ являются ν_s^t номерами и $\mathfrak{A} \models \varphi(\nu_s^t(\overline{m}))$. Упорядочим по типу ω множество всех пар $\langle p, r \rangle$ и троек $\langle p, q, r \rangle$ $(p \neq q)$ натуральных чисел и поставим им в однозначное соответствие метки $\boxed{0} < \ldots < \boxed{i} < \ldots$. Определяемый процесс будет обладать свойствами 1°–6°.

1°. Для любых s и t верно $\mathcal{D}_s^t \subseteq \mathcal{D}_s^{t+1}$.

2°. На шаге t метка, соответствующая паре $\langle p, r \rangle$, может отмечать некоторые ν_p^t номера. В этом случае найдется предложение языка $\mathfrak{S} \cup N$ $\varphi_k(\overline{m})$ такое, что все числа из $\overline{m}$ отмечены этой меткой, $f_r^t(k) = 0$, но

$$\mathfrak{A} \models \neg \varphi(\nu_p^t(\overline{m})).$$

Итак, функция f_r не будет характеристической функцией $Th(\mathfrak{A}_{\nu_p})$, если ν_p на $\overline{m}$ совпадет с ν_p^t.

3°. На шаге t метка, соответствующая тройке $\langle p, q, r \rangle$, может (причем только одновременно) отмечать некоторые ν_p^t и ν_q^t номера. В этом случае среди отмечаемых ею ν_p^t и ν_q^t номеров найдутся последовательности $\overline{m}$ и $\overline{n}$ и формула $\varphi(\overline{x})$ языка $\mathfrak{S}$ такие, что

$$f_r^t : \overline{m} \longrightarrow \overline{n};$$

$$\mathfrak{A} \models \neg \varphi(\nu_p^t(\overline{m}));$$

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\nu_q^t(\overline{n})).$$

То есть функция f_r не будет определять элементарное вложение модели $(\mathfrak{A}, \nu_p)$ в $(\mathfrak{A}, \nu_q)$, если ν_p и ν_q на $\overline{m}$ и ν_q совпадут с ν_p^t и ν_q^t.

ИНДУКТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ШАГ 0. Для любого s верно $\nu_s^0 = \phi$ и $\mathcal{D}_s^0 = \phi$.

ШАГ $t+1$. Для любого $s \neq \langle t \rangle_1 = p$ имеем $\nu_s^{t+1} = \nu_s^t$ и $\mathcal{D}_s^{t+1} = \mathcal{D}_s^t$.

Прежде чем определить нумерацию ν^{t+1} и расставить метки, зададим нумерацию $\nu_p^{t'}$. Тогда $\nu_p^{t+1} = \nu_p^{t'p} \cup \{\langle m_0, a_{n_0}\rangle\}$, где $m_0 = \min \{m : m$ не является $\nu_p^{t'}$ номером$\}$ и $n_0 = \min\{n : a_n$ не имеет $\nu_p^{t'}$ номера$\}$, а $\mathcal{D}_p^{t+1}$ соответствует ν_p^{t+1}. Если метка $\boxed{\langle t\rangle_2^4}$ не стоит на шаге t, все ν_p^t номера, отмеченные меньшими метками, входят в $\overline{m}_0$ и $\nu_p^t : \overline{m}_0 \longrightarrow \overline{a}_0$; $\mathcal{D}_p^t = \mathcal{D}(\overline{m}_0, \overline{m}_1)$, $\varphi_{\langle t\rangle_3^4} = \varphi(\overline{m}_0, \overline{m}_1)$, $\mathfrak{A} \models \varphi(\nu_p^t(\overline{m}_0 \wedge \overline{m}_1))$ и с $T(\overline{a}_0)$ совместна формула

$$\neg\varphi(\overline{a}_0, \overline{x}_1) \mathbin{\&} [\&\mathcal{D}(\overline{a}_0, \overline{x}_1)],$$

то проверяем следующие условия:

А. Метка $\boxed{\langle t\rangle_2^4}$ соответствует паре $\langle p, r\rangle$

и

1. $f_r^t(\langle t\rangle_3^4) = 0$

или

2. $f_r^t(\langle t\rangle_3^4) \neq 0$.

Б. Метка $\boxed{\langle t\rangle_2^4}$ соответствует тройке $\langle p, q, r\rangle$, $f_r^t : \overline{m}_0^\wedge \overline{m}_1 \to \overline{n}_0^\wedge \overline{n}_1$

и

1. $\mathfrak{A} \models \varphi(\nu_q^{t+1}(\overline{n}_0^\wedge \overline{n}_1))$

или

2. $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\nu_q^{t+1}(\overline{n}_0 \wedge \overline{n}_1))$.

Если выполняется А, 1 или Б, 1, то нумерация $\nu_p^{t'}$ на $\overline{m}_0$ совпадает с ν_p^t, а на $\overline{m}_1$ такова, что

$$\mathfrak{A} \models \neg\varphi(\nu_p^{t'}(\overline{m}_0 \wedge \overline{m}_1)) \mathbin{\&} [\&\mathcal{D}(\nu_p^{t'}(\overline{m}_0^\wedge \overline{m}_1))].$$

Кроме того, все элементы из $\mathfrak{A}$, потерявшие в результате такой нумерации свои ν_p^t номера, снабжаются новыми $\nu_p^{t'}$ номерами.

Все ν_p^{t+1} номера в случае A и все ν_p^{t+1} и ν_q^{t+1} номера в случае Б отмечаются меткой $\boxed{\langle t\rangle_2^4}$, а все большие метки снимаются. Во всех остальных случаях $\nu_p^{t'} = \nu_p^t$ и все метки остаются на прежних местах. Определение закончено.

Свойства 1° – 3° вытекают непосредственно из индуктивного определения. Свойства 4° и 5° вполне аналогичны свойствам из доказательства первой теоремы.

4°. Для любых натуральных чисел m_0, n_1 и p найдется достаточно далекий шаг t' и числа n_0 и m_1 такие, что для любого $t > t'$

$$\nu_p^t(m_0) = \nu_p^{t'}(m_0) = a_{n_0} \leftrightarrows \nu_p(m_0)$$

и

$$\nu_q^t(m_1) = \nu_q^t(m_1) = a_{n_1} = \nu_q(m_1).$$

5°. Для любого i найдется шаг t_i, на котором все метки $\boxed{0}$, ..., $\boxed{i-1}$, $\boxed{i}$ стабилизируются.

6°. Пусть метка i соответствует а) паре $\langle p, r\rangle$, б) тройке $\langle p, q, r\rangle$ и f_r общерекурсивна. Тогда на шаге t_i метка $\boxed{i}$ стоит. Допустим, что на шаге t_i метка $\boxed{i}$ ничего не отмечает, и пусть $\overline{m}_0$ - $\mu_p^{t_i}$ -номера, отмеченные на шаге t_i метками, меньшими $\boxed{i}$. По - нятно, что для $t > t_i$ верно $\nu_p^t(\overline{m}_0) = \nu_p(\overline{m}_0) = \overline{a}_0$. По предположению, найдется формула $\varphi(\overline{a}_0, \overline{x}_1)$, совместная с $T(\overline{a}_0)$, и последова - тельность $\overline{a}_1$ элементов модели $\mathfrak{A}$ такие, что $\varphi(\overline{a}_0, \overline{x}_1)$ истинна на $\overline{a}_1$ и не следует ни из какой $\exists$ -формулы, истинной на $\overline{a}_1$. Для некоторого достаточно далекого шага $t'(> t_i)$ и последовательности натуральных чисел $\overline{m}_1$ имеем:

$$\nu_p^t : \overline{m}_1 \to \overline{a}_1;$$
$$\langle t'\rangle_1^4 = p;$$
$$\varphi_{\langle t\rangle_3^4} = \varphi(\overline{m}_0, \overline{n}_1)$$

и

$$\langle t\rangle_3^4 = i \quad .$$

В силу общерекурсивности функции f_r можно также в случае а) считать, что $f_r^{t'}$ определена на $\langle t\rangle_3^4$, а в случае б), что $f_r^t : \overline{m}_0 \wedge \overline{m}_1 \to$ $\to \overline{n}_0 \wedge \overline{n}_1$ и все числа из $\overline{n}_0 \wedge \overline{n}_1$ являются ν_q^t -номерами. По ин - дуктивному определению шага $t+1$, метка $\boxed{i}$ должна стоять на шаге $t'+1$. Противоречие.

Наконец, из свойства 4° следует, что для любого p ν_p -нумерация модели $\mathfrak{A}$, конструктивная в силу 1°. Из свойства 6° следует, что все модели $(\mathfrak{A}, \nu_0), \ldots, (\mathfrak{A}, \nu_p), \ldots$ слабо конструктивны и попарно элементарно конструктивно не вложимы друг в друга. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Сильно конструктивизируемая модель $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда не имеет слабых конструктивизаций, когда существует конечная последовательность $\overline{a}_0$ элементов из $\mathfrak{A}$ такая, что для любых $\bar{a}_1$ и $\varphi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$, если $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}_0, \bar{a}_1)$, то существует $\exists$ - формула $\psi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$ такая, что $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}_0, \bar{a}_1)$ и $T(\mathfrak{A}, \bar{a}_0) \vdash \psi(\bar{a}_0, \bar{x}_1) \longrightarrow \varphi(\bar{a}_0, \bar{x}_1)$.

ПРИМЕР 3. Если в предыдущем следствии $Th(\mathfrak{A}, \bar{a}_0)$ $\aleph_0$ -категорична, то она оказывается и модельно полной.

ПРИМЕР 4. В [5] построена модель, теория которой категорична во всех мощностях. Можно проверить, что она автоустойчива относительно сильных конструктивизаций, но по предыдущему примеру имеет бесконечно много слабых.

Литература

1. Ю. Л. ЕРШОВ, Конструктивные модели, В сб. "Избранные вопросы алгебры и логики", Новосибирск, 1973, 111-130.

2. А. И. МАЛЬЦЕВ, Алгоритмы и рекурсивные функции, Наука, 1965.

3. А. И. МАЛЬЦЕВ, Конструктивные алгебры, УМН, 16, № 3 (1961), 3-60.

4. А. И. МАЛЬЦЕВ, О рекурсивных абелевых группах, ДАН, 146, № 5 (1962), 1009-1012.

5. А. Т. НУРТАЗИН, Категоричная теория без главных модельно полных расширений, Алгебра и логика, 12, № 3 (1973), 360.

6. L.A.HARRINGTON, Structures with rec.presentation, Notes. Amer. Math.Soc.,18, N 5 (1971), 826.

7. R.L.VAUGHT, Denumerable models of complete theories, Infinistic methods, Proc.Symp.Foundations of Mathematics, Warszawa, 1961, 303-321.

Поступило 9 апреля 1974 г.