А. В. Кравченко, Сложность решеток квазимногообразий для многообразий унарных алгебр, *Матем. тр.*, 2001, том 4, номер 2, 113–127

УДК 512.57

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2001, том 4, № 2, 113–127

СЛОЖНОСТЬ РЕШЕТОК КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ УНАРНЫХ АЛГЕБР

А. В. Кравченко

С помощью достаточных условий $\mathcal{Q}$-универсальности, установленных в [1, 6], мы показываем, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ существует минимальное $\mathcal{Q}$-универсальное многообразие унарных алгебр с n основными операциями.

Ключевые слова и фразы: многообразие, $\mathcal{Q}$-универсальное квазимногообразие, унарная алгебра.

Для любого квазимногообразия $\mathbf{K}$ через $\mathrm{L}_q(\mathbf{K})$ обозначается решетка подквазимногообразий $\mathbf{K}$ относительно включения. Квазимногообразие $\mathbf{K}$ алгебраических систем конечной сигнатуры называется *$\mathcal{Q}$-универсальным*, если для любого квазимногообразия $\mathbf{K}'$ алгебраических систем конечной сигнатуры решетка $\mathrm{L}_q(\mathbf{K}')$ является гомоморфным образом некоторой подрешетки решетки $\mathrm{L}_q(\mathbf{K})$. Многообразие $\mathbf{K}$ называется *минимальным $\mathcal{Q}$-универсальным многообразием*, если $\mathbf{K}$ — $\mathcal{Q}$-универсальное многообразие и любое собственное подмногообразие $\mathbf{K}' \subsetneq \mathbf{K}$ не является $\mathcal{Q}$-универсальным.

В последнее время получено несколько достаточных условий $\mathcal{Q}$-универсальности, с помощью которых установлено, что многие классические многообразия и квазимногообразия алгебраических систем являются $\mathcal{Q}$-универсальными (см. [1, § 5.4]). В частности, известны примеры минимальных $\mathcal{Q}$-универсальных многообразий канторовых алгебр [11] (в действительности эти многообразия не имеют нетривиальных собственных подмногообразий). Более того, для некоторых классов минимальное $\mathcal{Q}$-универсальное многообразие единственно (например, в случае модулярных решеток (см. [5, 7]) и дистрибутивных решеток с псевдодополнениями (см. [4])). Примеры другого рода, предложенные автором в [2, 3],

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00485 и 01–01–06180) и ФЦП «Интеграция» (код проекта 274).

показывают существование бесконечной убывающей цепи $(\mathbf{K}_i)_{i<\omega}$ $\mathcal{Q}$-универсальных квазимногообразий орграфов такой, что решетка $\mathrm{L}_q(\bigcap_{i<\omega}\mathbf{K}_i)$ изоморфна решетке натуральных чисел (с естественным порядком), и бесконечной убывающей цепи $(\mathbf{K}_i)_{i<\omega}$ $\mathcal{Q}$-универсальных квазимногообразий графов такой, что $\mathrm{L}_q(\bigcap_{i<\omega}\mathbf{K}_i)$ — 6-элементная цепь.

Наша цель — указать для любого $n \geqslant 2$ минимальное $\mathcal{Q}$-универсальное многообразие унарных алгебр с n основными операциями.

Воспользуемся следующим достаточным условием $\mathcal{Q}$-универсальности.

Предложение 1. *Пусть* $\mathbf{K}$ *— многообразие алгебр конечной сигнатуры и* Φ *— полное вложение категории* $\mathbf{A}(1,1)$ *унарных алгебр сигнатуры* $\{f,g\}$ *в категорию, объектами которой являются алгебры из* $\mathbf{K}$ (морфизмами во всех рассматриваемых в работе категориях алгебр являются гомоморфизмы). *Если для любой конечной алгебры* $\mathcal{A} \in \mathbf{A}(1,1)$ *алгебра* $\Phi(\mathcal{A})$ *конечна, то* $\mathbf{K}$ *—* $\mathcal{Q}$*-универсальное многообразие.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из теоремы 1.1 работы [6] и результатов работы [8]. □

Введем обозначения. Пусть $\mathbf{K}$ — многообразие унарных алгебр сигнатуры $\{f,g\}$, определенное тождествами

$$\forall x\,\forall y\Big[f\big(f(x)\big) = f\big(f(y)\big) = f\big(g(y)\big)\Big], \tag{1}$$

$$\forall x\,\forall y\Big[g\big(g(x)\big) = g\big(g(y)\big) = g\big(f(y)\big)\Big]. \tag{2}$$

Через $\mathbf{I}$ обозначим многообразие унарных алгебр сигнатуры $\{f,g\}$, определенное тождествами

$$\forall x\Big[f(x) = f\big(f(x)\big)\Big], \quad \forall x\Big[g(x) = g\big(g(x)\big)\Big],$$

а через $\mathbf{I}_k$, $k \geqslant 3$, — многообразие, определенное в $\mathbf{I}$ тождествами

$$\forall x\Big[(fg)^k\big(f(x)\big) = f(x)\Big], \quad \forall x\Big[(gf)^k\big(g(x)\big) = g(x)\Big],$$

где $h^0(x) = x$, $h^{i+1}(x) = h\big(h^i(x)\big)$ для любой функции h. Напомним (см. [10, с. 53]), что категория $\mathfrak{A}$ называется *алгебраической*, если существует полное вложение этой категории в категорию алгебр некоторой сигнатуры, и alg-*универсальной*, если для любой алгебраической категории $\mathfrak{B}$ существует полное вложение $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$.

С помощью предложения 1 получаем два утверждения о $\mathcal{Q}$-универсальности многообразий унарных алгебр.

Следствие 1. *Многообразие* $\mathbf{K}$ *является* $\mathcal{Q}$*-универсальным.*

Доказательство. Достаточно заметить, что согласно [12] существует полное вложение $\Phi\colon \mathbf{A}(1,1) \to \mathbf{K}$, при котором конечные алгебры из $\mathbf{A}(1,1)$ переходят в конечные алгебры из $\mathbf{K}$. $\square$

Следствие 2. *Пусть* $\mathbf{V}$ — *подмногообразие многообразия* $\mathbf{I}$ *такое, что* $\mathbf{I}_k \subseteq \mathbf{V}$ *для некоторого* $k \geqslant 3$. *Тогда* $\mathbf{V}$ — $\mathcal{Q}$*-универсальное многообразие.*

Доказательство. Ввиду [9] подмногообразие $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{I}$ является alg-универсальным тогда и только тогда, когда $\mathbf{I}_k \subseteq \mathbf{V}$ для некоторого $k \geqslant 3$. Нетрудно показать, что для любого $k \geqslant 3$ полное вложение $\Phi_k\colon \mathbf{A}(1,1) \to \mathbf{I}_k$, построенное в [9], удовлетворяет условиям предложения 1. $\square$

Согласно [12] многообразие $\mathbf{K}$ представляет собой минимальное alg-универсальное многообразие, т. е. никакое собственное подмногообразие $\mathbf{L} \subsetneq \mathbf{K}$ не является alg-универсальным многообразием. Мы покажем, что существует единственное собственное $\mathcal{Q}$-универсальное подмногообразие многообразия $\mathbf{K}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{K}$ — *многообразие унарных алгебр сигнатуры* $\{f, g\}$, *определенное тождествами* (1), (2), *и пусть* $\mathbf{K}_3$ — *многообразие, определенное в* $\mathbf{K}$ *тождеством*

$$\forall x\Big[f\big(f(x)\big) = g\big(g(x)\big)\Big]. \tag{3}$$

Тогда $\mathbf{K}_3$ — $\mathcal{Q}$*-универсальное многообразие. Более того, других собственных* $\mathcal{Q}$*-универсальных подмногообразий многообразия* $\mathbf{K}$ *не существует.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{L} \subsetneq \mathbf{K}$ — собственное подмногообразие. Выясним, какими тождествами оно определяется в $\mathbf{K}$. Обозначим терм $f\big(f(x)\big)$ через $a(x)$. В силу (1) имеем $a(x) = a(y)$ для любой алгебры $\mathcal{X} \in \mathbf{K}$ и любых $x, y \in X$. Поэтому в дальнейшем вместо $a(x)$ будем писать a. Обозначим значение терма a в алгебре $\mathcal{X}$ через $a_{\mathcal{X}}$, а терм $g\big(g(x)\big)$ — через $b(x)$. Поскольку согласно (2) справедливо равенство $b(x) = b(y)$ для любой алгебры $\mathcal{X} \in \mathbf{K}$ и любых $x, y \in X$, в дальнейшем будем писать b вместо $b(x)$. Обозначим значение терма b в алгебре $\mathcal{X}$ через $b_{\mathcal{X}}$. Вычислим значения $f(a_{\mathcal{X}})$, $f(b_{\mathcal{X}})$, $g(a_{\mathcal{X}})$ и $g(b_{\mathcal{X}})$:

$$\begin{aligned} f(a_{\mathcal{X}}) &= f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f\big(f(y)\big) = a_{\mathcal{X}}, \\ f(b_{\mathcal{X}}) &= f\Big(g\big(g(x)\big)\Big) = f\big(g(z)\big) = a_{\mathcal{X}}, \\ g(a_{\mathcal{X}}) &= g\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = g\big(f(y)\big) = b_{\mathcal{X}}, \\ g(b_{\mathcal{X}}) &= g\Big(g\big(g(x)\big)\Big) = g\big(g(z)\big) = b_{\mathcal{X}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим теперь строение произвольного терма $p(x)$. В силу (1) и (2) если длина терма $p(x)$ равна 2, то $p(x) = a_{\mathcal{X}}$ или $p(x) = b_{\mathcal{X}}$ для всех $\mathcal{X} \in \mathbf{K}$ и всех $x \in X$. Если длина терма $p(x)$ не меньше чем 2, то из (4) следует, что $p(x) = a_{\mathcal{X}}$ или $p(x) = b_{\mathcal{X}}$ для всех $\mathcal{X} \in \mathbf{K}$ и всех $x \in X$. Таким образом, любое тождество, определяющее $\mathbf{L}$ в $\mathbf{K}$, эквивалентно в классе $\mathbf{K}$ тождеству (3) или одному из следующих тождеств:

$$\forall x \forall y [x = y], \quad \forall x [x = a], \quad \forall x [x = b], \tag{5}$$

$$\forall x \big[x = f(x)\big], \quad \forall x \forall y \big[x = f(y)\big], \quad \forall x \big[x = g(x)\big], \quad \forall x \forall y \big[x = g(y)\big], \tag{6}$$

$$\forall x \forall y \big[f(x) = f(y)\big], \quad \forall x \big[f(x) = a\big], \tag{7}$$

$$\forall x \forall y \big[g(x) = g(y)\big], \quad \forall x \big[g(x) = b\big], \tag{8}$$

$$\forall x \big[f(x) = b\big], \tag{9}$$

$$\forall x \big[g(x) = a\big], \tag{10}$$

$$\forall x \big[f(x) = g(x)\big], \tag{11}$$

$$\forall x \forall y \big[f(x) = g(y)\big]. \tag{12}$$

Пусть $\mathbf{K}_n$, $7 \leqslant n \leqslant 12$, обозначает многообразие, определенное в $\mathbf{K}$ базисом тождеств (n).

Лемма 1. *Подмногообразия многообразия* $\mathbf{K}$ *образуют* (*относительно включения*) *решетку, изображенную на рис.* 1.

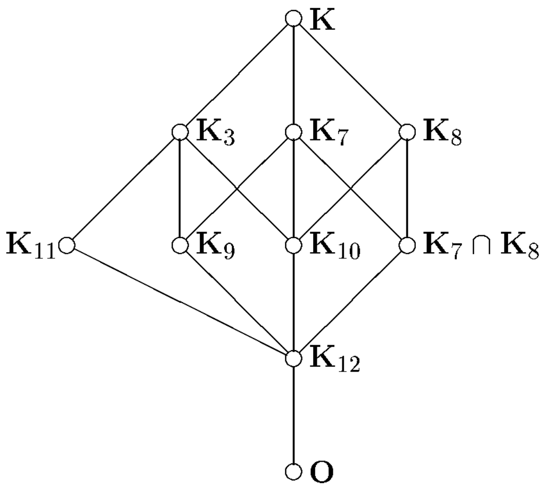

Рис. 1. Решетка подмногообразий $\mathbf{K}$

Доказательство. Каждое тождество в (5) определяет тривиальное многообразие $\mathbf{O}$, состоящее из одноэлементных алгебр. Из равенства

$f(x) = x$ следует, что $a_{\mathcal{X}} = f\big(f(x)\big) = f(x) = x$. Отсюда ясно, что каждое из тождеств в (6) также определяет многообразие $\mathbf{O}$. Для дальнейшего заметим, что в силу (4) тождества в (7) эквивалентны и тождества в (8) эквивалентны.

Очевидно, что $\mathbf{K}_{12}$ — наименьшее нетривиальное подмногообразие многообразия $\mathbf{K}$, так как каждое из тождеств (3), (7)–(11) вытекает из тождества (12). Это многообразие порождается (как квазимногообразие) алгеброй $\mathcal{M}$ с носителем $M = \{0, 1\}$, где $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$.

Рассмотрим многообразие $\mathbf{K}_{11}$. Алгебра $\mathcal{M}'$ с носителем $M' = \{0, 1, 2\}$, где $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$, $f(2) = g(2) = 1$, принадлежит $\mathbf{K}_{11}$ и не принадлежит $\mathbf{K}_{12}$. Покажем, что многообразие $\mathbf{K}_{11}$ порождается алгеброй $\mathcal{M}'$ (как квазимногообразие). Пусть $\mathcal{X} \in \mathbf{K}_{11}$. Рассмотрим разбиение $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2$, где X_0 состоит из единственного элемента $o \in X$ такого, что $f(o) = o$, $X_1 = f^{-1}(o) \setminus \{o\}$, $X_2 = f^{-1}(X_1)$. Пусть $x, y \in X$ и $x \neq y$. Если $x \in X_i$, $y \in X_j$, где $i \neq j$, то отображение $\varphi\colon X \to M'$, определенное по правилу $\varphi(X_i) = i$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, является гомоморфизмом из $\mathcal{X}$ на подалгебру алгебры $\mathcal{M}'$ и $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Если $x, y \in X_i$, то отображение $\varphi\colon X \to M'$, определенное по правилу

$$\varphi(X_0) = 0, \quad \varphi(x) = 0, \quad \varphi\big(f(x)\big) = 0,$$
$$\varphi\big(f^{-1}(x)\big) = 1, \quad \varphi\big(X_1 \setminus \big(f(x) \cup \{x\}\big)\big) = 1,$$
$$\varphi\big(X_2 \setminus \big(f^{-1}(x) \cup \{x\}\big)\big) = 2,$$

будет гомоморфизмом из $\mathcal{X}$ на подалгебру алгебры $\mathcal{M}'$ и $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Таким образом, $\mathbf{K}_{11}$ порождается алгеброй $\mathcal{M}'$.

Легко видеть, что многообразие $\mathbf{K}$ локально конечно, т. е. любая конечно-порожденная алгебра в $\mathbf{K}$ конечна. Так как любое квазимногообразие алгебраических систем порождается своими конечно-порожденными системами, любое подквазимногообразие многообразия $\mathbf{K}$ порождается своими конечными алгебрами. Напомним, что нетривиальная конечная система $\mathcal{X}$ называется *q-критической*, если она не принадлежит квазимногообразию, порожденному ее собственными подсистемами. Нетрудно показать, что любое подквазимногообразие многообразия $\mathbf{K}$ порождается своими q-критическими алгебрами.

Из приведенных выше рассуждений, в частности, следует, что q-критические алгебры в $\mathbf{K}_{11}$ — это $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$. Следовательно, подквазимногообразия многообразия $\mathbf{K}_{11}$ суть $\mathbf{K}_{11}$, $\mathbf{K}_{12}$ и $\mathbf{O}$. Таким образом, многообразие $\mathbf{K}_{11}$ не является $\mathcal{Q}$-универсальным и $\mathbf{K}_n \nsubseteq \mathbf{K}_{11}$ для $n \in \{3, 7, 8, 9, 10\}$.

С другой стороны, в силу (4) из (11) следует (3). Поэтому $\mathbf{K}_{11} \subseteq \mathbf{K}_3$. Легко видеть, что это включение строгое. Так как $\mathcal{M}' \in \mathbf{K}_{11}$ и $\mathcal{M}' \notin \mathbf{K}_n$ при $7 \leqslant n \leqslant 10$, заключаем, что $\mathbf{K}_{11} \nsubseteq \mathbf{K}_n$ для всех $7 \leqslant n \leqslant 10$. Следовательно, $\mathbf{K}_{11} \cap \mathbf{K}_n = \mathbf{K}_{12}$ для всех $7 \leqslant n \leqslant 10$.

Согласно (4) из (9) вытекают (3) и (7), а (10) влечет (3) и (8). Пусть алгебра $\mathcal{X} \in \mathbf{K}$ удовлетворяет тождествам (3) и (7), т.е. $f(x) = a_{\mathcal{X}}$ для любого $x \in X$ и $a_{\mathcal{X}} = b_{\mathcal{X}}$. Очевидно, что $f(x) = b_{\mathcal{X}}$ для любого $x \in X$, т.е. тождество (9) истинно в $\mathcal{X}$. Значит, $\mathbf{K}_3 \cap \mathbf{K}_7 = \mathbf{K}_9$. Равенство $\mathbf{K}_3 \cap \mathbf{K}_8 = \mathbf{K}_{10}$ доказывается аналогично.

Пусть $\mathbf{L}$ — нетривиальное многообразие, в котором справедливы тождества (9) и (8). Тогда для любой алгебры $\mathcal{X} \in \mathbf{L}$ и любого $x \in X$ имеем $f(x) = b_{\mathcal{X}}$ и $g(x) = b_{\mathcal{X}}$. Следовательно, в $\mathbf{L}$ выполняется тождество (11). Так как $\mathbf{K}_8 \cap \mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_{12}$, получаем $\mathbf{K}_8 \cap \mathbf{K}_9 = \mathbf{K}_{10} \cap \mathbf{K}_9 = \mathbf{K}_{12}$. Аналогично доказывается равенство $\mathbf{K}_7 \cap \mathbf{K}_{10} = \mathbf{K}_{12}$.

Пусть $\mathbf{L}$ — нетривиальное многообразие, в котором справедливы тождества (7). Если в $\mathbf{L}$ выполняется тождество (3) или тождество (9), то $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{K}_9$. Если в $\mathbf{L}$ выполняется любое из тождеств (10)–(12), то $\mathbf{L} = \mathbf{K}_{12}$. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда в $\mathbf{L}$ справедливы тождества (8). Пусть $\mathbf{L} = \mathbf{K}_7 \cap \mathbf{K}_8$. Алгебра $\mathcal{M}'$, порождающая $\mathbf{K}_{11}$, принадлежит $\mathbf{K}_3$ и не принадлежит $\mathbf{L}$. С другой стороны, алгебра $\mathcal{A}$ с носителем $A = \{0, 1\}$, где $f(0) = f(1) = 0$, $g(0) = g(1) = 1$, принадлежит $\mathbf{L}$ и не принадлежит $\mathbf{K}_3$. Следовательно, многообразия $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{K}_7 \cap \mathbf{K}_8$ несравнимы. $\square$

Поскольку ранее установлено, что многообразие $\mathbf{K}_{11}$ не $\mathcal{Q}$-универсально, остается показать, что многообразия $\mathbf{K}_7$ и $\mathbf{K}_8$ также не $\mathcal{Q}$-универсальны, а многообразие $\mathbf{K}_3$ является $\mathcal{Q}$-универсальным.

Лемма 2. *Многообразия $\mathbf{K}_7$ и $\mathbf{K}_8$ не $\mathcal{Q}$-универсальны.*

Доказательство проведем для случая многообразия $\mathbf{K}_7$ (для $\mathbf{K}_8$ доказательство аналогично). Мы покажем, что множество q-критических алгебр в $\mathbf{K}_7$ конечно, и поэтому решетка $\mathrm{L}_q(\mathbf{K}_7)$ конечна.

В дальнейшем гомоморфизмы алгебры на ее собственные подалгебры будем называть *собственными эндоморфизмами*.

Пусть $\mathcal{X} \in \mathbf{K}_7$. Для каждого элемента $x \in X$ определим его *g-высоту* следующим образом: g-высота элемента $b_{\mathcal{X}}$ равна 0, а если $x \neq b_{\mathcal{X}}$, то g-высота элемента x равна наименьшему натуральному числу n такому, что $g^n(x) = b_{\mathcal{X}}$. В силу (2) g-высота любого элемента $x \in X$ не больше чем 2 и g-высота элемента $a_{\mathcal{X}}$ не больше чем 1.

Пусть B — множество элементов g-высоты 2. Множество элементов g-высоты 1 разобьем на непересекающиеся подмножества A и C, где $A = g(B)$. Разбиение носителя алгебры $\mathcal{X} \in \mathbf{K}_7$ изображено на рис. 2, где стрелка из множества U в множество V показывает, что $g(U) \subseteq V$.

Возможны два случая: $a_{\mathcal{X}} \in A \cup C$ и $a_{\mathcal{X}} = b_{\mathcal{X}}$.

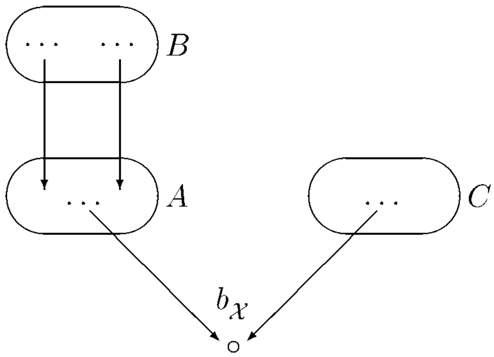

Рис. 2. Алгебра из $\mathbf{K}_7$

Начнем с более сложного случая, когда $a_{\mathcal{X}} \neq b_{\mathcal{X}}$. Имеем $a_{\mathcal{X}} \in A$ или $a_{\mathcal{X}} \in C$.

Пусть $a_{\mathcal{X}} \in A$. Предположим, что $C \neq \varnothing$, $c \in C$. Пусть $x \neq y$ — произвольные элементы. Для $u \neq c$ положим $\varphi(u) = u$. Если $b_{\mathcal{X}} \notin \{x, y\}$, то полагаем $\varphi(c) = b_{\mathcal{X}}$, а если $b_{\mathcal{X}} \in \{x, y\}$, то $\varphi(c) = a_{\mathcal{X}}$. В каждом из случаев φ — собственный эндоморфизм алгебры $\mathcal{X}$ такой, что $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Таким образом, если $C \neq \varnothing$, то алгебра $\mathcal{X}$ аппроксимируется собственными подалгебрами, т. е. не является q-критической.

Далее считаем, что $C = \varnothing$.

Предположим, что $|A| > 2$. Тогда существуют $a_1, a_2 \in A \setminus \{a_{\mathcal{X}}\}$, $a_1 \neq a_2$. Пусть $A_i = \{a_i\} \cup g^{-1}(a_i)$, $i = 1, 2$, и пусть $x \neq y$. Если $\{x, y\} \nsubseteq A_1 \cup \{b_{\mathcal{X}}\}$, то отображение φ такое, что $\varphi(A_1) = b_{\mathcal{X}}$ и $\varphi(u) = u$ для всех $u \in X \setminus A_1$, является собственным эндоморфизмом алгебры $\mathcal{X}$, и $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Если $\{x, y\} \subseteq A_1 \cup \{b_{\mathcal{X}}\}$, то $\{x, y\} \nsubseteq A_2 \cup \{b_{\mathcal{X}}\}$. Поэтому отображение φ такое, что $\varphi(A_2) = b_{\mathcal{X}}$ и $\varphi(u) = u$ для всех $u \in X \setminus A_2$, представляет собой собственный эндоморфизм алгебры $\mathcal{X}$, и $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Таким образом, если $|A| > 2$, то алгебра $\mathcal{X}$ аппроксимируется собственными подалгебрами, т. е. не является q-критической.

Рассмотрим случай $|A| = 2$. Пусть $\{a_1\} = A \setminus \{a_{\mathcal{X}}\}$, $B_1 = g^{-1}(a_1)$, $B_2 = g^{-1}(a_{\mathcal{X}})$. Если $|B_1| > 2$ или $|B_2| > 2$ или $|B_1| = |B_2| = 2$, то алгебра $\mathcal{X}$ аппроксимируется собственными подалгебрами (отождествление пары элементов из B_1 или B_2 будет собственным эндоморфизмом). Остается рассмотреть случаи $|B_1| = 1$, $|B_2| \leqslant 2$ и $|B_1| = 2$, $|B_2| = 1$.

В случае $|B_1| = 1$, $|B_2| \leqslant 2$ для любых $x \neq y$ таких, что $\{x, y\} \nsubseteq \{b_{\mathcal{X}}, a_1\} \cup B_1$, отображение $\varphi\colon X \to X \setminus \big(\{a_1\} \cup B_1\big)$, определенное по правилу $\varphi\big(\{a_1\} \cup B_1\big) = b_{\mathcal{X}}$ и $\varphi(u) = u$ для всех $u \in X \setminus \big(\{a_1\} \cup B_1\big)$, является собственным эндоморфизмом, и $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, а для любых других $x \neq y$ отображение $\varphi\colon X \to X \setminus (\{a_1\} \cup B_1)$, определенное по правилу $\varphi(\{a_1\}) = a_{\mathcal{X}}$, $\varphi(B_1) \subseteq B_2$ и $\varphi(u) = u$ для всех $u \in X \setminus (\{a_1\} \cup B_1)$, является собственным эндоморфизмом, и $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Таким образом, любая алгебра с $|B_1| = 1$, $|B_2| \leqslant 2$ аппроксимируется собственными подалгебрами, т. е. не является q-критической.

Рассмотрим случай $|B_1| = 2$, $|B_2| = 1$. Если $x \neq y$ и $\{x, y\} \neq B_1$, то поступаем аналогично предыдущему случаю. Если $\{x, y\} = B_1$, то отображение $\varphi\colon X \to X \setminus (\{a_1\} \cup B_1)$, определенное по правилу $\varphi(a_1) = b_{\mathcal{X}}$, $\varphi(x) = a_1$, $\varphi(y) = a_{\mathcal{X}}$ и $\varphi(u) = u$ для всех остальных $u \in X$, является собственным эндоморфизмом, и $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Таким образом, при $|A| = 2$ алгебра $\mathcal{X}$ не q-критическая.

Мы показали, что q-критическими могут быть только алгебры $\mathcal{X}$ такие, что $A = \{a_{\mathcal{X}}\}$ и $|B| \leqslant 2$, где $B = g^{-1}(a_{\mathcal{X}})$. Нетрудно установить, что при $|B| = 1$ и $|B| = 2$ получаются q-критические алгебры.

Пусть $a_{\mathcal{X}} \in C$. Если $C \neq \{a_{\mathcal{X}}\}$, то существует $c \in C$, $c \neq a_{\mathcal{X}}$. Допустим, что $x \neq y$. Для всех $u \neq c$ положим $\varphi(u) = u$. Если $b_{\mathcal{X}} \notin \{x, y\}$, то пусть $\varphi(c) = b_{\mathcal{X}}$, а если $b_{\mathcal{X}} \in \{x, y\}$, то полагаем $\varphi(c) = a_{\mathcal{X}}$. В каждом из случаев φ — собственный эндоморфизм алгебры $\mathcal{X}$, и $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Следовательно, если $C \neq \{a_{\mathcal{X}}\}$, то алгебра $\mathcal{X}$ аппроксимируется собственными подалгебрами, т. е. не является q-критической.

Далее считаем, что $C = \{a_{\mathcal{X}}\}$. Если $|A| > 1$, то аналогично случаю $a_{\mathcal{X}} \in A$, $|A| > 2$ показывается, что алгебра $\mathcal{X}$ аппроксимируется собственными подалгебрами. Если $A = \varnothing$, то, очевидно, получаем q-критическую алгебру.

Рассмотрим случай $|A| = 1$. Пусть $A = \{a_1\}$, $B = g^{-1}(a_1)$. Если $|B| > 2$, то аналогично случаю $a_{\mathcal{X}} \in A$ показывается, что алгебра $\mathcal{X}$ аппроксимируется собственными подалгебрами. Пусть $|B| = 2$, $B = \{b_1, b_2\}$. Для любых $x \neq y$, $\{x, y\} \neq B$, отображение $\varphi\colon X \to X \setminus \{b_2\}$, определенное по правилу $\varphi(b_2) = b_1$ и $\varphi(u) = u$ для всех $u \neq b_2$, является собственным эндоморфизмом, и $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Пусть $x = b_1$, $y = b_2$. Определим φ следующим образом: $\varphi(a_1) = \varphi(b_{\mathcal{X}}) = b_{\mathcal{X}}$, $\varphi(b_1) = \varphi(a_{\mathcal{X}}) = a_{\mathcal{X}}$, $\varphi(b_2) = a_1$. Тогда φ — собственный эндоморфизм алгебры $\mathcal{X}$, и $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Если $B = \{b_1\}$, то нетрудно показать, что алгебра $\mathcal{X}$ будет q-критической, так как не существует собственного эндоморфизма алгебры $\mathcal{X}$ такого, что $\varphi(b_{\mathcal{X}}) \neq \varphi(a_1)$.

Таким образом, найдены четыре q-критические алгебры такие, что $a_{\mathcal{X}} \neq b_{\mathcal{X}}$. Теперь обратимся к случаю $a_{\mathcal{X}} = b_{\mathcal{X}}$.

Предположим, что $C \neq \varnothing$. Если $A \neq \varnothing$ или $A = \varnothing$, $|C| > 1$, то аналогично случаю $a_{\mathcal{X}} \neq b_{\mathcal{X}}$ устанавливается, что алгебра $\mathcal{X}$ аппроксимируется собственными подалгебрами. При $|C| = 1$, $A = \varnothing$, очевидно, получаем q-критическую алгебру.

Далее считаем, что $C = \varnothing$. Если $|A| > 1$, то подобно случаю $a_{\mathcal{X}} \neq b_{\mathcal{X}}$ показывается, что алгебра $\mathcal{X}$ аппроксимируется собственными подалгебрами. Пусть $A = \{a_1\}$, $B = g^{-1}(a_1)$. Если $|B| > 2$, то аналогично случаю $a_{\mathcal{X}} \neq b_{\mathcal{X}}$ устанавливается, что алгебра $\mathcal{X}$ аппроксимируется собственными подалгебрами. Легко видеть, что при $|B| = 1$ алгебра $\mathcal{X}$ является q-критической, а при $|B| = 2$ — нет.

Таким образом, найдены еще две q-критические алгебры.

Все q-критические алгебры из $\mathbf{K}_7$ изображены на рис. 3.

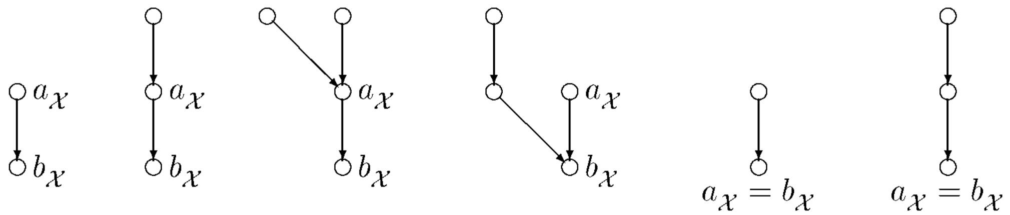

Рис. 3. q-Критические алгебры из $\mathbf{K}_7$

Так как множество q-критических алгебр в $\mathbf{K}_7$ конечно и любое подквазимногообразие многообразия $\mathbf{K}_7$ порождается некоторым множеством q-критических алгебр, заключаем, что $\mathbf{K}_7$ имеет конечное число подквазимногообразий и, следовательно, не является $\mathcal{Q}$-универсальным. $\square$

Итак, остается показать, что многообразие $\mathbf{K}_3$ будет $\mathcal{Q}$-универсальным. Для доказательства мы воспользуемся достаточным условием, предложенным В. А. Горбуновым (см. [1, § 5.4]). Обозначим через $\mathbf{Q}(\mathbf{X})$ наименьшее квазимногообразие, содержащее класс $\mathbf{X}$, через $\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{s}}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{H}$ — операторы взятия надпрямых пределов, подпрямых произведений, подалгебр, гомоморфных образов. Для любых классов $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}$ и любого оператора $\mathbf{O}$ условимся обозначать класс $\mathbf{O}(\mathbf{X}) \cap \mathbf{A}$ через $(\mathbf{O} \cap \mathbf{A})(\mathbf{X})$.

Предложение 2. *Пусть* $\mathbf{V}$ *— квазимногообразие алгебр конечной сигнатуры,* $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ *— произвольный подкласс и* $(\mathcal{G}_n)_{n<\omega} \subseteq \mathbf{W}$ *— семейство конечных алгебр. Обозначим* $\mathbf{A}_n = \mathbf{H}(\mathcal{G}_n) \cap \mathbf{W}$. *Пусть выполняются следующие условия:*

(Q1) $\operatorname{Con}_{\mathbf{W}} \mathcal{G}_n$ *— нижняя подполурешетка решетки* $\operatorname{Con} \mathcal{G}_n$, *в которую вложима полурешетка подмножеств* n*-элементного множества относительно пересечения;*

(Q2) *для любого* $n < \omega$ *и любых* $\theta, \theta' \in \operatorname{Con}_{\mathbf{W}} \mathcal{G}_n$ *если* $\mathcal{G}_n/\theta'$ *вложима в* $\mathcal{G}_n/\theta$, *то* $\theta = \theta'$ *или* $\mathcal{G}_n/\theta'$ *— тривиальная алгебра;*

(Q3) *если* $m \neq n$, *то класс* $\mathbf{A}_n \cap \mathbf{S}(\mathbf{A}_m)$ *состоит из тривиальных алгебр;*

(Q4) $\mathbf{Q}(\mathbf{X}) \cap \mathbf{A}_n = (\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}} \cap \mathbf{A}_n)(\mathbf{P}_{\mathbf{s}} \cap \mathbf{A}_n)(\mathbf{S} \cap \mathbf{A}_n)(\mathbf{X})$ *для любого* $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{V}$ *и любого* $n < \omega$.

Тогда $\mathbf{V}$ *—* $\mathcal{Q}$*-универсальное квазимногообразие.*

Покажем, что $\mathcal{Q}$-универсальным является собственное подквазимногообразие $\mathbf{V} \subsetneq \mathbf{K}_3$, определенное квазитождествами

$$\forall x\bigl[f(x) = a \to f(x) = g(x)\bigr], \tag{13}$$

$$\forall x\bigl[g(x) = b \to f(x) = g(x)\bigr], \tag{14}$$

$$\forall x\bigl[f(x) = g(x) \to f(x) = a\bigr], \tag{15}$$

$$\forall x \forall y\bigl[f(x) = f(y) \to g(x) = g(y)\bigr], \tag{16}$$

$$\forall x \forall y\bigl[g(x) = g(y) \to f(x) = f(y)\bigr]. \tag{17}$$

Пусть $\mathbf{W}$ — подкласс $\mathbf{V}$, определенный предложениями

$$\forall x \forall y\bigl[g(x) = g(y) \,\&\, x \neq y \to g(x) = b\bigr], \tag{18}$$

$$\bigl(\forall x\bigl[g(x) = b\bigr] \to \forall x \forall y[x = y]\bigr). \tag{19}$$

Введем обозначения. Пусть $\mathcal{C}_1$ — тривиальная алгебра. Для $n \geqslant 2$ через $\mathcal{C}_n$ обозначим алгебру с носителем

$$C_n = \{0, a_0^n, \ldots, a_{n-1}^n, b_0^n, \ldots, b_{n-1}^n\},$$

где $f(0) = g(0) = f(a_i^n) = g(a_i^n) = 0$ и $g(b_i^n) = a_i^n$ для всех $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $f(b_i^n) = a_{i+1}^n$ при $0 \leqslant i \leqslant n-2$, $f(b_{n-1}^n) = a_0^n$. Очевидно, что семейство алгебр $(\mathcal{C}_n)_{n\geqslant 1}$ содержится в $\mathbf{W}$. Приведем описание классов $\mathbf{H}(\mathcal{C}_n) \cap \mathbf{W}$, $n \geqslant 2$.

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого $n \geqslant 2$ и любого натурального делителя $m \geqslant 2$ числа n отображение $\varphi_{nm}\colon C_n \to C_m$, определенное по правилу $\varphi_{nm}(0) = 0$, $\varphi_{nm}(a_i^n) = a_j^m$, $\varphi_{nm}(b_i^n) = b_j^m$, где j — остаток от деления i на m, является гомоморфизмом из $\mathcal{C}_n$ на $\mathcal{C}_m$.*
2. *Если $n \geqslant 2$ и φ — гомоморфизм из $\mathcal{C}_n$ на алгебру $\mathcal{A} \in \mathbf{W}$, то существуют натуральный делитель m числа n и изоморфизм $\psi\colon \mathcal{C}_m \to \mathcal{A}$ такие, что $\varphi = \psi \circ \varphi_{nm}$.*

Доказательство. Утверждение 1 следует из определения алгебр $\mathcal{C}_n$.

Докажем утверждение 2. Пусть $\mathcal{A} \in \mathbf{W}$ и φ — гомоморфизм из $\mathcal{C}_n$ на $\mathcal{A}$. Заметим, что $\bigl\{\varphi(0)\bigr\}$ — носитель единственной тривиальной подалгебры алгебры $\mathcal{A}$. Если алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}_n$ изоморфны, то утверждение 2 тривиально. Пусть гомоморфизм φ не является изоморфизмом. Тогда существуют $x, y \in C_n$ такие, что $x \neq y$ и $\varphi(x) = \varphi(y)$. Возможны следующие случаи:

(1) $x = 0$, $y = a_i^n$;

(2) $x = 0,\ \ y = b_i^n$;
(3) $x = a_i^n,\ \ y = b_j^n$;
(4) $x = a_i^n,\ \ y = a_j^n$;
(5) $x = b_i^n,\ \ y = b_j^n$.

Рассмотрим случай (1). Так как φ — гомоморфизм, $g\big(\varphi(b_i^n)\big) = \varphi\big(g(b_i^n)\big) = \varphi(a_i^n)$ и $g\big(g\big(\varphi(b_i^n)\big)\big) = \varphi(0)$. Поскольку $\varphi(0) = \varphi(a_i^n)$, имеем $g\big(g\big(\varphi(b_i^n)\big)\big) = g\big(\varphi(b_i^n)\big)$. В силу (14) выполняется равенство $g\big(\varphi(b_i^n)\big) = f\big(\varphi(b_i^n)\big)$. По определению алгебры $\mathcal{C}_n$ имеем $g\big(\varphi(b_i^n)\big) = \varphi(a_i^n)$, $f\big(\varphi(b_i^n)\big) = \varphi\big(f(b_i^n)\big) = \varphi(a_{i+1}^n)$ (здесь и далее нижние индексы у a_i^n берутся по модулю n). Таким образом, $\varphi(a_i^n) = \varphi(0)$ для любого $0 \leqslant i < n$. Из определения операций алгебры $\mathcal{C}_n$ следует, что $g\big(\varphi(0)\big) = g\big(\varphi(a_i^n)\big) = g\big(\varphi(b_i^n)\big) = \varphi(0)$ для всех $0 \leqslant i < n$. Так как φ — гомоморфизм на $\mathcal{A}$, в алгебре $\mathcal{A} \in \mathbf{W}$ выполняется посылка импликации предложения (19). Отсюда вытекает, что $\mathcal{A}$ — тривиальная алгебра.

В случае (2) имеем $\varphi(a_i^n) = \varphi\big(g(b_i^n)\big) = g\big(\varphi(b_i^n)\big) = g\big(\varphi(0)\big) = \varphi(0)$, т. е. выполняются условия случая (1). В случае (3) равенство $\varphi(a_i^n) = \varphi(b_j^n)$ влечет $\varphi(a_j^n) = \varphi\big(g(b_j^n)\big) = g\big(\varphi(b_j^n)\big) = g\big(\varphi(a_i^n)\big) = \varphi\big(g(a_i^n)\big) = \varphi(0)$, т. е. условия случая (1) также справедливы.

Таким образом, если выполняются условия одного из случаев (1)–(3), то $\mathcal{A}$ — тривиальная алгебра.

Так как $a_k^n = g(b_k^n)$, $0 \leqslant k < n$, равенство $\varphi(a_i^n) = \varphi(a_j^n)$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо равенство $g\big(\varphi(b_i^n)\big) = g\big(\varphi(b_j^n)\big)$. Следовательно, если выполняются условия случая (5), то также выполняются условия случая (4) при тех же i и j. Если соблюдаются условия случая (4) и $\varphi(b_i^n) \neq \varphi(b_j^n)$, то справедлива посылка импликации предложения (18). Поскольку $\mathcal{A} \in \mathbf{W}$, в $\mathcal{A}$ имеет место заключение импликации предложения (18), т. е. $g\big(\varphi(b_i^n)\big) = \varphi(0)$. Так как $g\big(\varphi(b_i^n)\big) = \varphi(a_i^n)$, выполняются условия случая (1). Следовательно, $\mathcal{A}$ — тривиальная алгебра. Таким образом, далее можно считать, что $\varphi(a_i^n) = \varphi(a_j^n)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(b_i^n) = \varphi(b_j^n)$.

Пусть $\varphi(a_i^n) = \varphi(a_j^n)$, $i < j$. Выберем наименьшее положительное число m такое, что $\varphi(a_i^n) = \varphi(a_{i+m}^n)$. Тогда $\varphi(b_i^n) = \varphi(b_{i+m}^n)$. В силу соотношений

$$f\big(\varphi(b_i^n)\big) = \varphi\big(f(b_i^n)\big) = \varphi(a_{i+1}^n),$$
$$f\big(\varphi(b_{i+m}^n)\big) = \varphi\big(f(b_{i+m}^n)\big) = \varphi(a_{i+m+1}^n)$$

заключаем, что $\varphi(a_i^n) = \varphi(a_j^n)$ и $\varphi(b_i^n) = \varphi(b_j^n)$ при $i \equiv j \pmod{m}$. Так как m — наименьшее положительное число такое, что $\varphi(a_i^n) = \varphi(a_{i+m}^n)$, верно и обратное, т. е. если $\varphi(a_i^n) = \varphi(a_j^n)$ или $\varphi(b_i^n) = \varphi(b_j^n)$, то $i \equiv j \pmod{m}$. Более того, если $m \geqslant 2$ и m не делит n, то также получаем противоречие с выбором числа m. Если $m = 1$, то $f\bigl(\varphi(b_i^n)\bigr) = g\bigl(\varphi(b_i^n)\bigr)$. Поскольку $\mathcal{A} \in \mathbf{W}$, в силу (15) получаем $f\bigl(\varphi(b_i^n)\bigr) = \varphi(0)$, т. е. выполняются условия случая (1) и, следовательно, $\mathcal{A}$ — тривиальная алгебра. Наконец, так как ядра гомоморфизмов φ и φ_{nm} совпадают, заключаем, что утверждение 2 леммы 3 справедливо. $\square$

Завершим доказательство теоремы 1.

Пусть $P = \bigcup_{n<\omega} P_n$ — разбиение множества P простых чисел такое, что $|P_n| = n$ и $P_n \cap P_m = \varnothing$ при $n \neq m$. Пусть $k_0 = 1$ и $k_n = \prod_{p \in P_n} p$ при $n \geqslant 1$. Обозначим через $\mathcal{G}_n$ алгебру $\mathcal{C}_{k_n}$, $n < \omega$. Покажем, что $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ и $(\mathcal{G}_n)_{n<\omega}$ удовлетворяют условиям предложения 2.

Условия (Q1)–(Q3) выполняются в силу леммы 3. Действительно, для любого $n < \omega$ множество $\mathbf{W}$-конгруэнций алгебры $\mathcal{G}_n$ образует нижнюю полурешетку относительно пересечения, причем эта полурешетка антиизоморфна полурешетке подмножеств n-элементного множества относительно объединения. Следовательно, справедливо условие (Q1). Так как при $m, n \geqslant 2$ алгебра $\mathcal{C}_n$ вложима в алгебру $\mathcal{C}_m$ тогда и только тогда, когда $n = m$, соблюдаются условия (Q2) и (Q3).

Проверим условие (Q4).

Очевидно, что

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}) \cap \mathbf{A}_n \supseteq \bigl(\underrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}} \cap \mathbf{A}_n\bigr)(\mathbf{P}_{\mathbf{s}} \cap \mathbf{A}_n)(\mathbf{S} \cap \mathbf{A}_n)(\mathbf{X}).$$

Пусть $\mathcal{A} \in \mathbf{Q}(\mathbf{X}) \cap \mathbf{A}_n$ — нетривиальная алгебра. Тогда по теореме 2.3.6 из [1] существует надпрямой спектр $\Lambda = (I, \mathcal{A}_i, \varphi_{ij})$ такой, что $\mathcal{A}$ изоморфна $\varinjlim \Lambda$ и $\mathcal{A}_i$ — подпрямое произведение семейства алгебр $(\mathcal{A}_{ij})_{j \in I_i} \subseteq \mathbf{X}$. Поскольку $\mathcal{A} \in \mathbf{H}(\mathcal{G}_n)$ и $\mathcal{G}_n$ — конечная алгебра, $\mathcal{A}$ также конечная алгебра. По теореме 1.2.9 из [1] существует индекс $i \in I$ такой, что $\mathcal{A}$ вложима в $\mathcal{A}_i$. Пусть $\alpha \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}_i$ — соответствующее вложение, $\varepsilon \colon \mathcal{A}_i \to \prod_{j \in I_i} \mathcal{A}_{ij}$ — подпрямое вложение, $\pi_j \colon \prod_{j \in I_i} \mathcal{A}_{ij} \to \mathcal{A}_{ij}$ — проектирование. Обозначим через ψ_j композицию гомоморфизмов $\pi_j \circ \varepsilon \circ \alpha$ и через $\mathcal{B}_j$ — образ $\mathcal{A}$ относительно гомоморфизма ψ_j, $j \in I_i$. Тогда $\mathcal{B}_j$ — подалгебра алгебры $\mathcal{A}_{ij}$ и $\mathcal{A}$ — подпрямое произведение семейства алгебр $(\mathcal{B}_j)_{j \in I_i}$. Так как $\mathcal{A} \in \mathbf{H}(\mathcal{G}_n)$, имеем $\mathcal{B}_j \in \mathbf{H}(\mathcal{G}_n)$, однако может оказаться, что $\mathcal{B}_j \notin \mathbf{W}$, поскольку класс $\mathbf{W}$ не является гомоморфно замкнутым.

Покажем, что $\mathcal{A}$ будет подпрямым произведением некоторого семейства алгебр из $\mathbf{S}\bigl((\mathcal{B}_j)_{j \in I_i}\bigr) \cap \mathbf{H}(\mathcal{G}_n) \cap \mathbf{W}$. Введем обозначение $J = \{j \in I_i : \mathcal{B}_j \in \mathbf{W}\}$. Пусть $x, y \in A$, $x \neq y$. Так как $\mathcal{A}$ — подпрямое произведение семейства алгебр $(\mathcal{B}_j)_{j \in I_i}$, существует индекс $j \in I_i$ такой, что $\psi_j(x) \neq \psi_j(y)$. Предположим, что $j \notin J$. Тогда в алгебре $\mathcal{B}_j$ ложно (18) или (19).

Согласно лемме 3 алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна $\mathcal{C}_m$ для некоторого $m \geqslant 2$.

Предположим, что в $\mathcal{B}_j$ ложно предложение (19). Тогда $\psi_j(0) = g\bigl(\psi_j(z)\bigr)$ для всех $z \in A$. В частности, $g\bigl(\psi_j(b_k^m)\bigr) = \psi_j(0)$ для всех $0 \leqslant k < m$. Поскольку $g\bigl(\psi_j(b_k^m)\bigr) = \psi_j(a_k^m)$, для любого $0 \leqslant k < m$ имеет место равенство $\psi_j(a_k^m) = \psi_j(0)$. Таким образом,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{либо} & x = 0, \quad y = b_k^m, \\ \text{либо} & x = a_k^m,\ y = b_k^m, \\ \text{либо} & x = a_k^m,\ y = b_l^m, \\ \text{либо} & x = b_k^m,\ y = b_l^m, \end{array}\right. \qquad \text{где} \quad k \neq l.$$

Рассмотрим алгебру $\mathcal{B}_t$ такую, что $\psi_t(a_k^m) \neq \psi_t(a_l^m)$ (в случаях $x = 0$, $y = b_k^m$ и $x = a_k^m$, $y = b_k^m$ число $l \neq k$ выбирается произвольно). Так как $g\bigl(\psi_t(b_k^m)\bigr) = \psi_t(a_k^m) \neq \psi_t(0)$ $\bigl($в противном случае выполняются условия случая (1) из доказательства леммы 3 и, следовательно, $\psi_t(a_k^m) = \psi_t(a_l^m)$; получаем противоречие$\bigr)$, предложение (19) истинно в $\mathcal{B}_t$ ввиду ложности посылки. Таким образом, можно считать, что во всех алгебрах $\mathcal{B}_j$, $j \in I_i$, истинно предложение (19).

Пусть $\mathcal{B}_j$ — алгебра, в которой ложно предложение (18). Обозначим через θ_j множество пар $(u, v) \in B_j \times B_j$ таких, что либо $u = v$, либо $u \neq v$, $g(u) = g(v)$ и $g(u) \neq \psi_j(0)$. С учетом (17) имеем $f(u) = f(v)$ для всех $(u, v) \in \theta_j$. Нетрудно показать, что θ_j — конгруэнция на $\mathcal{B}_j$ и $\mathcal{B}_j/\theta_j \in \mathbf{S}(\mathcal{B}_j) \cap \mathbf{A}_n$. Пусть $\mathcal{C}_j = \mathcal{B}_j/\theta_j$ и φ_j — композиция канонического гомоморфизма $\mathcal{B}_j \to \mathcal{B}_j/\theta_j$ и гомоморфизма ψ_j для каждого $j \in I_i \setminus J$.

Если $\varphi_j(x) = \varphi_j(y)$, то из определения конгруэнции θ_j следует, что $g\bigl(\psi_j(x)\bigr) = g\bigl(\psi_j(y)\bigr)$ и $g\bigl(\psi_j(x)\bigr) \neq \psi_j(0)$. Поскольку $g\bigl(\psi_j(x)\bigr) = \psi_j\bigl(g(x)\bigr)$, из определения операций алгебры $\mathcal{C}_m$ выводим $x = b_k^m$, $y = b_l^m$. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B}_t$ такую, что $\psi_t(a_k^m) \neq \psi_t(a_l^m)$. Так как $\psi_t(a_k^m) = \psi_t\bigl(g(b_k^m)\bigr) = g\bigl(\psi_t(b_k^m)\bigr)$ и $\psi_t(a_l^m) = \psi_t\bigl(g(b_l^m)\bigr) = g\bigl(\psi_t(b_l^m)\bigr)$, заключаем, что $\psi_t(b_k^m) \neq \psi_t(b_l^m)$ и $g\bigl(\psi_t(b_k^m)\bigr) \neq g\bigl(\psi_t(b_l^m)\bigr)$. Следовательно, $\bigl(\psi_t(b_k^m), \psi_t(b_l^m)\bigr) \notin \theta_t$. Таким образом, $\mathcal{C}_t \in \mathbf{S}(\mathbf{X}) \cap \mathbf{A}_n$ и $\varphi_t(x) \neq \varphi_t(y)$.

Мы показали, что $\mathcal{A}$ является подпрямым произведением семейства алгебр $(\mathcal{B}_j)_{j \in J} \cup (\mathcal{C}_k)_{k \in I_i \setminus J} \subseteq \mathbf{S}(\mathbf{X}) \cap \mathbf{A}_n$. Поэтому $\mathcal{A} \in (\mathbf{P_s} \cap \mathbf{A}_n)(\mathbf{S} \cap \mathbf{A}_n)(\mathbf{X})$, т. е. выполняется условие (Q4). $\square$

Следствие 3. *Для любого натурального числа $n \geqslant 2$ существует минимальное $\mathcal{Q}$-универсальное многообразие унарных алгебр сигнатуры $\{f_1, \ldots, f_n\}$.*

Доказательство. Рассмотрим многообразие $\mathbf{K}_3(n)$, определенное тождествами

$$\forall x \forall y \big[f_1\big(f_1(x)\big) = f_1\big(f_1(y)\big) = f_1\big(f_2(y)\big) \big],$$
$$\forall x \forall y \big[f_2\big(f_2(x)\big) = f_2\big(f_2(y)\big) = f_2\big(f_1(y)\big) \big],$$
$$\forall x \big[f_1\big(f_1(x)\big) = f_2\big(f_2(x)\big) \big],$$
$$\forall x \big[f_i(x) = x \big], \quad i > 2.$$

Нетрудно показать, что решетки $\mathrm{L}_q(\mathbf{K}_3)$ и $\mathrm{L}_q\big(\mathbf{K}_3(n)\big)$ изоморфны. Из теоремы 1 следует, что $\mathbf{K}_3(n)$ — минимальное $\mathcal{Q}$-универсальное многообразие. $\square$

Замечание. В пленарном докладе на конференции по универсальной алгебре (Дармштадт, 1995) В. А. Горбунов высказал гипотезу о том, что (по крайней мере, в локально конечном случае) для многих многообразий $\mathbf{V}$ классических алгебр должно выполняться следующее условие:

$$\begin{array}{l} \text{для любого подмногообразия } \mathbf{W} \subseteq \mathbf{V} \\ \text{или } \mathbf{W} \text{ — } \mathcal{Q}\text{-универсальное многообразие,} \\ \text{или решетка } \mathrm{L}_q(\mathbf{W}) \text{ дистрибутивна,} \\ \text{или } |\mathrm{L}_q(\mathbf{W})| \leqslant \omega. \end{array} \tag{20}$$

Следствие 3 дает примеры локально конечных многообразий, для которых это условие выполняется. Более того, если $\mathbf{V}_0$ — минимальное $\mathcal{Q}$-универсальное подмногообразие многообразия $\mathbf{V}$ и условие (20) справедливо для $\mathbf{V}_0$, то оно выполняется для любого многообразия $\mathbf{W}$ такого, что $\mathbf{V}_0 \subseteq \mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$. Естественно возникают два вопроса.

1. *Верно ли, что любое $\mathcal{Q}$-универсальное многообразие унарных алгебр сигнатуры $\{f, g\}$ содержит минимальное $\mathcal{Q}$-универсальное подмногообразие*?
2. *Верно ли, что для любого минимального $\mathcal{Q}$-универсального многообразия унарных алгебр сигнатуры $\{f, g\}$ выполняется условие* (20)?

Данные вопросы представляются достаточно сложными, так как, например, неизвестно, каждое ли alg-универсальное многообразие унарных алгебр сигнатуры $\{f, g\}$ содержит минимальное alg-универсальное подмногообразие (см. [10, с. 181]).

В связи с теоремой 1 и следствием 2 интересным представляется следующий вопрос: *существуют ли $\mathcal{Q}$-универсальные, но не* alg*-универсальные подмногообразия многообразия* $\mathbf{I}$?

Автор выражает благодарность А. Д. Больботу и М. С. Шеремету за ряд ценных замечаний.

Литература

1. *Горбунов В. А.* *Алгебраическая теория квазимногообразий.* Новосибирск: Научная книга, 1999.
2. *Кравченко А. В.* О решеточной сложности квазимногообразий графов и эндографов // *Алгебра и логика.* 1997. Т. 36, № 3. С. 273–281.
3. *Кравченко А. В.* $\mathcal{Q}$-Универсальные квазимногообразия графов // *Алгебра и логика.* 2002. Т. 41. (в печати).
4. *Тропин М. П.* Вложимость свободной решетки в решетку квазимногообразий дистрибутивных решеток с псевдодополнениями // *Алгебра и логика.* 1983. Т. 22, № 2. С. 159–167.
5. *Туманов В. И.* О квазимногообразиях решеток // XVI Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. Ч. 2. Л., 1981. С. 135.
6. *Adams M. E.*, *Dziobiak W.* Finite-to-finite universal quasivarieties are Q-universal // *Algebra Universalis.* 2001. V. 46, N 1–2. P. 253–283.
7. *Dziobiak W.* On lattice identities satisfied in subquasivariety lattices of varieties of modular lattices // *Algebra Universalis.* 1986. V. 22, N 2–3. P. 205–214.
8. *Hedrlín Z.*, *Pultr A.* On full embeddings of categories of algebras // *Illinois J. Math.* 1966. V. 10, N 3. P. 392–406.
9. *Pultr A.*, *Sichler J.* Primitive classes of algebras with two unary idempotent operations, containing all algebraic categories as full subcategories // *Comment. Math. Univ. Carolin.* 1969. V. 10, N 3. P. 425–445.
10. *Pultr A.*, *Trnková V.* *Combinatorial, Algebraic and Topological Representations of Groups, Semigroups and Categories.* Prague: Academia, 1980.
11. *Sheremet M. S.* Quasivarieties of Cantor algebras // *Algebra Universalis.* 2001. V. 46, N 1–2. P. 193–201.
12. *Sichler J.* Concerning minimal primitive classes of algebras containing any category of algebras as a full subcategory // *Comm. Math. Univ. Carolin.* 1968. V. 9, N 4. P. 627–635.

Кравченко Александр Владимирович

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, РОССИЯ.
E-mail: avk@usa.com

Статья поступила
2 октября 2000 г.