из которого при выборе параметра α, удовлетворяющего условиям

$$\alpha > \frac{\|c\|_{L_q(\Omega)}+\|a_x\|_{L_q(\Omega)}+\|b_y\|_{L_q(\Omega)}}{\sqrt{\alpha}} C_6+\operatorname*{vrai\,max}_{(x,\,y)\in\Omega}(2|a|+|b|)+2\sqrt{\alpha}+C_7,$$

$$\alpha^2 > \frac{(1+\alpha^2)C_6}{\sqrt{\alpha}}(\|c\|_{L_q(\Omega)}+\|a_x\|_{L_q(\Omega)}+\|b_y\|_{L_q(\Omega)})+\alpha^{3/2}+C_7,$$

вытекает оценка

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_8\|f\|_{L_p(\Omega)}, \quad p>1,$$

следствием которой в силу равенства $e^{\alpha x}v_x=u(x, y)$ является неравенство (15).

Теперь наша задача состоит в том, чтобы снять ограничения (14). Пусть кроме W_2^1-решения $u(x, y)$ задачи (3), являющегося решением из $\tilde{Q}(\Omega)$ соответствующей задачи для уравнения в характеристических переменных, существует еще одно W_2^1-решение $\tilde{u}(x, y)$. Поставим вопрос о существовании, единственности и свойствах W_2^1-решения задачи

$$w_{xx}-w_{yy}=F(x, y), \quad w|_{AB\cup AC}=0, \tag{19}$$

где $F(x, y)=f(x, y)-a\tilde{u}_x(x, y)-b\tilde{u}_y(x, y)-c\tilde{u}(x, y)\in L_2(\Omega)$.

Из оценки (15) следует единственность W_2^1-решения первой задачи Дарбу с волновым оператором, которое в данном случае совпадает с функцией $\tilde{u}(x, y)$. В силу теоремы 2 задача (19) имеет решение, являющееся $\tilde{Q}(\Omega)$-решением соответствующей задачи для уравнения в характеристических переменных, а, значит, функция $\tilde{u}(x, y)$ совпадает с функцией $u(x, y)$, так как в переменных $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ эти функции удовлетворяют одному и тому же уравнению. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Авторы благодарят В. А. Ильина за внимание к работе.

Литература

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М., 1970.
3. Врагов В. Н. // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 7—16.
4. Нахушев А. М. // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194, № 1. С. 31—34.
5. Попиванов Н. И. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 80—93.
6. Габов С. А., Свешников А. Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М., 1986.
7. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.
8. Моисеев Е. И. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 2. С. 325—338.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 9 июля 1987 г.

УДК 517.956

М. Г. КАРАТОПРАКЛИЕВА

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. II

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Напомним постановку рассматриваемой задачи. Пусть G — ограниченная область пространства $\mathbf{R}^m$ точек $x=(x_1, \ldots, x_m)$, являющаяся суммой двух областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ и разделяющей их $(m-1)$-мерной гладкой поверхности σ. Введем обозначения: $D=G\times(0, T)$, $D_0=\{(x, 0) : x\in G\}$, $D_T=$

$=\{(x,\ T):x\in G\}$, $S=\partial G$, $S_T=S\times(0,\ T)$, $\sigma_T=\sigma\times(0,\ T)$, $D^{(r)}=G^{(r)}\times\times(0,\ T)$, $D_0^{(r)}=\{(x,\ 0):x\in G^{(r)}\}$ и $D_T^{(r)}=\{(x,\ T):x\in G^{(r)}\}$, $r=1,\ 2$.

Рассмотрим операторы

$$\mathscr{L}^{(1)}u\equiv k^{(1)}(x,\ t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha^{(1)}(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial t}+\mathscr{A}^{(1)}u \quad \text{в} \quad \overline{D^{(1)}},$$

$$\mathscr{L}^{(2)}u\equiv k^{(2)}(x,\ t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha^{(2)}(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial t}+\mathscr{A}^{(2)}u \quad \text{в} \quad \overline{D^{(2)}},$$

где

$$\mathscr{A}^{(r)}u\equiv\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{ij}^{(r)}(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]+a_i^{(r)}(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a^{(r)}(x,\ t)u,\quad r=1,\ 2$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до m). Предполагаем, что $a_{ij}^{(r)}\in C^1(\overline{D^{(r)}})$, $k^{(r)}$, $\alpha^{(r)}$, $a^{(r)}$, $a_i^{(r)}$, $\dfrac{\partial k^{(r)}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial a^{(r)}}{\partial t}\in$ $\in C(\overline{D^{(r)}})$, $a_{ij}^{(r)}=a_{ji}^{(r)}$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ m$; $a_{ij}^{(r)}\xi_i\xi_j\geqslant\nu_r|\xi|^2$ в $\overline{D^{(r)}}$ $\forall\xi=(\xi_1,\ \ldots$ $\ldots,\ \xi_m)\in\mathbf{R}^m$, где $\nu_r=\text{const}>0$; $k^{(r)}\leqslant 0$ на $\overline{D_0^{(r)}}$ $(r=1,\ 2)$. Функция $k^{(r)}$ меняет знак в $\overline{D^{(r)}\setminus D_0^{(r)}}$ произвольным образом, так что $\mathscr{L}^{(r)}$ является оператором смешанного типа в $\overline{D^{(r)}\setminus D_0^{(r)}}$ $(r=1,\ 2)$.

Пусть $P_{0,r}^-=\{(x,\ 0)\in D_0^{(r)}:k^{(r)}(x,\ 0)<0\}$, $P_{T,r}^-=\{(x,\ T)\in D_T^{(r)}:k^{(r)}(x,$ $T)<0\}$ и $P_{T,r}^+=\{(x,\ T)\in D_T^{(r)}:k^{(r)}(x,\ T)>0\}$, $r=1,\ 2$.

Задача А. Найти функцию $u(x,\ t)$ в $\bar{D}$ такую, что

$$\mathscr{L}^{(1)}u=f^{(1)} \text{ в } D^{(1)},\quad \mathscr{L}^{(2)}u=f^{(2)} \text{ в } D^{(2)},\tag{1}$$

$$u|_{D_T}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{P_{T,1}^-\cup P_{T,2}^-}=0,\quad u|_{S_T}=0,\tag{2}$$

$$u^{(1)}|_{\sigma_T}=u^{(2)}|_{\sigma_T},\quad \gamma^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial N^{(1)}}\Big|_{\sigma_T}=\gamma^{(2)}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial N^{(2)}}\Big|_{\sigma_T},\tag{3}$$

где $f^{(r)}$ и $\gamma^{(r)}$ — заданные функции; $\dfrac{\partial}{\partial N^{(r)}}=a_{ij}^{(r)}[\cos(\vec{n},\ x_j)]\dfrac{\partial}{\partial x_i}$; $\vec{n}$ — нормаль к σ_T, внешняя по отношению к $D^{(1)}$; $u^{(r)}=u$ в $\overline{D^{(r)}}$ $(r=1,\ 2)$.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_{2,0}^1(D)$ замыкание в норме $W_2^1(D)$ множества всех функций из $C^\infty(\bar{D})$, равных нулю вблизи S_T. Отметим, что если S_T — гладкая поверхность, то $\overset{\circ}{W}{}_{2,0}^1(D)=\{v\in W_2^1(D):v=0\ \text{на}\ S_T\}$. Пусть $f^{(r)}\in L_2(D^{(r)})$, $\gamma^{(r)}\in C^1(\overline{D^{(r)}})$, $0<\gamma_{\min}^{(r)}=\min\{\gamma^{(r)}(x,\ t):(x,\ t)\in\overline{D^{(r)}}\}$, $r=1,\ 2$.

Определение. Функцию $u(x,\ t)$ будем называть обобщенным решением из $W_2^1(D)$ задачи A, если $u\in\overset{\circ}{W}{}_{2,0}^1(D)$, $u=0$ на D_T и

$$\sum_{r=1}^{2}\int_{D^{(r)}}\left\{-\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial(k^{(r)}\gamma^{(r)}\eta)}{\partial t}-a_{ij}^{(r)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial(\gamma^{(r)}\eta)}{\partial x_j}+\left[\alpha^{(r)}\frac{\partial u}{\partial t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+a_i^{(r)}\frac{\partial u}{\partial x_i}+a^{(r)}u\right]\gamma^{(r)}\eta\right\}dxdt=\sum_{r=1}^{2}\int_{D^{(r)}}f^{(r)}\gamma^{(r)}\eta\,dxdt\tag{4}$$

$\forall \eta \in W^1_{2,0}(D)$, равной нулю в m-мерных окрестностях в D_0 множеств $P^-_{0,1}$ и $P^-_{0,2}$ и в m-мерных окрестностях в D_T множеств $P^+_{T,1}$ и $P^+_{T,2}$ (эти окрестности могут быть разными для различных функций η).

В работе [2] доказана единственность обобщенного решения из $W^1_2(D)$ задачи A в случае, когда $k^{(r)} \leqslant 0$ на $\overline{D^{(r)}_T}$, $r=1, 2$. В работе [1] доказано существование такого решения. В настоящей работе исследуется его гладкость. Краткое изложение полученных результатов опубликовано в заметке [3].

В дальнейшем будем предполагать, что $\bar{\sigma} \cap S = \varnothing$ и σ, $S \in C^2$ при $m \geqslant 2$. Пусть $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ — мультииндекс и $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_m$. Производную $\partial^{|\beta|}/\partial^{\beta_1}_{x_1} \ldots \partial^{\beta_m}_{x_m}$ будем обозначать для краткости через ∂^β_x или $\partial^{\beta_1}_{x_1} \ldots \partial^{\beta_m}_{x_m}$. Введем обозначения: $\|\cdot\|_{0,D}$ — норма в $L_2(D)$; $\|\cdot\|_{1,D}$ — норма в $W^1_2(D)$; $(\cdot, \cdot)_{0,D}$ — скалярное произведение в $L_2(D)$.

Пусть $H^l(D)$ $(l=0, 1, 2, \ldots)$ — гильбертово пространство функций $u \in L_2(D)$, имеющих обобщенные производные $\partial^\beta_x u \in L_2(D)$, $|\beta| \leqslant l$, с нормой $|u|^2_{l,D} = \int\limits_D \sum\limits_{|\beta| \leqslant l} (\partial^\beta_x u)^2 dxdt$. Обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^l(D)$ замыкание $C^\infty_0(D)$ в норме $H^l(D)$. Очевидно $H^0(D) = L_2(D)$, $W^l_2(D) \subset H^l(D)$ и $\overset{\circ}{W}{}^l_2(D) \subset \overset{\circ}{H}{}^l(D)$ для $l \geqslant 1$. Легко видеть, что $W^1_{2,0}(D) \subset \overset{\circ}{H}{}^1(D)$.

Пусть G' — область в $\mathbf{R}^m$, $\bar{G}' \subset G$, $D' = G' \times (0, T)$ и $0 < h < \operatorname{dist}(\partial G, \partial G')$. Для $w \in L_2(D)$ конечные разности $w_{x_i}(x, t) = \frac{1}{h}[w(x+he_i, t) - w(x, t)]$ и $w_{\bar{x}_i}(x, t) = \frac{1}{h}[w(x, t) - w(x-he_i, t)]$, где e_i — единичный вектор оси Ox_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, принадлежат $L_2(D')$. Если v, $w \in L_2(D)$ и $v=0$ в $D \setminus D'$, то легко показать, что

$$(w_{x_i}, v)_{0,D} = -(w, v_{\bar{x}_i})_{0,D}, \quad i=1, \ldots, m. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что если $w \in H^1(D)$, то w_{x_i} и $w_{\bar{x}_i}$ имеют обобщенные производные первого порядка относительно $x_1, \ldots, x_m$ из $L_2(D')$ и

$$\frac{\partial w_{x_i}}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)_{x_i}, \quad \frac{\partial w_{\bar{x}_i}}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)_{\bar{x}_i}, \quad i, j=1, \ldots, m. \tag{6}$$

Отметим, что аналогично леммам 11 и 11′ [4, с. 351, 352] доказывается

Лемма 1. *а) Пусть $w \in H^1(D)$ и w принадлежит замыканию $C^1(\bar{D})$ в норме $H^1(D)$. Тогда $\|w_{x_i}\|_{0,D'} \leqslant \left\|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_{0,D}$ и $\left\|w_{x_i} - \frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_{0,D'} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ для $1 \leqslant i \leqslant m$.*

б) Если $w \in \overset{\circ}{H}{}^1(D)$ и w продолжена вне D при $0 < t < T$ как нуль, то $\|w_{x_i}\|_{0,D} \leqslant \left\|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_{0,D}$ и $\left\|w_{x_i} - \frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_{0,D} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ для $1 \leqslant i \leqslant m$. а) и б) справедливы и для $w_{\bar{x}_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Лемма 2. *Пусть σ, $S \in C^{l+2}$ для $m \geqslant 2$, где $l \geqslant 0$ — целое число. Пусть $b^{(r)}_{ij} = b^{(r)}_{ji}$, $b^{(r)}_{ij} \in C^{l+1}(\overline{D^{(r)}})$, $i, j=1, \ldots, m$; $b^{(r)}_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \mu_r|\xi|^2$ в $\overline{D^{(r)}}$ $\forall \xi \in \mathbf{R}^m$, где $\mu_r = \mathrm{const} > 0$; $b^{(r)}_i$, $b^{(r)} \in C^{\max(1,l)}(\overline{D^{(r)}})$, $i=1, \ldots, m$; $F^{(r)} \in \overset{\circ}{H}{}^l(D^{(r)})$ $(r=1, 2)$. Пусть $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(D)$ и выполняется*

$$\sum_{r=1}^{2}\int_{D^{(r)}}\left[-b_{ij}^{(r)}\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_j}+\left(b_i^{(r)}\frac{\partial v}{\partial x_i}+b^{(r)}v-F^{(r)}\right)\eta\right]dxdt=0 \qquad (7)$$

$\forall\eta\in\overset{\circ}{H}{}^1(D)$. *Тогда* $v\in H^{l+2}(D^{(r)})$, $r=1, 2$.

Доказательство. Лемму докажем методом математической индукции. Пусть $m=1$. Так как $b_{11}^{(r)}>0$ в $\overline{D^{(r)}}$, то из (7) получаем

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)_{0, D^{(r)}}=-(\chi_r, \varphi)_{0, D^{(r)}} \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(D^{(r)}), \qquad (8)$$

где $\chi_r=\left[F^{(r)}-b^{(r)}v-\left(b_1^{(r)}+\frac{\partial b_{11}^{(r)}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial v}{\partial x_1}\right](b_{11}^{(r)})^{-1}$, $r=1, 2$. Если $l=0$, то $\chi_r\in L_2(D^{(r)})$ и из (8) следует, что $v\in H^2(D^{(r)})$, $r=1, 2$. Предположим, что лемма справедлива для некоторого целого числа $l_0\geqslant0$ и ее требования выполняются для l_0+1. Тогда $v\in H^{l_0+2}(D^{(r)})$, $\chi_r\in H^{l_0+1}(D^{(r)})$, и в силу (8) заключаем, что $v\in H^{l_0+3}(D^{(r)})$, $r=1, 2$. Случай $m=1$ доказан.

Пусть $m\geqslant2$. Заметим, что если v имеет обобщенную производную $\partial_x^\beta v$, $|\beta|\leqslant l+2$, из L_2 в достаточно малой окрестности любой точки из $\overline{D^{(r)}}$, то при помощи разложения единицы можно показать, что v имеет обобщенную производную $\partial_x^\beta v$ из $L_2(D^{(r)})$. Следовательно, если $v\in H^{l+2}$ в достаточно малой окрестности любой точки из $\overline{D^{(r)}}$, то $v\in H^{l+2}(D^{(r)})$.

Предположим, что $l=0$. Пусть $\varphi(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^m)$, $\varphi=0$ вблизи σ и в $G\setminus\overline{G^{(r)}}$, и $w=\varphi v$. Из равенства (7) следует, что

$$\int_{D^{(r)}}\left[-b_{ij}^{(r)}\frac{\partial w}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_j}+\left(b_i^{(r)}\frac{\partial w}{\partial x_i}+b^{(r)}w-\Phi^{(r)}\right)\eta\right]dxdt=0$$

$$\forall\eta\in C_0^\infty(D^{(r)}),$$

где $\Phi^{(r)}=\varphi F^{(r)}+b_{ij}^{(r)}\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(b_{ij}^{(r)}v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)-vb_i^{(r)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$. Очевидно $w\in\overset{\circ}{H}{}^1(D)$ и $\Phi^{(r)}\in L_2(D^{(r)})$ и из леммы 2 работы [5] вытекает, что $w\in H^2(D^{(r)})$. Следовательно, $v\in H^2$ в окрестности любой точки из $\overline{D^{(r)}}\setminus\overline{\sigma}_T$, $r=1, 2$.

Пусть теперь $x^0\in\sigma$. Так как $\sigma\in C^2$, то в достаточно малой окрестности Ω точки x^0, $\overline{\Omega}\subset G$, существует C^2-диффеоморфизм $\Gamma: y=y(x)$ с якобианом, равным 1, такой, что $\Gamma(\Omega\cap\sigma)\subset\{y\in\mathbf{R}^m: y_i=0\}$. Без ограничения общности можно предполагать, что $i=m$. Введем обозначения: Γ^{-1}: $x=x(y)$, $\tilde\Omega=\Gamma(\Omega)$, $\tilde\sigma=\Gamma(\Omega\cap\sigma)$, $\tilde\Omega^{(r)}=\Gamma(\Omega\cap G^{(r)})$, $r=1, 2$.

Если $\psi\in\overset{\circ}{H}{}^1(\tilde\Omega\times(0, T))$ и $\eta(x, t)=\psi(y(x), t)$, то $\eta\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega\times(0, T))$. Считая $\eta=0$ в $D\setminus\{\Omega\times(0, T)\}$ и делая в (7) замену переменных $x=x(y)$, $t=s$, получаем

$$\sum_{r=1}^{2}\int_{\tilde\Omega^{(r)}\times(0,T)}\left[-c_{ij}^{(r)}\frac{\partial w}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y_j}+\left(c_i^{(r)}\frac{\partial w}{\partial y_i}+c^{(r)}w-\Phi^{(r)}\right)\psi\right]dyds=0, \qquad (9)$$

где $c_{ij}^{(r)}(y, s)=\sum_{p,q=1}^{m}b_{pq}^{(r)}(x(y), s)\frac{\partial y_i}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_q}$, $c_i^{(r)}(y, s)=\sum_{p=1}^{m}b_p^{(r)}(x(y), s)\times$

$\times \dfrac{\partial y_i}{\partial x_p}$, $c^{(r)}(y, s) = b^{(r)}(x(y), s)$, $\Phi^{(r)}(y, s) = F^{(r)}(x(y), s)$ и $w(y, s) = v(x(y), s)$. Легко видеть, что $c_{ij}^{(r)} = c_{ji}^{(r)}$, $i, j = 1, \ldots, m$, и существует постоянная $\tilde{\mu}_r > 0$ такая, что $c_{ij}^{(r)} \xi_i \xi_j \geqslant \tilde{\mu}_r |\xi|^2$ в $\overline{\tilde{\Omega}^{(r)}} \times [0, T]$ $\forall \xi \in \mathbf{R}^m$. Отметим, что $c_{ij}^{(r)}$, $c_i^{(r)}$, $c^{(r)} \in C^1(\overline{\tilde{\Omega}^{(r)}} \times [0, T])$, $w \in H^1(\tilde{\Omega} \times (0, T))$ и $\Phi^{(r)} \in L_2(\tilde{\Omega}^{(r)} \times (0, T))$.

Пусть $\tilde{\Omega}'$, $\tilde{\Omega}''$ и $\tilde{\Omega}'''$ суть такие окрестности точки $y^0 = y(x^0)$, что $\tilde{\Omega}'$ и $\tilde{\Omega}''$ — выпуклые множества и $\overline{\tilde{\Omega}'''} \subset \tilde{\Omega}'' \subset \overline{\tilde{\Omega}''} \subset \tilde{\Omega}' \subset \overline{\tilde{\Omega}'} \subset \tilde{\Omega}$. Пусть $\zeta \in C_0^\infty(\tilde{\Omega})$, $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $\zeta = 1$ в $\overline{\tilde{\Omega}'''}$ и $\operatorname{supp} \zeta = \overline{\tilde{\Omega}''}$. Для $0 < h < h_0 = \operatorname{dist}(\partial\tilde{\Omega}', \partial\tilde{\Omega}'')$ и $1 \leqslant p \leqslant m-1$ функции ζw_{y_p} и $\psi = \zeta(w_{y_p}\zeta)_{\bar{y}_p}$ принадлежат $\overset{\circ}{H}{}^1(\tilde{\Omega}' \times (0, T))$. Подставляя ψ в (9) и применяя (5), (6) и (2.2), (2.3) [6, с. 280], получаем

$$\sum_{r=1}^{2} \int\limits_{\tilde{\Omega}^{(r)} \times (0,T)} \overset{+p}{c_{ij}^{(r)}} \zeta \left(\frac{\partial w}{\partial y_i}\right)_{y_p} \zeta \left(\frac{\partial w}{\partial y_j}\right)_{y_p} dy ds = \sum_{r=1}^{2} \int\limits_{\tilde{\Omega}^{(r)} \times (0,T)} \Bigg\{ \Bigg[\zeta \Bigg(\Phi^{(r)} -$$

$$- c^{(r)} w - c_i^{(r)} \frac{\partial w}{\partial y_i} \Bigg) (w_{y_p}\zeta)_{\bar{y}_p} \Bigg] + \left[(w_{y_p}\zeta)_{\bar{y}_p} c_{ij}^{(r)} \frac{\partial w}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y_j} \right] -$$

$$- \left[\zeta w_{y_p} \overset{+p}{c_{ij}^{(r)}} \frac{\partial \zeta}{\partial y_j} \left(\frac{\partial w}{\partial y_i} \right)_{y_p} \right] - \left[\zeta \zeta_{y_p} \overset{+p}{c_{ij}^{(r)}} \frac{\partial \overset{+p}{w}}{\partial y_i} \left(\frac{\partial w}{\partial y_j} \right)_{y_p} \right] -$$

$$- \left[\zeta_{y_p} w_{y_p} \overset{+p}{c_{ij}^{(r)}} \frac{\partial \overset{+p}{w}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y_j} \right] - \left[\zeta^2 (c_{ij}^{(r)})_{y_p} \frac{\partial w}{\partial y_i} \left(\frac{\partial w}{\partial y_j} \right)_{y_p} \right] -$$

$$- \left[\zeta w_{y_p} (c_{ij}^{(r)})_{y_p} \frac{\partial w}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y_j} \right] \Bigg\} dy ds, \tag{10}$$

где $\overset{+p}{u}(y, s) = u(y + h e_p, s)$, $1 \leqslant p \leqslant m-1$. Интегралы от выражений в квадратных скобках в правой части (10) оцениваем по абсолютной величине сверху, применяя неравенства Буняковского [6, с. 33, формула (1.4)], Коши с весом [6, с. 33, формула (1.3)] и Коши для сумм [7, с. 19, формула (5)] и формулу конечных приращений. Левую часть (10) оцениваем снизу, учитывая свойства функций $c_{ij}^{(r)}$, $i, j = 1, \ldots, m$. В результате получаем неравенство

$$\sum_{r=1}^{2} \left(\tilde{\mu}_r - \frac{3\varepsilon}{2} \right) \sum_{i=1}^{m} \left\| \zeta \frac{\partial w_{y_p}}{\partial y_i} \right\|^2_{0, \tilde{\Omega}^{(r)} \times (0,T)} \leqslant \varepsilon \|(\zeta w_{y_p})_{\bar{y}_p}\|^2_{0, \tilde{\Omega}' \times (0,T)} +$$

$$+ \delta_1 \|w_{y_p}\|^2_{0, \tilde{\Omega}'' \times (0,T)} + \delta_2 |w|^2_{1, \tilde{\Omega} \times (0,T)} + \delta_3 \sum_{r=1}^{2} \|\Phi^{(r)}\|^2_{0, \tilde{\Omega}^{(r)} \times (0,T)}, \tag{11}$$

где положительные постоянные δ_1, δ_2 и δ_3 не зависят от w и h.

Легко видеть, что w принадлежит замыканию $C^1(\overline{\tilde{\Omega}} \times [0, T])$ в норме $H^1(\tilde{\Omega} \times (0, T))$. Тогда в силу леммы 1а)

$$\|w_{y_p}\|_{0, \tilde{\Omega}'' \times (0,T)} \leqslant \left\| \frac{\partial w}{\partial y_p} \right\|_{0, \tilde{\Omega}' \times (0,T)} \quad \text{для } 0 < h < h_0, \tag{12}$$

$$\left\| w_{y_p} - \frac{\partial w}{\partial y_p} \right\|_{0, \tilde{\Omega}'' \times (0,T)} \xrightarrow[h \to 0]{} 0. \tag{13}$$

Так как $\zeta w_{y_p} \in \overset{\circ}{H}{}^1(\tilde{\Omega}' \times (0, T))$, то, применяя лемму 1б), неравенство треугольника [6, с. 33] и (12), получаем оценку $\|(\zeta w_{y_p})_{\bar{y}_p}\|_{0,\tilde{\Omega}'\times(0,T)} \leqslant \leqslant \left[\max_{\tilde{\Omega}''\times[0,T]} \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y_p}\right|\right] \left\|\frac{\partial w}{\partial y_p}\right\|_{0,\tilde{\Omega}'\times(0,T)} + \left\|\zeta \frac{\partial w_{y_p}}{\partial y_p}\right\|_{0,\tilde{\Omega}'\times(0,T)}$. Таким образом, при $\varepsilon = (1/6) \max(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)$ из (11) выводим

$$|w_{y_p}|_{1,\tilde{\Omega}'''\times(0,T)} \leqslant c \quad \text{для } 0 < h < h_0,$$

где постоянная c не зависит от h. Отсюда и из (13) в силу леммы 5.2 работы [8] следует, что $\dfrac{\partial w}{\partial y_p} \in H^1(\tilde{\Omega}''' \times (0, T))$, $1 \leqslant p \leqslant m-1$.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_r''' \times (0, T))$, где $\tilde{\Omega}_r''' = \tilde{\Omega}''' \cap \tilde{\Omega}^{(r)}$. Так как $c_{mm}^{(r)} > 0$ в $\overline{\tilde{\Omega}_r'''} \times [0, T]$, то $\psi = \varphi (c_{mm}^{(r)})^{-1} \in C_0^\infty (\tilde{\Omega}_r''' \times (0, T))$. Подставляя ψ в (9) и интегрируя по частям, имеем, что

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y_m}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_m}\right)_{0,\tilde{\Omega}_r'''\times(0,T)} = (-\chi_r, \varphi)_{0,\tilde{\Omega}_r'''\times(0,T)}, \tag{14}$$

где

$$\chi_r = (c_{mm}^{(r)})^{-1} \left[\Phi^{(r)} - c^{(r)} w - \sum_{i=1}^{m} c_i^{(r)} \frac{\partial w}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial y_m} \left(c_{im}^{(r)} \frac{\partial w}{\partial y_i}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(c_{ij}^{(r)} \frac{\partial w}{\partial y_i}\right) - \frac{\partial w}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial c_{mm}^{(r)}}{\partial y_m}\right] \in L_2(\tilde{\Omega}_r''' \times (0, T)). \tag{15}$$

Следовательно, w имеет обобщенную производную $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y_m^2} \in L_2(\tilde{\Omega}_r''' \times (0, T))$.

Таким образом, $w \in H^2(\tilde{\Omega}_r''' \times (0, T))$, $r = 1, 2$. Так как Γ является C^2-диффеоморфизмом, то, согласно [9, с. 132], $v \in H^2(\Omega_r''' \times (0, T))$, где $\Omega_r''' = \Gamma^{-1}(\tilde{\Omega}_r''')$, $r = 1, 2$. Случай $l = 0$ доказан.

Предположим, что лемма справедлива для некоторого целого числа $l_0 \geqslant 0$ и ее требования выполняются для l_0+1. Тогда $v \in H^{l_0+2}(D^{(r)})$, $r = 1, 2$, в силу индукционного предположения. Так же, как и в случае $l=0$, при помощи леммы 2 из [5] убеждаемся, что $v \in H^{l_0+3}$ в достаточно малой окрестности любой точки из $\overline{D^{(r)}} \setminus \bar{\sigma}_T$, $r = 1, 2$.

Пусть $x^0 \in \sigma$. Таким способом, как в случае $l = 0$, получаем тождество (9). Однако теперь Γ является C^{l_0+3}-диффеоморфизмом. Следовательно, $w \in H^{l_0+2}(\tilde{\Omega}^{(r)} \times (0, T))$, $r=1, 2$, $w \in H^1(\tilde{\Omega} \times (0, T))$ и $c_i^{(r)}, c^{(r)} \in C^{l_0+1}(\overline{\tilde{\Omega}^{(r)}} \times [0, T])$, $c_{ij}^{(r)} \in C^{l_0+2}(\overline{\tilde{\Omega}^{(r)}} \times [0, T])$, $\Phi^{(r)} \in H^{l_0+1}(\tilde{\Omega}^{(r)} \times (0, T))$.

Пусть β — такой мультииндекс, что $|\beta| = l_0 + 1$ и $\beta_m = 0$. Очевидно $\mathscr{V} = \partial_y^\beta w \in H^1(\tilde{\Omega}^{(r)} \times (0, T))$, $r=1, 2$. Возьмем в (9) $\psi = \partial_y^\beta \varphi$, где $\varphi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega} \times \times (0, T))$. Интегрированием по частям получаем

$$\sum_{r=1}^{2} \int_{\tilde{\Omega}^{(r)}\times(0,T)} \left[c_{ij}^{(r)} \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} + \varphi \partial_y^\beta \Phi^{(r)} + \mathscr{K}_{ij}^{(r)}(w) \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} - \right.$$

$$\left. - \varphi \partial_y^\beta \left(c_i^{(r)} \frac{\partial w}{\partial y_i}\right) - \varphi \partial_y^\beta (c^{(r)} w)\right] dy ds = 0, \tag{16}$$

где $\mathcal{K}_{ij}^{(r)}(w)=\partial_y^{\beta}\left(c_{ij}^{(r)}\dfrac{\partial w}{\partial y_i}\right)-c_{ij}^{(r)}\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_i}\in H^1(\tilde{\Omega}^{(r)}\times(0,\ T)),\ r=1,\ 2$. Ясно, что равенство (16) выполняется и для любой функции $\varphi\in \mathring{H}^1(\tilde{\Omega}\times(0,\ T))$.

Если функция ζ такая, как в случае $l=0$, то для $1\leqslant p\leqslant m-1$ и $0<h<\operatorname{dist}(\partial\tilde{\Omega}',\ \partial\tilde{\Omega}'')$ функции $\zeta\mathcal{V}_{y_p}$ и $\varphi=\zeta(\zeta\mathcal{V}_{y_p})_{\bar{y}_p}$ принадлежат $\mathring{H}^1(\tilde{\Omega}\times(0,\ T))$. Подставляя φ в (16), так же, как и в случае $l=0$, выводим оценку

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial \mathcal{V}_{y_p}}{\partial y_i}\right|^2_{0,\tilde{\Omega}'''\times(0,T)}\leqslant \delta_4+\delta_5\|\mathcal{V}_{y_p}\|^2_{0,\tilde{\Omega}''\times(0,T)}, \tag{17}$$

где положительные постоянные δ_4 и δ_5 не зависят от h. Нетрудно, показать, что $\mathcal{V}$ принадлежит замыканию $C^1(\tilde{\bar{\Omega}}\times[0,\ T])$ в норме $H^1(\tilde{\Omega}\times(0,\ T))$. В силу леммы 1а) выполняются оценки (12) и (13) с $\mathcal{V}$ на месте w. Тогда ввиду (17), как в случае $l=0$, заключаем, что $\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial y_p}\in H^1(\tilde{\Omega}'''\times(0,\ T))$, $1\leqslant p\leqslant m-1$. Этим показано, что w имеет обобщенные производные $\partial_y^{\beta}w$, $|\beta|=l_0+3$ и $\beta_m=0$ или $\beta_m=1$, из $L_2(\tilde{\Omega}'''\times(0,\ T))$.

Так как $l_0\geqslant 0$, то справедливы (14) и (15). В силу только что доказанного χ_r имеет обобщенные производные $\partial_y^{\beta}\chi_r$, $|\beta|=l_0+1$ и $\beta_m=0$, из $L_2(\tilde{\Omega}_r'''\times(0,\ T))$, $r=1,\ 2$. Тогда w имеет обобщенные производные $\partial_y^{\beta}w$, $|\beta|=l_0+3$ и $\beta_m=2$, из $L_2(\tilde{\Omega}_r'''\times(0,\ T))$, $r=1,\ 2$.

Пусть β_m^0 — целое число, $2\leqslant\beta_m^0\leqslant l_0+2$. Предположим, что существуют все обобщенные производные $\partial_y^{\beta}w\in L_2(\tilde{\Omega}_r'''\times(0,\ T))$, где $|\beta|=l_0+3$ и $2\leqslant\beta_m\leqslant\beta_m^0$. Пусть целые числа $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_{m-1}$ такие, что $\beta_1+\cdots+\beta_{m-1}+\beta_m^0=l_0+2$. Тогда χ_r имеет обобщенную производную $\partial_{y'}^{\beta'}\partial_{y_m}^{\beta_m^0-1}\chi_r\in L_2(\tilde{\Omega}_r'''\times(0,\ T))$, где $\partial_{y'}^{\beta'}=\partial_{y_1}^{\beta_1}\ldots\partial_{y_{m-1}}^{\beta_{m-1}}$, и из (14) следует, что w имеет обобщенную производную $\partial_{y'}^{\beta'}\partial_{y_m}^{\beta_m^0+1}w\in L_2(\tilde{\Omega}_r'''\times(0,\ T))$, $r=1,\ 2$.

Таким образом, $w\in H^{l_0+3}(\tilde{\Omega}_r'''\times(0,\ T))$, $r=1,\ 2$, т. е. $v\in H^{l_0+3}(\Omega_r'''\times(0,\ T))$, $r=1,\ 2$, и лемма справедлива для l_0+1. Доказательство леммы закончено.

Теперь покажем, что при предположениях какой-либо из теорем 1, 2, 3 работы [1] и дополнительных условиях

$$k^{(r)}\leqslant 0 \text{ на } \overline{D_T^{(r)}};\ a_{ij}^{(r)}=a_{ij}^{(r)}(x),\ i,\ j=1,\ \ldots,\ m,\ \gamma^{(r)}=\gamma^{(r)}(x),\ r=1,\ 2, \tag{18}$$

$$a_i^{(r)},\ a^{(r)}\in C^1(\overline{D^{(r)}}),\ \gamma^{(r)}\in C^2(\overline{G^{(r)}}),\ i=1,\ \ldots,\ m \text{ и } r=1,\ 2, \tag{19}$$

существует единственное обобщенное решение из $W_2^1(D)$ задачи A.

Пусть выполняются условия

$$\frac{\partial^2 k^{(r)}}{\partial t^2},\ \frac{\partial\alpha^{(r)}}{\partial t},\ \frac{\partial^2\gamma^{(r)}}{\partial t^2}\in C(\overline{D^{(r)}}),\ r=1,\ 2, \tag{20}$$

$$\min_{\overline{D^{(r)}}}\left(\alpha^{(r)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}\right)(x,\ t)=\delta_0^{(r)}>0,\ r=1,\ 2, \tag{21}$$

$$\gamma^{(r)}\left(\alpha^{(r)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}\right)-k^{(r)}\frac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial t}\geqslant 0 \text{ в } \overline{D^{(r)}},\ r=1,\ 2, \tag{22}$$

$$-a^{(r)}\gamma^{(r)}+\frac{\partial(\alpha^{(r)}\gamma^{(r)})}{\partial t}-\frac{\partial^2(k^{(r)}\gamma^{(r)})}{\partial t^2}\geqslant 0 \text{ в } \overline{D^{(r)}},\ r=1,\ 2, \tag{23}$$

$$a_{\max}^{(r)} < 0, \quad -\nu_r (\gamma_{\min}^{(r)})^2 a_{\max}^{(r)} > 4\mu_1^{(r)}, \quad r = 1,\ 2, \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} &-a^{(r)} > B' \left\{3\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t} + 2\left[B' + \frac{\partial \gamma^{(r)}}{\partial t}(\gamma^{(r)})^{-1}\right]k^{(r)}\right\} \text{ в } \overline{D^{(r)}} \text{ и} \\ &-a^{(r)} > \frac{B'}{4}\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t} \text{ на } \overline{D_0^{(r)}},\ r = 1,\ 2, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где

$$\mu_1^{(r)} = \max_{\overline{D^{(r)}}} \sum_{i=1}^{m}\left(a_i^{(r)}\gamma^{(r)} - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(r)}\frac{\partial \gamma^{(r)}}{\partial x_j}\right)^2 (x,\ t),\quad a_{\max}^{(r)} = \max_{\overline{D^{(r)}}} a^{(r)}\ (x,\ t),$$

$$B' = \max_{l=1,2}\left\{\frac{2\mu_2^{(l)}}{\nu_l},\ 4\mu_3^{(l)},\ \frac{16\mu_1^{(l)}}{\nu_l\delta_0^{(l)}(\gamma_{\min}^{(l)})^2},\ \mu_4^{(l)}\right\}. \tag{26}$$

В формуле (26) постоянная $\mu_2^{(l)} \geqslant 0$ такая, что $\mu_2^{(l)} = 0$, если $\dfrac{\partial a_{ij}^{(l)}}{\partial t}\xi_i\xi_j \geqslant 0$ в $\overline{D^{(l)}}\ \forall\, \xi \in \mathbf{R}^m$, а в противном случае $\dfrac{\partial a_{ij}^{(l)}}{\partial t}\xi_i\xi_j \geqslant -\mu_2^{(l)}|\xi|^2$ в $\overline{D^{(l)}}\ \forall\, \xi \in \mathbf{R}^m$. Постоянная $\mu_3^{(l)}$ такая, что $\mu_3^{(l)} = 0$, если $\dfrac{\partial a^{(l)}}{\partial t} \leqslant 0$ в $\overline{D^{(l)}}$, а в противном случае $\mu_3^{(l)} = \max\limits_{\overline{D^{(l)}}}\left[-\dfrac{\partial a^{(l)}}{\partial t}(a^{(l)})^{-1}\right](x,\ t)$; $\mu_4^{(l)} = \max\limits_{\overline{D^{(l)}}}\left[-2\dfrac{\partial \gamma^{(l)}}{\partial t}(\gamma^{(l)})^{-1}\right] \times$ $\times (x,\ t)$.

Лемма 3. *Если выполняются условия (20)—(25), то существует постоянная $c > 0$ такая, что для любой функции $v \in W_2^2(D^{(r)})$, $r = 1,\ 2$, удовлетворяющей условиям (2) и (3), имеет место неравенство*

$$\|v\|_{1,D} \leqslant c\,[\|\mathscr{L}^{(1)}v\|_{0,D^{(1)}} + \|\mathscr{L}^{(2)}v\|_{0,D^{(2)}}]. \tag{27}$$

Доказательство. Легко видеть, что существует число λ такое, что $\lambda > B' \geqslant 0$ и выполняются условия (25) с λ на месте B'. Пусть $v \in W_2^2(D^{(r)})$, $r = 1,\ 2$, и удовлетворяет условиям (2) и (3). Тогда $v \in W_2^1(D)$. Полагая $q(t) = \exp(\lambda t)$, интегрированием по частям получаем

$$\sum_{r=1}^{2}\int_{D^{(r)}} q\gamma^{(r)}\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\lambda}{2}v\right)\mathscr{L}^{(r)}v\,dxdt = \sum_{r=1}^{2}(I_1^{(r)} + \ldots + I_7^{(r)}) =$$

$$= \sum_{r=1}^{2}\left\{\int_{D^{(r)}}\left[\gamma^{(r)}q\left(\alpha^{(r)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}k^{(r)}q\frac{\partial \gamma^{(r)}}{\partial t}\right]\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dxdt +\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{D^{(r)}}\sum_{i,\,j=1}^{m}\left(2\lambda q\gamma^{(r)}a_{ij}^{(r)} + q\gamma^{(r)}\frac{\partial a_{ij}^{(r)}}{\partial t} + qa_{ij}^{(r)}\frac{\partial \gamma^{(r)}}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}dxdt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{D^{(r)}}\left[-a^{(r)}q\left(\lambda\gamma^{(r)} + \frac{\partial \gamma^{(r)}}{\partial t}\right) - \gamma^{(r)}q\frac{\partial a^{(r)}}{\partial t}\right]v^2 dxdt +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\int_{D^{(r)}}\left[-a^{(r)}\gamma^{(r)}q + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial(\alpha^{(r)}\gamma^{(r)}q)}{\partial t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2(k^{(r)}\gamma^{(r)}q)}{\partial t^2}\right]v^2 dxdt +$$

$$+ \int_{D^{(r)}} q\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\lambda}{2}v\right)\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial v}{\partial x_i}\left(a_i^{(r)}\gamma^{(r)} - \sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{(r)}\frac{\partial \gamma^{(r)}}{\partial x_j}\right)dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D^{(r)}} q\left\{\gamma^{(r)}\left[k^{(r)}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2-\lambda k^{(r)}v\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\lambda^2k^{(r)}v^2-\frac{\lambda}{2}\alpha^{(r)}v^2+\right.\right.$$

$$\left.+a^{(r)}v^2\right]+\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{\partial(k^{(r)}\gamma^{(r)})}{\partial t}v^2-\gamma^{(r)}\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}^{(r)}\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big\}\cos(\vec{n}_r,\ t)\,ds+$$

$$\left.+\int\limits_{\partial D^{(r)}} q\gamma^{(r)}\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\lambda}{2}v\right)\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}^{(r)}\frac{\partial v}{\partial x_i}\cos(\vec{n}_r,\ x_j)\,ds\right\}, \qquad (28)$$

где через $\vec{n}_r$ обозначена нормаль к $\partial D^{(r)}$, внешняя по отношению к $D^{(r)}$. Так как $\cos(\vec{n}_r,\ t)=0$ на σ_T и S_T, $\cos(\vec{n}_r,\ x_j)=0$ на $D_0^{(r)}$ и $D_T^{(r)}$, $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ на σ_T, v удовлетворяет (2) и (3) и выполняются (24) и (25), то в силу выбора λ имеем $I_7^{(r)}=0$ и $I_6^{(r)}\geqslant \int\limits_{G^{(r)}}\left\{\frac{1}{4}(-k^{(r)})\gamma^{(r)}\left(\lambda v-\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\right.$ $+\left(-a^{(r)}-\frac{\lambda}{4}\cdot\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}\right)\frac{1}{2}\gamma^{(r)}v^2+\frac{\lambda}{4}\left[\left(\alpha^{(r)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}\right)\gamma^{(r)}-\right.$ $\left.\left.-k^{(r)}\frac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial t}\right]\right\}(x,\ 0)\,dx\geqslant 0$. Легко видеть, что $I_2^{(r)}\geqslant\frac{\lambda}{2}\nu_r\int\limits_{D^{(r)}} q\gamma^{(r)}\times$ $\times\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2dxdt$, $I_3^{(r)}\geqslant 0$, $I_1^{(r)}\geqslant\frac{\delta_0^{(r)}}{2}\int\limits_{D^{(r)}}\gamma^{(r)}q\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2dxdt$, $I_4^{(r)}\geqslant$ $\geqslant-\frac{\lambda}{8}\int\limits_{D^{(r)}}\gamma^{(r)}qa^{(r)}v^2dxdt$. Применяя к $I_5^{(r)}$ и к интегралам в левой части (28) неравенства Буняковского и Коши с весом, получаем неравенство (27). Лемма доказана.

Аналогичным образом доказываются и следующие две леммы.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия (21) и*

$$a^{(r)}\leqslant 0 \text{ и } \frac{\partial a^{(r)}}{\partial t}\leqslant 0 \text{ в } \overline{D^{(r)}}, \text{ или } a^{(r)}<0 \text{ в } \overline{D^{(r)}},\ r=1,\ 2, \qquad (29)$$

$$\gamma^{(r)}\left(\alpha^{(r)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}\right)-k^{(r)}\frac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial t}>B''k^{(r)}\gamma^{(r)} \text{ в } Q_r^+,\ r=1,\ 2, \qquad (30)$$

где $Q_r^+=\{(x,\ t)\in\overline{D^{(r)}}: k^{(r)}(x,\ t)>0\}$ *и* $B''=\max\limits_{l=1,2}\left\{\frac{16\mu_1^{(l)}}{\nu_l\,\delta_0^{(l)}(\gamma_{\min}^{(l)})^2},\ \frac{4\mu_2^{(l)}}{\nu_l},\right.$ $\left.2\mu_3^{(l)},\ \mu_4^{(l)}\right\}$. *Тогда существует постоянная* $c>0$ *такая, что имеет место (27) при любой функции* $v\in W_2^2(D^{(r)})$, $r=1,\ 2$, *удовлетворяющей (2) и (3).*

Лемма 5. *Пусть* $k^{(r)}\leqslant 0$ *в* $D^{(r)}$, $r=1,\ 2$, *и для некоторого числа* $\lambda_0\geqslant 0$

$$\alpha^{(r)}\gamma^{(r)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial(k^{(r)}\gamma^{(r)})}{\partial t}-\frac{1}{2}\lambda_0k^{(r)}\gamma^{(r)}>0 \text{ в } \overline{D^{(r)}},\ r=1,\ 2. \qquad (31)$$

Тогда существует постоянная $c>0$ *такая, что имеет место (27) при любой функции* $v\in W_2^2(D^{(r)})$, $r=1,\ 2$, *удовлетворяющей (2) и (3).*

Лемма 6. *Пусть выполняются условия (18) и (19) и* u *является обобщенным решением из* $W_2^1(D)$ *задачи A. Тогда существует последовательность функций* $\{u_\nu\}$ *такая, что* $u_\nu\in W_2^2(D^{(r)})$, $r=1,\ 2$, *и удовлетво-*

ряет (2) и (3), $\nu=1, 2, \ldots$; $\|u_\nu-u\|_{1,D}\xrightarrow[\nu\to\infty]{}0$; $\|\mathscr{L}^{(r)}u_\nu-f^{(r)}\|_{0,D^{(r)}}\xrightarrow[\nu\to\infty]{}0$ для $r=1, 2$.

Доказательство. Пусть $\tilde G$ — ограниченная область пространства $\mathbf{R}^m$. Для $v\in L_2(\tilde G\times\mathbf{R}^1)$ положим

$$v_\varepsilon(x, t)=\int_{\mathbf{R}^1} v(x, \theta)\varkappa_\varepsilon(t-\theta+2\varepsilon)d\theta, \quad \varepsilon>0, \tag{32}$$

где $\varkappa\in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $\varkappa\geqslant 0$, $\varkappa(-t)=\varkappa(t)$, $\operatorname{supp}\varkappa=[-1, 1]$, $\int_{\mathbf{R}^1}\varkappa(t)dt=1$ и $\varkappa_\varepsilon(t)=(1/\varepsilon)\varkappa(t/\varepsilon)$. Пусть $\tilde D=\tilde G\times(0, T)$. Если $v=0$ для $t>T$, то, делая замену переменных $\tau=\dfrac{1}{\varepsilon}(\theta-t-2\varepsilon)$ и применяя обобщенное неравенство Минковского [7, с. 22], из (32) получаем, что

$$\|v_\varepsilon\|_{0,\tilde D}\leqslant\|v\|_{0,\tilde D}. \tag{33}$$

Для $w\in C_0^\infty(\tilde G\times\mathbf{R}^1)$ с $\operatorname{supp} w\subset\tilde D$ таким же образом находим

$$\|w_\varepsilon-w\|_{0,\tilde D}\leqslant\sup_{|\tau|\leqslant 1}\left\{\int_{\tilde D}[w(x, t+\varepsilon(2+\tau))-w(x, t)]^2dxdt\right\}^{1/2}\longrightarrow 0,$$

откуда в силу (33) и плотности $C_0^\infty(\tilde D)$ в $L_2(\tilde D)$ следует, что

$$\|v_\varepsilon-v\|_{0,\tilde D}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0. \tag{34}$$

Пусть $u(x, t)$ продолжена для $t>T$ и $x\in G$ как нуль, а для $t<0$ и $x\in G$ — четно относительно t. Обозначим продолженную функцию через $\tilde u$. Очевидно $\tilde u\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G\times\mathbf{R}^1)\cap W_2^1(G\times(-T, 2T))$ и ввиду сказанного $\tilde u_\varepsilon\in L_2(D)$. Легко видеть, что $\tilde u_\varepsilon$ имеет обобщенные производные первого порядка из $L_2(D)$, причем $\dfrac{\partial\tilde u_\varepsilon}{\partial t}=\left(\dfrac{\partial\tilde u}{\partial t}\right)_\varepsilon$ и $\dfrac{\partial\tilde u_\varepsilon}{\partial x_i}=\left(\dfrac{\partial\tilde u}{\partial x_i}\right)_\varepsilon$, $i=1, \ldots, m$, а также обобщенные производные $\dfrac{\partial^2\tilde u_\varepsilon}{\partial t^2}(x, t)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbf{R}^1}\dfrac{\partial\tilde u}{\partial\theta}(x, \theta)\varkappa'\left(\dfrac{t-\theta}{\varepsilon}+2\right)d\theta$ и $\dfrac{\partial^2\tilde u_\varepsilon}{\partial t\partial x_i}(x, t)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbf{R}^1}\dfrac{\partial\tilde u}{\partial x_i}(x, \theta)\times\varkappa'\left(\dfrac{t-\theta}{\varepsilon}+2\right)d\theta$, $i=1, \ldots, m$, из $L_2(D)$. Нетрудно проверить, что $\tilde u_\varepsilon\in W_{2,0}^1(D)$. Тогда

$$\tilde u_\varepsilon|_{S_T}=0, \quad \tilde u_\varepsilon^{(1)}|_{\sigma_T}=\tilde u_\varepsilon^{(2)}|_{\sigma_T}. \tag{35}$$

В силу (34) и свойств функции $\tilde u_\varepsilon$ имеем, что

$$\tilde u_\varepsilon=0 \text{ для } t>T-\varepsilon \text{ и } \|\tilde u_\varepsilon-u\|_{1,D}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0. \tag{36}$$

Дальше, не вводя новых обозначений, будем считать, что коэффициенты оператора $\mathscr{L}^{(r)}$ продолжены вне $\overline{D^{(r)}}$ таким образом, что являются функциями из $L_2(G^{(r)}\times\mathbf{R}^1)$, имеющими в $\overline{G^{(r)}}\times[-2T, 2T]$ ту же гладкость, что и в $\overline{D^{(r)}}$, и что $f^{(r)}=0$ вне $D^{(r)}$. Для $\eta\in C_0^\infty(D)$ положим $\tilde\eta=\eta$ в $\bar D$ и $\tilde\eta=0$ вне $\bar D$. Если $\tilde\eta_{\varepsilon,*}(x, t)=\int_{\mathbf{R}^1}\tilde\eta(x, \theta)\varkappa_\varepsilon(t-\theta-2\varepsilon)d\theta$, то $\tilde\eta_{\varepsilon,*}\in C_0^\infty(G\times\mathbf{R}^1)$, $\tilde\eta_{\varepsilon,*}=0$ при $t<\varepsilon$, $\dfrac{\partial\tilde\eta_{\varepsilon,*}}{\partial t}=\left(\dfrac{\partial\tilde\eta}{\partial t}\right)_{\varepsilon,*}$ и $\dfrac{\partial\tilde\eta_{\varepsilon,*}}{\partial x_i}=$

$= \left(\dfrac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x_i} \right)_{\varepsilon, *}$, $i=1, \ldots, m$. Обозначим через $B(u, \eta)$ левую часть (4). Используя уже известные свойства функций $\tilde{u}_\varepsilon$ и $\tilde{\eta}_{\varepsilon, *}$, нетрудно убедиться, что

$$B(\tilde{u}_\varepsilon, \eta) = \sum_{r=1}^{2} (F_\varepsilon^{(r)} \gamma^{(r)}, \eta)_{0, D^{(r)}}, \tag{37}$$

где

$$F_\varepsilon^{(r)}(x, t) = f_\varepsilon^{(r)}(x, t) + \int_0^T \varkappa_\varepsilon(t-\theta+2\varepsilon) \left\{ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(x, \theta) \left[\alpha^{(r)}(x, t) - \alpha^{(r)}(x, \theta) + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial k^{(r)}}{\partial \theta}(x, \theta) \right] + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(x, \theta) [a_i^{(r)}(x, t) - a_i^{(r)}(x, \theta)] +$$
$$\left. + \tilde{u}(x, \theta) [a^{(r)}(x, t) - a^{(r)}(x, \theta)] \right\} d\theta - \int_0^T \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(x, \theta) \frac{\partial}{\partial t} \times$$
$$\times \{ [k^{(r)}(x, t) - k^{(r)}(x, \theta)] \varkappa_\varepsilon(t-\theta+2\varepsilon) \} d\theta.$$

Покажем, что

$$F_\varepsilon^{(r)} \in L_2(D^{(r)}) \quad \text{и} \quad \|F_\varepsilon^{(r)} - f^{(r)}\|_{0, \tilde{D}^{(r)}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0, \quad r=1, 2. \tag{38}$$

В силу (33) и (34) имеем, что $f_\varepsilon^{(r)} \in L_2(D^{(r)})$, $\|f_\varepsilon^{(r)} - f^{(r)}\|_{0, D^{(r)}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$. Пусть $\tilde{G}$ — ограниченная область пространства $\mathbf{R}^m$ и $\tilde{D}' = \tilde{G} \times (0, 2T)$. Для $v \in L_2(\tilde{D}')$ и $b \in C(\overline{\tilde{D}'})$ положим

$$(J_\varepsilon v)(x, t) = \int_0^T v(x, \theta) \varkappa_\varepsilon(t-\theta+2\varepsilon) [b(x, t) - b(x, \theta)] d\theta, \quad 0 < \varepsilon < T/3.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$\|J_\varepsilon v\|_{0, \tilde{D}} \leqslant \|v\|_{0, \tilde{D}'} \sup_{|\tau| \leqslant 1} \sup_{\tilde{D}} |b(x, t) - b(x, t+\varepsilon(2+\tau))|, \tag{39}$$

где $\tilde{D} = \tilde{G} \times (0, T)$, откуда

$$J_\varepsilon v \in L_2(\tilde{D}) \quad \text{и} \quad \|J_\varepsilon v\|_{0, \tilde{D}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0. \tag{40}$$

Пусть функция a вместе с $\partial a / \partial t$ принадлежит $C(\overline{\tilde{D}'})$. Положим

$$(\mathscr{H}_\varepsilon w)(x, t) = \int_0^T w(x, \theta) \frac{\partial}{\partial t} \{ [a(x, t) - a(x, \theta)] \varkappa_\varepsilon(t-\theta+2\varepsilon) \} d\theta. \tag{41}$$

Пусть $w \in L_2(\tilde{D})$ и равна нулю для $t > T$ и $x \in \tilde{G}$. Делая замену переменных $\tau = \varepsilon^{-1}(\theta - t - 2\varepsilon)$, используя обобщенное неравенство Минковского, применяя формулу конечных приращений к $\varepsilon^{-1}[a(x, t+\varepsilon(2+\tau)) - a(x, t)]$ и учитывая (39), заключаем, что существует постоянная $c > 0$, не зависящая от ε и w и такая, что

$$\|\mathscr{H}_\varepsilon w\|_{0, \tilde{D}} \leqslant c \|w\|_{0, \tilde{D}}, \quad 0 < \varepsilon < T/3. \tag{42}$$

Если $w \in C_0^\infty(\tilde{D})$, то, интегрируя по частям в (41) и принимая во внимание (40), заключаем, что

$$\|\mathscr{H}_\varepsilon w\|_{0, \tilde{D}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0. \tag{43}$$

Так как $C_0^\infty(\bar{D})$ плотно в $L_2(\bar{D})$ и имеет место (42), то (43) выполняется и для $w \in L_2(\bar{D})$. Таким образом, (38) доказано.

Проинтегрируем в $B(\tilde{u}_\varepsilon, \eta)$ по частям, перенеся производную по t с $k^{(r)}\eta$ на $\partial\tilde{u}_\varepsilon/\partial t$, $r=1, 2$. Тогда из леммы 2 для $l=0$ следует, что $\tilde{u}_\varepsilon \in H^2(D^{(r)})$, $r=1, 2$. Этим показано, что $\tilde{u}_\varepsilon \in W_2^2(D^{(r)})$, $r=1, 2$. Наконец, интегрируя по частям в (37), стандартным способом получаем, что $\mathcal{L}^{(r)}\tilde{u}_\varepsilon = F_\varepsilon^{(r)}$ в $D^{(r)}$, $r=1, 2$, и $\gamma^{(1)} \left.\frac{\partial\tilde{u}_\varepsilon^{(1)}}{\partial N^{(1)}}\right|_{\sigma_T} = \gamma^{(2)} \left.\frac{\partial\tilde{u}_\varepsilon^{(2)}}{\partial N^{(2)}}\right|_{\sigma_T}$. В силу (35), (36), (38) доказательство леммы закончено.

В дальнейшем будем предполагать, что $k^{(r)} \in C^1(\overline{D^{(r)}})$, $r=1, 2$. Тогда ввиду сделанных предположений относительно σ и S функция $k^{(r)}$ липшицева в $\overline{D^{(r)}}$, $r=1, 2$. Таким образом, из теорем 1—3 работы [1] и лемм 3—6 вытекают следующие теоремы.

Теорема 1. *Если выполняются условия (18)—(25), то существует единственное обобщенное решение из $W_2^1(D)$ задачи А при любых $f^{(1)} \in L_2(D^{(1)})$ и $f^{(2)} \in L_2(D^{(2)})$.*

Теорема 2. *Пусть $k^{(r)} \leqslant 0$ в $\overline{D^{(r)}}$, $r=1, 2$, и выполняются (18), (19) и (31). Тогда задача А имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(D)$ при любых $f^{(1)} \in L_2(D^{(1)})$ и $f^{(2)} \in L_2(D^{(2)})$.*

Теорема 3. *Если выполняются условия (18), (19), (21), (29) и (30), то задача А имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(D)$ при любых $f^{(1)} \in L_2(D^{(1)})$ и $f^{(2)} \in L_2(D^{(2)})$.*

Следующий очевидный результат показывает, что вопрос о гладкости обобщенного решения из $W_2^1(D)$ задачи А можно свести к вопросу о гладкости обобщенного решения из $W_2^1(D)$ задачи А для уравнений вида

$$k^{(r)}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}^{(r)}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + \alpha^{(r)}\frac{\partial v}{\partial t} + a_i^{(r)}\frac{\partial v}{\partial x_i} - M^{(r)}v = g^{(r)}$$
$$\text{в } D^{(r)},\ M^{(r)} = \text{const} > 0,\ r=1, 2. \tag{44}$$

Лемма 7. *Пусть задача А для уравнений (44) однозначно разрешима в классе обобщенных решений из $W_2^1(D)$. Тогда если u — обобщенное решение из $W_2^1(D)$ задачи А для $f^{(r)} \in L_2(D^{(r)})$, $r=1, 2$, а v — обобщенное решение из $W_2^1(D)$ задачи А для уравнений (44) с $g^{(r)} = f^{(r)} - (a^{(r)} + M^{(r)})u$, $r=1, 2$, то $u=v$.*

Теорема 4. *Пусть $l \geqslant 0$ — целое число и выполняются условия (18),*

$$a_i^{(r)} = a_i^{(r)}(x),\ i=1, \ldots, m \text{ и } r=1, 2; \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma^{(r)} \in C^{\max(2, l+1)}(\overline{G^{(r)}}),\ k^{(r)} \in C^{\max(3, l+1)}(\overline{D^{(r)}}),\ a_{ij}^{(r)} \in \\ &\in C^{l+1}(\overline{G^{(r)}}),\ a_i^{(r)} \in C^{\max(1, l)}(\overline{G^{(r)}}),\ \alpha^{(r)} \in C^{\max(2, l+1)}(\overline{D^{(r)}}), \\ &i, j=1, \ldots, m \text{ и } r=1, 2;\ S,\ \sigma \in C^{l+2} \text{ для } m \geqslant 2; \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\min_{\overline{D^{(r)}}}\left(\alpha_p^{(r)} - \frac{1}{2}\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}\right)(x, t) = \delta_p^{(r)} > 0,\ p=0, \ldots, l+1 \text{ и } r=1, 2, \tag{47}$$

где $\alpha_0^{(r)} = \alpha^{(r)}$ и $\alpha_p^{(r)} = \alpha_{p-1}^{(r)} + \dfrac{\partial k^{(r)}}{\partial t}$ для $p \geqslant 1$. Пусть $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ — та-

кие постоянные, что $-\dfrac{\partial^2 k^{(r)}}{\partial t^2}+\dfrac{\partial \alpha^{(r)}}{\partial t}+M^{(r)}\geqslant 0$ в $\overline{D^{(r)}}$, $r=1,\ 2$, *и* $b_p^{(r)}<$ <0 *в* $\overline{D^{(r)}}$, $-b_p^{(r)}>B_p'\left\{3\dfrac{\partial k^{(r)}}{\partial t}+2B_p'k^{(r)}\right\}$ *в* $\overline{D^{(r)}}$, $-b_p^{(r)}>\dfrac{B_p'}{4}\dfrac{\partial k^{(r)}}{\partial t}$ *на* $\overline{D_0^{(r)}}$, $4\mu_1^{(r)}<\nu_r[-\max\limits_{\overline{D^{(r)}}} b_p^{(r)}(x,\ t)](\gamma_{\min}^{(r)})^2$ *для* $p=0,\ \ldots,\ l+1$ *и* $r=1,\ 2$, *где* $b_0^{(r)}=-M^{(r)}$ *и* $b_p^{(r)}=-M^{(r)}+\dfrac{\partial \alpha_{p-1}^{(r)}}{\partial t}$ *для* $p\geqslant 1$, $r=1,\ 2$, *а* $B_p'=$ $=\max\limits_{\rho=1,2}\left\{\dfrac{16\mu_1^{(\rho)}}{\delta_p^{(\rho)}\nu_\rho(\gamma_{\min}^{(\rho)})^2},\ 4\max\limits_{\overline{D^{(\rho)}}}\left[-\dfrac{\partial b_p^{(\rho)}}{\partial t}(b_p^{(\rho)})^{-1}\right](x,\ t)\right\}$ *для* $p\geqslant 0$. *Тогда если*

$$g^{(r)}\in W_2^l(D^{(r)}),\ \partial_t^{l+1}g^{(r)}\in L_2(D^{(r)}),\ \partial_t^p g^{(r)}\Big|_{D_T^{(r)}}=0,\ p=0,\ \ldots,\ l, \tag{48}$$

для $r=1,\ 2$, *то задача А для уравнений (44) имеет единственное обобщенное решение* v *из* $W_2^1(D)$ *и оно удовлетворяет условиям*

$$v\in W_2^{l+2}(D^{(r)}),\ r=1,\ 2;\ \partial_t^p v|_{D_T}=0,\ p=0,\ \ldots,\ l+1. \tag{49}$$

Доказательство. Если $l=0$, то из теоремы 1 следует, что задача А для уравнений (44) имеет единственное обобщенное решение v из $W_2^1(D)$. Покажем, что для него выполняются условия (49) при $l=0$.

В силу теоремы 1 задача А для уравнений

$$k^{(r)}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}^{(r)}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)+a_i^{(r)}\frac{\partial w}{\partial x_i}+\tilde{\alpha}^{(r)}\frac{\partial w}{\partial t}+\tilde{a}^{(r)}w=\tilde{g}^{(r)}\text{ в }D^{(r)},\quad r=1,\ 2, \tag{50}$$

где

$$\tilde{\alpha}^{(r)}=\alpha_1^{(r)},\ \tilde{a}^{(r)}=b_1^{(r)},\ \tilde{g}^{(r)}=\partial g^{(r)}/\partial t,\ r=1,\ 2, \tag{51}$$

имеет единственное обобщенное решение w из $W_2^1(D)$. Положим $u(x,\ t)=$ $=\int\limits_T^t w(x,\ \theta)\,d\theta$. Легко видеть, что $u\in W_{2,0}^1(D)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}=w$, $u\Big|_{D_T}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{D_T}=$ $=0$, $i=1,\ \ldots,\ m$. Пусть $\zeta\in W_{2,0}^1(D)$ и $\zeta=0$ в лежащих на D_0 окрестностях множеств $P_{0,1}^-$ и $P_{0,2}^-$. Если $\eta(x,\ t)=\int\limits_0^t\zeta(x,\ \theta)\,d\theta$, то $\eta\in W_{2,0}^1(D)$, $\eta\Big|_{D_0}=0$, $\dfrac{\partial\eta}{\partial t}=\zeta$ и $\dfrac{\partial\eta}{\partial x_i}\Big|_{D_0}=0$, $i=1,\ \ldots,\ m$. Подставляя η в интегральное тождество вида (4), которому удовлетворяет w, и интегрируя по частям относительно t с учетом свойств функций u, w, η, ζ, получаем

$$\sum_{r=1}^{2}\int\limits_{D^{(r)}}\left\{\gamma^{(r)}\left[-\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial(k^{(r)}\zeta)}{\partial t}-a_{ij}^{(r)}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\zeta\left(\alpha^{(r)}\frac{\partial u}{\partial t}-M^{(r)}u-g^{(r)}\right)\right]+\zeta\left(a_i^{(r)}\gamma^{(r)}-a_{ij}^{(r)}\frac{\partial\gamma^{(r)}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}dxdt=0, \tag{52}$$

так что u является обобщенным решением из $W_2^1(D)$ задачи А для уравнений (44). Тогда $u=v$ и, следовательно, $\partial v/\partial t\in W_{2,0}^1(D)$ и $\partial v/\partial t|_{D_T}=0$. Интегрируя по частям в (52) относительно t, заключаем, что применима лемма 2 для $l=0$. Таким образом, $v \in H^2(D^{(r)})$, $r=1, 2$. Случай $l=0$ доказан.

Предположим, что теорема справедлива для некоторого целого числа $l_0 \geqslant 0$. Докажем ее справедливость для l_0+1. Пусть выполняются условия теоремы для l_0+1. В силу индукционного предположения задача А для уравнений (44) имеет единственное обобщенное решение v из $W_2^1(D)$, и оно удовлетворяет условиям (49) для $l=l_0$. Отметим, что задача А для уравнений (50) при выборе (51) имеет единственное обобщенное решение w из $W_2^1(D)$ и $w=\partial v/\partial t$. Тогда w удовлетворяет (49) для $l=l_0-1$. Если

$$\tilde{\alpha}^{(r)}=\alpha_1^{(r)},\ \tilde{a}^{(r)}=-M^{(r)},\ \tilde{g}^{(r)}=\frac{\partial g^{(r)}}{\partial t}-\frac{\partial \alpha^{(r)}}{\partial t}w,\ r=1,\ 2, \qquad (53)$$

то легко видеть, что коэффициенты и правые части уравнений (50) удовлетворяют условиям теоремы для $l=l_0$. Следовательно, задача А для уравнений (50) при выборе (53) имеет единственное обобщенное решение u из $W_2^1(D)$, удовлетворяющее (49) для $l=l_0$. Из леммы 7 следует, что $u=w$. Таким образом, показано, что $\partial v/\partial t \in W_2^{l_0+2}(D^{(r)})$, $r=1, 2$, и $\partial_t^{l_0+2} v|_{D_T}=0$. Так же, как и в случае $l=0$, убеждаемся, что для v применима лемма 2 при $l=l_0+1$. Тогда $v \in H^{l_0+3}(D^{(r)})$, $r=1, 2$. Итак, v удовлетворяет условиям (49) для $l=l_0+1$. Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается

Теорема 5. *Пусть $k^{(r)} \leqslant 0$ в $\overline{D^{(r)}}$, $r=1, 2$, выполняются (18), (45), (46), (48) и существует постоянная $\lambda_0 \geqslant 0$ такая, что*

$$\alpha_p^{(r)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial k^{(r)}}{\partial t}-\frac{1}{2}\lambda_0 k^{(r)}>0 \text{ в } \overline{D^{(r)}},\ p=0, \ldots, l+1 \text{ и } r=1,\ 2. \qquad (54)$$

Тогда задача А для уравнений (44) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(D)$, и оно удовлетворяет условиям (49).

Из теорем 1—5 и леммы 7 вытекают

Теорема 6. *Пусть выполняются (18), (29), (30), (45)—(47), $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ удовлетворяют (48) и $a^{(r)} \in C^{l+1}(\overline{D^{(r)}})$, $r=1, 2$. Тогда обобщенное решение из $W_2^1(D)$ задачи А имеет свойства (49).*

Теорема 7. *Пусть выполняются (18), (20)—(25), (45)—(47), $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ удовлетворяют (48) и $a^{(r)} \in C^{l+1}(\overline{D^{(r)}})$, $r=1, 2$. Тогда обобщенное решение из $W_2^1(D)$ задачи А имеет свойства (49).*

Теорема 8. *Пусть $k^{(r)} \leqslant 0$ в $\overline{D^{(r)}}$, $r=1, 2$, выполняются (18), (45), (46), (54), $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ удовлетворяют (48) и $a^{(r)} \in C^{l+1}(\overline{D^{(r)}})$, $r=1, 2$. Тогда обобщенное решение из $W_2^1(D)$ задачи А имеет свойства (49).*

Применяя теоремы вложения пространств Соболева [6, 9], получаем

Следствие 1. *Если выполняются предположения какой-либо из теорем 6—8 для $l>(m+1)/2$, то задача А имеет единственное классическое решение u, т. е. $u \in C^2(\overline{D^{(r)}})$, $r=1, 2$, и удовлетворяет (1)—(3) в обычном смысле.*

В работе [3] на одном примере показано, что условия (54) при $p=1, \ldots, l+1$ являются существенными для гладкости обобщенного решения из $W_2^1(D)$ задачи А в гиперболо-параболическом случае.

Отметим, что вопрос о гладкости решений краевых задач для уравнений смешанного типа с разрывными коэффициентами рассматривался в [10, 11 и др.]. В случае непрерывных коэффициентов гладкость решений исследована в работах [5, 8, 12—19 и др.].

Литература

1. Каратопраклиева М. Г. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 85—102.
2. Каратопраклиева М. Г. // Дис. ... канд. мат. наук. София, 1985.
3. Каратопраклиева М. Г. // Докл. БАН. 1985. Т. 38, № 11. С. 1453—1456.
4. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
5. Дачев Г. Д. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 1894—1902.
6. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.
7. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций к теоремы вложения. М., 1975.
8. Дачев Г. Д. // Дис. ... канд. мат. наук. София, 1978.
9. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983.
10. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., 1959.
11. Ступялис Л. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1975. Т. 127. С. 115—145.
12. Врагов В. Н. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 24—31.
13. Врагов В. Н. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098—1105.
14. Егоров И. Е. // Мат. заметки. 1978. Т. 23, № 3. С. 389—400.
15. Терехов А. Н. // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979. С. 128—136.
16. Дачев Г. Д. // Докл. IX Весенней конференции СБМ. София, 1980. С. 37—40.
17. Кузьмин А. Г. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 66—74.
18. Попиванов Н. И. // Дис. ... д-ра мат. наук. София, 1986.
19. Кузьмин А. Г. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 102—113.

Народная Республика Болгария

Поступила в редакцию 9 июля 1987 г.

УДК 517.956.22

К. Ю. КИШКИС

ОБ ИНДЕКСЕ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ—САМАРСКОГО ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Задача определения решения эллиптического в области $\Omega\subset R^N$ уравнения по заданным связям между его значениями на $S=\partial\Omega$ и на $(N-1)$-мерном многообразии $H\subset\Omega\cup S$ была поставлена в известной работе А. В. Бицадзе и А. А. Самарского [1] и далее рассматривалась в [2—8] и др. Наиболее трудными для исследования оказались случаи, когда S и H имеют непустое пересечение. Пример подобной задачи приведен в работе А. В. Бицадзе [3]. Следует отметить, что достаточные условия нётеровости нелокальных краевых задач такого рода для эллиптического уравнения порядка $2m$ в весовых пространствах Соболева получены А. Л. Скубачевским в [7, 8]. В настоящей работе найдены условия нётеровости и вычислен индекс одной типичной задачи Бицадзе — Самарского для гармонических в плоской области функций в предположениях, что S и H некасательны друг к другу и имеют конечное число общих точек.

В двумерном евклидовом пространстве точек x с декартовыми ортогональными координатами x_1, x_2 и скалярным произведением $\langle x, y\rangle = x_1y_1+x_2y_2$ рассмотрим конечную односвязную область Ω, граница S которой представляет собой кусочно-гладкую кривую Ляпунова. Пусть H — кусочно-гладкая кривая Ляпунова, лежащая в $\Omega\cup S$, причем $H\cap S=\{z_1, \ldots, z_N\}$, а $\tau=\mu(t)$, $t\in S$, $\tau\in H$,— гомеоморфизм между S и H.

Определение. Будем говорить, что попарно различные точки $z_{j_1}, \ldots, z_{j_m}$ образуют μ-цикл, если $\mu(z_{j_l})=z_{j_{l+1}}$, $l=1, \ldots, m$, $j_{m+1}=j_1$.

Задача А. Найти гармоническую в Ω и непрерывную в $\Omega\cup S$ функцию u, удовлетворяющую краевому условию

$$u(t)-\gamma(t)u(\mu(t))=f(t),\ t\in S, \tag{1}$$

где γ, $f\in C(S)$ — заданные функции.