1997. Т. 33, № 1. С. 120 — 129

УДК 517.956.227

ТОЧНЫЕ ПО ПОРЯДКУ ОЦЕНКИ МАКСИМУМОВ МОДУЛЕЙ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

А. С. Макин

В настоящей работе изучаются свойства присоединенных функций оператора Шредингера

$$Lu = \Delta u - q(x)u, \tag{1}$$

заданного в произвольной области G пространства $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Здесь $q(x)$ — комплекснозначная функция, непрерывная в области G. Следуя В.А.Ильину [1], под собственной функцией оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую не равную тождественному нулю комплекснозначную функцию $\overset{0}{u}(x)$ из класса $C^2(G)$, являющуюся регулярным решением уравнения $L\overset{0}{u} + \lambda\overset{0}{u} = 0$. Аналогично под присоединенной функцией порядка n, $n = 1, 2, \ldots$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{0}{u}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $\overset{n}{u}(x)$ из класса $C^2(G)$, являющуюся регулярным решением уравнения $L\overset{n}{u} + \lambda\overset{n}{u} = \overset{n-1}{u}$.

Обозначим через μ тот квадратный корень из λ, действительная часть которого неотрицательна.

Теорема. *Для любых компактов K и K' области G, первый из которых лежит строго внутри второго, любого λ и любого номера $n = 1, 2, \ldots$ справедлива оценка*

$$\|\overset{n}{u}\|_{L_\infty(K)} \leq C(K, K')\sqrt{n}(n^{(N-1)/2} + (\mathrm{Re}\mu)^{(N-1)/2})\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}. \tag{2}$$

Доказательство. В наших рассуждениях будем неоднократно использовать полученные в [2] оценку

$$\|\overset{n-m}{u}\|_{L_2(K)} \leq [C(K, K')(n^2 + n\mathrm{Re}\mu)]^m\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}, \tag{$*$}$$

справедливую для любого λ, любых m и n, таких, что $0 < m \leq n$, и любых компактов K и K', а также оценку

$$\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K)} \leq C_1(K, K')\exp(-\delta\mathrm{dist}(K, \partial K')|\mathrm{Im}\mu|)\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}, \tag{$**$}$$

справедливую для любых компактов K и K' и любых λ и n, удовлетворяющих условию $|\mathrm{Im}\mu|/n \geq M/\mathrm{dist}(K, \partial K')$, где $\delta > 0$ и $M > 0$ — некоторые постоянные.

В дальнейшем без ограничения общности будем считать $|\mu| \geq 1$. Рассмотрим вначале наиболее простой случай $N = 1$.

Пусть x — произвольная точка компакта K, $0 \leq r\mathrm{dist}(x, \partial G)$. Для присоединенной функции $\overset{n}{u}(x)$ оператора (1) имеет место [3] формула среднего значения

$$\frac{\overset{n}{u}(x+r) + \overset{n}{u}(x-r)}{2} = \overset{n}{u}(x)\cos\mu r - \frac{1}{2\mu}\int_{x-r}^{x+r}\overset{n}{\varphi}(\tau)\sin\mu(|x-\tau| - r)\,d\tau,$$

где $\overset{n}{\varphi}(\tau) = q(\tau)\overset{n}{u}(\tau) + \overset{n-1}{u}(\tau)$, которую запишем в ином виде:

$$\frac{\overset{n}{u}(x+r) + \overset{n}{u}(x-r)}{2} = \overset{n}{u}(x)\cos\mu r - \frac{1}{2\mu}\int_0^r(\overset{n}{\varphi}(x+z) + \overset{n}{\varphi}(x-z))\sin\mu(z-r)\,dz.$$

Отсюда следует, что

$$|\overset{n}{u}(x)|\,|\cos\mu r| \le \frac{|\overset{n}{u}(x+r)+\overset{n}{u}(x-r)|}{2} + \frac{1}{|2\mu|}\Big|\int\limits_0^r (\overset{n}{\varphi}(x+z)+\overset{n}{\varphi}(x-z))\sin\mu(z-r)\,dz\Big|. \quad (3)$$

Пусть $K \subset \hat{K} \subset K'$. Обозначим $c = \min(\delta\mathrm{dist}(\hat{K},\partial K'),\mathrm{dist}(K,\partial\hat{K})/2)$. Интегрируя неравенство (3), получаем

$$|\overset{n}{u}(x)|\int\limits_0^{c/n}|\cos\mu r|\,dr \le \frac{1}{2}(I_1+I_2), \quad (4)$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^{c/n}|\overset{n}{u}(x+r)+\overset{n}{u}(x-r)|\,dr, \quad I_2 = \frac{1}{|\mu|}\int\limits_0^{c/n}dr\Big|\int\limits_0^r(\overset{n}{\varphi}(x+z)+\overset{n}{\varphi}(x-z))\sin\mu(z-r)\,dz\Big|.$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_0^{c/n}|\cos\mu r|\,dr = \int\limits_0^{c/n}(\cos^2\mathrm{Re}\mu r\,\mathrm{ch}^2\mathrm{Im}\mu r + \sin^2\mu r\,\mathrm{sh}^2\mathrm{Im}\mu r)^{1/2}\,dr \ge$$

$$\ge \int\limits_0^{c/n}|\cos\mathrm{Re}\mu r|\,dr \ge \int\limits_0^{c/n}\cos^2\mathrm{Re}\mu r\,dr \ge c_1/n, \quad (5)$$

где $c_1 > 0$. Из (4), (5) следует, что

$$|\overset{n}{u}(x)| \le c_2 n(I_1+I_2). \quad (6)$$

Обозначим $K_1 = [x-c/n, x+c/n]$. Очевидно,что $K_1 \subset \hat{K}$. Из неравенства Коши — Буняковского находим, что

$$I_1 \le c_3 n^{-1/2}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K_1)}. \quad (7)$$

Оценим интеграл I_2. Если $n > |\mu|$, то из неравенства Коши — Буняковского и $(*)$ вытекает, что

$$I_2 \le c_4 n^{-5/2}(\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K_1)} + \|\overset{n-1}{u}\|_{L_2(K_1)}) \le c_5 n^{-1/2}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}. \quad (8)$$

Из (6) — (8) выводим оценку

$$|\overset{n}{u}(x)| \le c_6\sqrt{n}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}. \quad (9)$$

В случае $n \le |\mu|$ из неравенства Коши — Буняковского и $(*)$ получаем, что

$$I_2 \le c_7(|\mu|n\sqrt{n})^{-1}\exp(c|\mathrm{Im}\mu|/n)(\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K_1)} + \|\overset{n-1}{u}\|_{L_2(K_1)}) \le c_8 n^{-1/2}\exp(c|\mathrm{Im}\mu|/n)\|\overset{n}{u}\|_{L_2(\hat{K})}. \quad (10)$$

Если $|\mathrm{Im}\mu|/n < M/\mathrm{dist}(\hat{K},\partial K')$, то из (10) сразу следует, что

$$I_2 \le c_9 n^{-1/2}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(\hat{K})}. \quad (11)$$

Если $|\mathrm{Im}\mu|/n \ge M/\mathrm{dist}(\hat{K},\partial K')$, то, согласно $(**)$, будем иметь $\exp(c|\mathrm{Im}\mu|/n)\|\overset{n}{u}\|_{L_2(\hat{K})} \le$ $\le c_{10}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}$. Отсюда и из (10) вытекает, что

$$I_2 \le c_{11} n^{-1/2}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}. \quad (12)$$

Из (6), (7), (11), (12) получаем оценку $|\overset{n}{u}(x)| \le c_{12}\sqrt{n}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}$, из которой и из (9) вытекает справедливость теоремы при $N = 1$.

Пусть $N \ge 2$. Введем следующие обозначения: x — произвольная точка области G, r — сферический радиус, не превышающий минимум расстояния точки x до границы области G, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{N-1})$ — угловые гиперсферические координаты, $d\theta$ — элемент площади в угловых гиперсферических координатах, $\int\limits_\theta \ldots d\theta$ — интеграл по всем угловым координатам на поверхности N-мерной гиперсферы. Обозначим также $W(r,z,\lambda) = (\pi/2)(z/r)^\nu z[N_\nu(r\mu)J_\nu(z\mu)-$

$-N_\nu(z\mu)J_\nu(r\mu)]$, где $\nu = (N-2)/2$. Тогда [4] при любом $l = 0, 1, \ldots, n$ имеет место формула среднего значения

$$(2\pi)^{-N/2} \int\limits_\theta \overset{l}{u}(x+\theta r)\, d\theta = J_\nu(r\mu)(r\mu)^{-\nu} \overset{l}{u}(x) + (2\pi)^{-N/2} \int\limits_0^r W(r,z,\lambda)\, dz \int\limits_\theta \overset{l}{\varphi}(x+\theta z)\, d\theta,$$

где $\overset{l}{\varphi}(y) = q(y)\overset{l}{u}(y) + \overset{l-1}{u}(y)$ $(\overset{-1}{u} \equiv 0)$, откуда следует, что

$$|\overset{l}{u}(x)||J_\nu(r\mu)(r\mu)^{-\nu}| \le (2\pi)^{-N/2} \int\limits_\theta |\overset{l}{u}(x+\theta r)|\, d\theta + (2\pi)^{-N/2} \Big| \int\limits_0^r W(r,z,\lambda)\, dz \int\limits_\theta \overset{l}{\varphi}(x+\theta z)\, dz \Big|. \tag{13}$$

Хорошо известна асимптотическая формула

$$J_\nu(z) = \sqrt{2/(\pi z)}(\cos(z-\beta) + Q(z)\exp(|\mathrm{Im} z|)/|z|), \tag{14}$$

где $\beta = \pi\nu/2 + \pi/4$, $|Q(z)| \le \tilde{C}$ при $|z| \ge 1$. Пусть $K \subset \tilde{K} \subset K'$. Обозначим: $\varepsilon = \min[\delta \mathrm{dist}(\tilde{K}, \partial K')/(32N(\tilde{C}+1)), \mathrm{dist}(K, \partial\tilde{K})/(32(N+1)(\tilde{C}+1))]$, $\Omega(x,R)$ — шар радиуса R с центром в точке x.

Рассмотрим два случая: 1) $n \le \varepsilon|\mu|$ и 2) $n > \varepsilon|\mu|$.

1) Пусть $n \le \varepsilon|\mu|$. Положим $c = 16(\tilde{C}+1)\varepsilon$. Тогда имеет место оценка

$$\exp(cN|\mathrm{Im}\mu|/n)|\mu|^{(N-1)/2} \| \overset{n}{u} \|_{L_2(\tilde{K})} \le c_{13}(n^{(N-1)/2} + (\mathrm{Re}\mu)^{(N-1)/2}) \| \overset{n}{u} \|_{L_2(K')}. \tag{15}$$

В самом деле, если $|\mathrm{Im}\mu|/n \le M/\mathrm{dist}(\tilde{K}, \partial K')$, то

$$\exp(cN|\mathrm{Im}\mu|/n)|\mu|^{(N-1)/2} \| \overset{n}{u} \|_{L_2(\tilde{K})} \le c_{14}((\mathrm{Re}\mu)^{(N-1)/2} + |\mathrm{Im}\mu|^{(N-1)/2}) \| \overset{n}{u} \|_{L_2(\tilde{K})} \le$$

$$\le c_{15}(n^{(N-1)/2} + (\mathrm{Re}\mu)^{(N-1)/2}) \| \overset{n}{u} \|_{L_2(\tilde{K})},$$

а если $|\mathrm{Im}\mu|/n > M/\mathrm{dist}(\tilde{K}, \partial K')$, то из $(**)$ следует, что

$$\exp(cN|\mathrm{Im}\mu|/n)|\mu|^{(N-1)/2} \| \overset{n}{u} \|_{L_2(\tilde{K})} \le c_{16}((\mathrm{Re}\mu)^{(N-1)/2} + |\mathrm{Im}\mu|^{(N-1)/2}) \times$$

$$\times \exp(-\delta \mathrm{dist}(\tilde{K}, \partial K')|\mathrm{Im}\mu|/2) \| \overset{n}{u} \|_{L_2(K')} \le c_{17}((\mathrm{Re}\mu)^{(N-1)/2} + 1) \| \overset{n}{u} \|_{L_2(K')}.$$

Пусть x — произвольная точка области G, расстояние от которой до компакта K не превосходит $c(N-1)/n$. Умножая обе части неравенства (13) на r^{N-1} и интегрируя, получаем

$$|\overset{l}{u}(x)| I_0 \le (2\pi)^{-N/2}(I_1 + I_2), \tag{16}$$

где

$$I_0 = \int\limits_{c/(2n)}^{c/n} |r^{N-1} J_\nu(r\mu)(r\mu)^{-\nu}|\, dr, \quad I_1(x) = \int\limits_{c/(2n) \le |x-y| \le c/n} |\overset{l}{u}(y)|\, dy,$$

$$I_2(x) = \int\limits_{c/(2n)}^{c/n} r^{N-1}\, dr \Big| \int\limits_0^r W(r,z,\lambda)\, dz \int\limits_\theta \overset{l}{\varphi}(x+\theta z)\, d\theta \Big|.$$

Обозначим $B_n = \exp(c|\mathrm{Im}\mu|/n)$. Оценим снизу интеграл I_0. Из (14) следует, что

$$I_0 = \sqrt{2/\pi}|\mu|^{(1-N)/2} \int\limits_{c/(2n)}^{c/n} r^{(N-1)/2} |\cos(r\mu - \beta) + Q(r\mu)\exp(|\mathrm{Im}\mu| r)/|r\mu|| \, dr \ge$$

$$\ge c_{18}\sqrt{B_n}(|\mu|n)^{(1-N)/2} \int\limits_{c/(2n)}^{c/n} |\exp(-|\mathrm{Im}\mu| r)\cos(r\mu - \beta) + Q(r\mu)/|r\mu|| dr \ge c_{19}(|\mu|n)^{(1-N)/2}(I_0' - I_0''), \tag{17}$$

где

$$I_0' = \int\limits_{c/(2n)}^{c/n} \exp(-|\mathrm{Im}\mu|r)|\cos(r\mu-\beta)|\,dr, \quad I_0'' = \int\limits_{c/(2n)}^{c/n} (|Q(r\mu)|/|r\mu|)\,dr.$$

Очевидно,

$$I_0'' \le \tilde{C}\varepsilon/n. \tag{18}$$

Легко видеть, что

$$I_0' = \int\limits_{c/(2n)}^{c/n} \exp(-|\mathrm{Im}\mu|r)[\cos^2(\mathrm{Re}\mu r-\beta)\mathrm{ch}^2(\mathrm{Im}\mu r)+\sin^2(\mathrm{Re}\mu r-\beta)\mathrm{sh}^2(\mathrm{Im}\mu r)]^{1/2}\,dr.$$

Поскольку $|\mu| \le \mathrm{Re}\mu + |\mathrm{Im}\mu|$, то всегда выполняется хотя бы одно из двух неравенств $\mathrm{Re}\mu \ge$ $\ge |\mu|/2$ или $|\mathrm{Im}\mu| \ge |\mu|/2$. Предположим $\mathrm{Re}\mu \ge |\mu|/2$, тогда

$$I_0' \ge \frac{1}{2}\int\limits_{c/(2n)}^{c/n} |\cos(\mathrm{Re}\mu r-\beta)|\,dr \ge \frac{1}{2}\int\limits_{c/(2n)}^{c/n} \cos^2(\mathrm{Re}\mu r-\beta)\,dr = c/(8n)+R_1,$$

где $|R_1| \le (4\mathrm{Re}\mu)^{-1} \le \varepsilon/(2n)$. Отсюда и из (18) находим, что $|R_1| + I_0'' \le c/(16n)$, стало быть, $I_0' - I_0'' \ge c/(16n)$. Если $|\mathrm{Im}\mu| \ge |\mu|/2$, то при $c/(2n) \le r \le c/n$ выводим, что $\exp(-|\mathrm{Im}\mu|r)|\mathrm{sh}(\mathrm{Im}\mu r)| \ge 1/4$, откуда следует, что $I_0' \ge c/(8n)$. Из этого неравенства и (18) получаем $I_0' - I_0'' \ge c/(16n)$. Последнее неравенство вместе с (17) позволяет установить справедливость оценки $I_0 \ge c_{20}|\mu|^{(1-N)/2}n^{-(N+1)/2}$, с учетом которой запишем (16) в виде

$$|\overset{l}{u}(x)| \le c_{21}n^{(N+1)/2}|\mu|^{(N-1)/2}(I_1+I_2). \tag{19}$$

Из неравенства Коши — Буняковского следует, что $I_1 \le c_{22}n^{-N/2}\|\overset{l}{u}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}$. Тогда (19) примет вид

$$|\overset{l}{u}(x)| \le c_{23}\sqrt{n}|\mu|^{(N-1)/2}\|\overset{l}{u}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))} + c_{24}n^{(N+1)/2}|\mu|^{(N-1)/2}I_2. \tag{20}$$

Оценим интеграл I_2. Легко видеть, что

$$I_2 \le I_3 + I_4(0,1/|\mu|) + I_4(1/|\mu|,r), \tag{21}$$

где

$$I_3 = \int\limits_{c/(2n)}^{c/n} r^{N-1}\,dr\Big|\int\limits_0^r (z/r)^\nu zN_\nu(r\mu)J_\nu(z\mu)\,dz\int\limits_\theta \overset{l}{\varphi}(x+\theta z)\,d\theta\Big|,$$

$$I_4(\alpha,\beta) = \int\limits_{c/(2n)}^{c/n} r^{N-1}\,dr\Big|\int\limits_\alpha^\beta (z/r)^\nu zN_\nu(z\mu)J_\nu(r\mu)\,dz\int\limits_\theta \overset{l}{\varphi}(x+\theta z)\,d\theta\Big|.$$

Так как $|r\mu| > 1$ при $c/(2n) \le r \le c/n$, то из асимптотических формул для цилиндрических функций вытекает, что

$$|J_\nu(r\mu)| \le c_{25}\exp(|\mathrm{Im}\mu|r)|r\mu|^{-1/2}, \quad |N_\nu(r\mu)| \le c_{26}\exp(|\mathrm{Im}\mu|r)|r\mu|^{-1/2}. \tag{22}$$

Известно также, что при $|z\mu| \le 1$

$$|J_\nu(z\mu)| \le c_{27}|z\mu|^\nu, \quad |N_\nu(z\mu)| \le c_{28}|z\mu|^{-\nu}, \tag{23}$$

если $\nu > 0$, и

$$|N_0(z\mu)| \le c_{29}(|\ln z\mu|+1). \tag{24}$$

Рассмотрим интеграл I_3. Используя (22) и первое из неравенств (23), интегрируя по частям и применяя неравенство Коши — Буняковского, будем иметь

$$I_3 \le c_{30}|\mu|^{(N-3)/2}B_n \int\limits_{c/(2n)}^{c/n} r^{(N-1)/2}\,dr \int\limits_0^{1/|\mu|} z^{N-1}\,dz \int\limits_\theta |\overset{l}{\varphi}(x+\theta z)|\,d\theta + c_{31}|\mu|^{-1}B_n \times$$

$$\times \int\limits_{c/(2n)}^{c/n} r^{(N-1)/2}\,dr \int\limits_{1/|\mu|}^{r} z^{(N-1)/2}\,dz \int\limits_\theta |\overset{l}{\varphi}(x+\theta z)|\,d\theta \le c_{32}B_n\Big(|\mu|^{(N-3)/2}n^{-(N+1)/2}\times$$

$$\times \int\limits_{|x-y|\le 1/|\mu|} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy + |\mu|^{-1}\int\limits_0^{c/n} r^{(N-1)/2}\,dr \int\limits_0^r z^{-(N+1)/2}\,dz \int\limits_{|x-y|\le z} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy +$$

$$+\int\limits_0^{c/n} dr \int\limits_{|x-y|\le r} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy\Big) \le c_{33}B_n(|\mu|^{-3/2}n^{-(N+1)/2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,1/|\mu|))}+$$

$$+n^{-N/2-1}|\mu|^{-1}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}) \le c_{34}B_n n^{-N/2-1}|\mu|^{-1}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}. \qquad (25)$$

Рассмотрим интеграл $I_4(0,1/|\mu|)$. Если $N \ge 3$, то, используя первое из неравенств (22) и второе из (23), интегрируя по частям и изменяя порядок интегрирования, получаем

$$I_4(0,1/|\mu|) \le c_{35}B_n|\mu|^{(1-N)/2}\Big(\int\limits_0^{1/|\mu|} z^{1-N}\,dz \int\limits_{|x-y|\le z} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy + |\mu|^{N-2}\int\limits_{|x-y|\le 1/|\mu|} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy\Big) \le$$

$$\le c_{36}B_n|\mu|^{(1-N)/2}n^{-(N+1)/2}\Big(\int\limits_0^{1/|\mu|} z^{1-N}\,dz \int\limits_{|x-y|\le z} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy + |\mu|^{N-2}\int\limits_{|x-y|\le 1/|\mu|} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy\Big) \le$$

$$\le c_{37}B_n|\mu|^{(1-N)/2}n^{-(N+1)/2}\Big(|\mu|^{N-2}\int\limits_{|x-y|\le 1/|\mu|} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy + \int\limits_{|x-y|\le 1/|\mu|} \frac{|\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy}{|x-y|^{N-2}}\Big). \qquad (26)$$

Применяя для оценки первого интеграла в правой части (26) неравенство Коши — Буняковского, будем иметь

$$I_4(0,1/|\mu|) \le c_{38}B_n n^{-(N+1)/2}\Big(|\mu|^{-3/2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,1/|\mu|))} + |\mu|^{(1-N)/2}\int\limits_{|x-y|\le 1/|\mu|} \frac{|\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy}{|x-y|^{N-2}}\Big). \qquad (27)$$

Если $N = 2$, то из первого из неравенств (22), (24) и неравенства Коши — Буняковского получаем интегрированием по частям, что

$$I_4(0,1/|\mu|) \le c_{38}B_n|\mu|^{-1/2}n^{-3/2}\Big|\int\limits_0^{1/|\mu|} zN_0(z\mu)\,dz \int\limits_\theta \overset{l}{\varphi}(x+\theta z)\,d\theta\Big| \le$$

$$\le c_{39}B_n|\mu|^{-1/2}n^{-3/2}\Big(|\mu|\int\limits_0^{1/|\mu|} |N_1(z\mu)|\,dz \int\limits_{|x-y|\le z} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy + |N_0(\mu/|\mu|)|\int\limits_{|x-y|\le 1/|\mu|} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy\Big) \le$$

$$\le c_{40}B_n|\mu|^{-3/2}n^{-3/2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,1/|\mu|))}. \qquad (28)$$

Оценим интеграл $I_4(1/|\mu|,r)$. Исходя из (22) и рассуждая так же, как и при выводе оценки (25), будем иметь

$$I_4(1/|\mu|,r) \le c_{41}B_n|\mu|^{-1}\int\limits_{c/(2n)}^{c/n} r^{(N-1)/2}\,dr\int\limits_0^r z^{(N-1)/2}\,dz\int\limits_\theta |\overset{l}{\varphi}(x+\theta z)|\,d\theta \le$$

$$\le c_{42}B_n|\mu|^{-1}\Big(\int\limits_0^{c/n} r^{(N-1)/2}\,dr\int\limits_0^r z^{-(N+1)/2}\,dz\int\limits_{|x-y|\le z}|\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy+\int\limits_0^{c/n}dr\int\limits_{|x-y|\le r}|\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy\Big)\le$$

$$\le c_{43}B_n|\mu|^{-1}n^{-N/2-1}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,1/|\mu|))}. \tag{29}$$

Если $N=2$, то из (21), (25), (28), (29) следует, что $I_2 \le c_{44}B_n|\mu|^{-1}n^{-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,1/|\mu|))}$, откуда и из (20), $(*)$ вытекает, что $|\overset{l}{u}(x)| \le c_{45}(n|\mu|)^{1/2}(\|\overset{l}{u}\|_{L_2(\hat{K})}+B_n(|\mu|n)^{-1}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\hat{K})}) \le$ $\le c_{46}(n|\mu|)^{1/2}B_n\|\overset{l}{u}\|_{L_2(\hat{K})}$. Полагая в последнем неравенстве $l=n$ и используя (15) для оценки правой части полученного неравенства, устанавливаем справедливость теоремы.

Рассмотрим далее случай $N\ge 3$. Из (21), (25), (27), (29) следует

$$I_2 \le c_{47}B_n\Big(|\mu|^{-1}n^{-N/2-1}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,1/|\mu|))}+|\mu|^{(1-N)/2}n^{-(N+1)/2}\int\limits_{|x-y|\le 1/|\mu|}\frac{|\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy}{|x-y|^{N-2}}\Big). \tag{30}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (30). Пусть $p_1=N-1$, $q_1=(N-1)/(N-2)$. В силу неравенства Гёльдера будем иметь

$$\int\limits_{|x-y|\le 1/|\mu|}\frac{|\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy}{|x-y|^{N-2}} \le \Big(\int\limits_{|x-y|\le 1/|\mu|}|x-y|^{(2-N)q_1}\,dy\Big)^{1/q_1}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_{p_1}(\Omega(x,1/|\mu|))}\le$$

$$\le c_{48}|\mu|^{N/p_1-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_{p_1}(\Omega(x,1/|\mu|))}.$$

Отсюда и из (30) находим, что $I_2 \le c_{49}B_n(|\mu|^{-1}n^{-N/2-1}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,1/|\mu|))}+|\mu|^{N/p_1-(N+3)/2}n^{-(N+1)/2}\times$ $\times\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_{p_1}(\Omega(x,1/|\mu|))})$, и (20) примет вид

$$|\overset{l}{u}(x)| \le c_{50}\sqrt{n}|\mu|^{(N-1)/2}\|\overset{l}{u}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}+c_{51}B_n\times$$

$$\times(|\mu|^{(N-3)/2}n^{-1/2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,1/|\mu|))}+|\mu|^{N/p_1-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_{p_1}(\Omega(x,1/|\mu|))}). \tag{31}$$

Если $N=3$, то из оценки (31), взятой при $l=n$, и $(*)$ получаем, что $|\overset{n}{u}(x)| \le c_{52}\sqrt{n}|\mu|B_n\times$ $\times\|\overset{n}{u}\|_{L_2(\hat{K})}$, откуда и из (15) вытекает утверждение теоремы.

Предположим $N\ge 4$. Пусть $1/p_{i+1}=1/p_i+1/(2N-2)$, $i=\overline{1,N-3}$. Тогда $1/p_k=$ $=1/(N-1)+(k-1)/(2N-2)$, откуда следует, что $p_{N-2}=2$. Пусть $\|\overset{n}{u}\|_{L_\infty(K)}=|\overset{n}{u}(x_0)|$. Обозначим $K_i=\Omega(x_0,ci/n)$, $T_i=\Omega(x_0,ci/|\mu|)$. Согласно (31) и $(*)$, будем иметь

$$|\overset{n}{u}(x_0)| \le c_{53}\sqrt{n}|\mu|^{(N-1)/2}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(\hat{K})}+c_{54}B_n|\mu|^{N/p_1-2}(\|\overset{n}{u}\|_{L_{p_1}(T_1)}+\|\overset{n-1}{u}\|_{L_{p_1}(T_1)}). \tag{32}$$

Для любого $i=\overline{1,N-3}$ оценим $\|\overset{l}{u}\|_{L_{p_i}(T_i)}$. Из (19) вытекает, что

$$\|\overset{l}{u}\|_{L_{p_i}(T_i)} \le c_{55}n^{(N+1)/2}|\mu|^{(N-1)/2}(\|I_1\|_{L_{p_i}(T_i)}+\|I_2\|_{L_{p_i}(T_i)}). \tag{33}$$

Обозначим $\rho=(2N-3)/(2N-2)$, $\gamma_i=(1/p_i+1/2)^{-1}$. Легко видеть, что

$$\|I_1\|_{L_{p_i}(T_i)} \le c_{56}n^{-N/2}(\mathrm{meg}T_i)^{1/p_i}\sup_{x\in T_i}\|\overset{l}{u}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))} \le c_{57}n^{-N/2}|\mu|^{-N/p_i}\|\overset{l}{u}\|_{L_2(K_{i+1})}. \tag{34}$$

Оценим $\|I_2\|_{L_{p_i}(T_i)}$. Из (30) и неравенства Юнга [5] следует, что

$$\|I_2\|_{L_{p_i}(T_i)} \le c_{58}B_n\Big(|\mu|^{-1}n^{-N/2-1}(\mathrm{meg}T_i)^{1/p_i}\sup_{x\in T_i}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,1/|\mu|))} + |\mu|^{(1-N)/2}n^{-(N+1)/2}\times$$

$$\times\Big\|\int\limits_{\Omega(x,1/|\mu|)}\frac{|\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy}{|x-y|^{N-2}}\Big\|_{L_{p_i}(T_i)}\Big) \le c_{59}B_n\Big(n^{-N/2-1}|\mu|^{-N/p_i-1}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(K_{i+1})}+$$

$$+|\mu|^{(1-N)/2}n^{-(N+1)/2}\Big(\int\limits_{\Omega(x,1/|\mu|)}|x-y|^{(2-N)\rho}dy\Big)^{1/\rho}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_{p_{i+1}}(T_{i+1})}\Big) \le$$

$$\le c_{60}B_n(n^{-N/2-1}|\mu|^{-N/p_i-1}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(K_{i+1})} + n^{-(N+1)/2}|\mu|^{(1-N)/2-2-N(1/p_i-1/p_{i+1})}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_{p_{i+1}}(T_{i+1})}). \quad (35)$$

Из (33) — (35) выводим, что при $0 \le m \le n$

$$\|\overset{n-m}{u}\|_{L_{p_i}(T_i)} \le c_{61}B_n(\sqrt{n}|\mu|^{(N-1)/2-N/p_i}(\|\overset{n-m}{u}\|_{L_2(K_{i+1})} + (n|\mu|)^{-1}\|\overset{n-m-1}{u}\|_{L_2(K_{i+1})})+$$

$$+|\mu|^{-2-N(1/p_i-1/p_{i+1})}(\|\overset{n-m}{u}\|_{L_{p_{i+1}}(T_{i+1})} + \|\overset{n-m-1}{u}\|_{L_{p_{i+1}}(T_{i+1})})). \quad (36)$$

Вставляя в правую часть (32) последовательно неравенства (36) при $i = \overline{1, N-3}$, получаем

$$|\overset{n}{u}(x_0)| \le c_{62}\sqrt{n}|\mu|^{(N-1)/2}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(\tilde{K})} + c_{63}B_n^{N-2}(\sqrt{n}|\mu|^{(N-1)/2}\sum_{j=0}^{N-2}(n|\mu|)^{-j}\|\overset{n-j}{u}\|_{L_2(K_{N-2})}+$$

$$+|\mu|^{N/2}(\sum_{j=1}^{N-2}|\mu|^{-2j}\|\overset{n-j}{u}\|_{L_2(T_{N-2})} + |\mu|^{-2}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(T_{N-2})} \le c_{64}\sqrt{n}|\mu|^{(N-1)/2}\times$$

$$\times(1+\exp(c(N-2)|\mathrm{Im}\mu|/n))\|\overset{n}{u}\|_{L_2(\tilde{K})}.$$

Отсюда и из (15) вытекает оценка (2).

2) Пусть $n > \varepsilon|\mu|$. Положим $c = \min(\mathrm{dist}(K,\partial K')/(2N+2), \varepsilon/2)$. Обозначим $\hat{K} = \{x : \mathrm{dist}(x,K) \le cN/n\}$. Легко видеть, что $\hat{K} \subset K'$, причем $\mathrm{dist}(\hat{K},\partial K') \ge \mathrm{dist}(K,\partial K')/2$.

Пусть x — произвольная точка компакта $\hat{K}$. Умножая обе части неравенства (13) на r^{N-1} и интегрируя их, получаем неравенство вида (16), где

$$I_0 = \int\limits_0^{c/n}|r^{(N-1)}J_\nu(r\mu)(r\mu)^{-\nu}|\,dr, \quad I_1(x) = \int\limits_{\Omega(x,c/n)}|\overset{l}{u}(y)|\,dy,$$

$$I_2(x) = \int\limits_0^{c/n}r^{N-1}\,dr\Big|\int\limits_0^r W(r,z,\lambda)\,dz\int\limits_\theta\overset{l}{\varphi}(x+\theta z)\,d\theta\Big|.$$

Так как $|r\mu| < 1/2$ при $0 \le r \le c/n$, то $|J_\nu(r\mu)| \ge c_{65}|r\mu|^\nu$, откуда следует, что $I_0 \ge c_{66}n^{-N}$. Тогда неравенство (16) в рассматриваемом случае примет вид

$$|\overset{l}{u}(x)| \le c_{67}n^N(I_1 + I_2). \quad (37)$$

Из неравенства Коши—Буняковского вытекает, что $I_1 \le c_{68}n^{-N/2}\|\overset{l}{u}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}$. Из двух последних неравенств находим, что

$$|\overset{l}{u}(x)| \le c_{69}n^{-N/2}\|\overset{l}{u}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))} + c_{70}n^N I_2. \quad (38)$$

Оценим интеграл I_2. Интегрируя по частям и используя известные формулы: $(z^{-\nu}J_\nu(x\mu))' = -\mu z^{-\nu}J_{\nu+1}(z\mu)$, $(z^{-\nu}N_\nu(z\mu))' = -\mu z^{-\nu}N_{\nu+1}(z\mu)$, будем иметь

$$\int\limits_0^r W(r,z,\lambda)\,dz\int\limits_\theta\overset{l}{\varphi}(x+\theta z)\,d\theta = \mu\int\limits_0^r(zr)^{-\nu}(A_1-A_2)\,dz\int\limits_{|x-y|\le z}|\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy,$$

где $A_1 = N_\nu(r\mu)J_{\nu+1}(z\mu)$, $A_2 = N_{\nu+1}(z\mu)J_\nu(r\mu)$. Отсюда следует, что

$$I_2 \le I_3^{(1)} + I_3^{(2)}, \tag{39}$$

где

$$I_3^{(k)} = |\mu| \int\limits_0^{c/n} r^{N-1}\,dr \int\limits_0^r (rz)^{-\nu}|A_k|\,dz \int\limits_{|x-y|\le z} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy, \quad k = 1, 2.$$

Рассмотрим интеграл $I_3^{(1)}$. Если $N > 2$, то $|A_1| \le c_{71}|\mu|z(z/r)^\nu$. Отсюда и из неравенства Коши — Буняковского находим, что

$$I_3^{(1)} \le c_{72}|\mu|^2 \int\limits_0^{c/n} r\,dr \int\limits_0^r z\,dz \int\limits_{|x-y|\le z} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy \le c_{73}n^{-N/2-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}. \tag{40}$$

Если $N = 2$, то из (24) вытекает, что $|A_1| \le c_{74}z|\mu|(|\ln r\mu| + 1)$. Из последнего неравенства и неравенства Коши — Буняковского следует, что

$$I_3^{(1)} \le c_{75}|\mu|^2 \int\limits_0^{c/n} r^4(|\ln(r|\mu|)| + \pi)\,dr\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))} \le$$

$$\le c_{76}|\mu|^2 n^{-5}|\ln(c|\mu|/n)|\,\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))} \le c_{77}n^{-3}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}. \tag{41}$$

Оценим интеграл $I_3^{(2)}$. Легко видеть, что $|A_2| \le c_{78}(|\mu|z)^{-1}(r/z)^\nu$. Меняя порядок интегрирования, получаем

$$I_3^{(2)} \le c_{78} \int\limits_0^{c/n} r^{N-1}\,dr \int\limits_0^r z^{1-N}\,dz \int\limits_{|x-y|\le z} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy = c_{78} \int\limits_0^{c/n} z^{1-N}\,dz \int\limits_{|x-y|\le z} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy \int\limits_z^{c/n} r^{N-1}\,dr \le$$

$$\le c_{79}n^{-N} \int\limits_0^{c/n} z^{1-N}\,dz \int\limits_{|x-y|\le z} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy + c_{80} \int\limits_0^{c/n} z\,dz \int\limits_{|x-y|\le z} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy. \tag{42}$$

Если $N = 2$, то, применяя для оценки интегралов в правой части неравенства (42) неравенство Коши — Буняковского, находим, что

$$n^{-2} \int\limits_0^{c/n} z^{-1}\,dz \int\limits_{|x-y|\le z} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy + \int\limits_0^{c/n} z\,dz \int\limits_{|x-y|\le z} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy \le c_{81}n^{-3}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}. \tag{43}$$

Из (39), (41) и (43) следует, что $I_2 \le c_{82}n^{-3}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}$. Отсюда, из (38) и (*) вытекает, что

$$|\overset{l}{u}(x)| \le c_{83}n\|\overset{l}{u}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))} + c_{84}n^{-1}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))} \le$$

$$\le c_{85}n\|\overset{l}{u}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))} + c_{86}n^{-1}\|\overset{l-1}{u}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))} \le c_{87}n\|\overset{l}{u}\|_{L_2(K')}, \tag{44}$$

т. е. утверждение теоремы.

Если $N \ge 3$, то, меняя порядок интегрирования в первом слагаемом в правой части (42) и применяя неравенство Коши — Буняковского для оценки второго слагаемого, получаем оценку

$$I_3^{(2)} \le c_{88}n^{-N} \int\limits_{|x-y|\le c/n} |\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy \int\limits_{|x-y|}^{c/n} z^{1-N}\,dz + c_{89}n^{-N/2-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))} \le$$

$$\leq c_{90}n^{-2}\int\limits_{|x-y|\leq c/n}|\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy+c_{91}n^{-N}\int\limits_{|x-y|\leq c/n}\frac{|\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy}{|x-y|^{N-2}}+c_{92}n^{-N/2-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}\leq$$

$$\leq c_{93}n^{-N/2-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}+c_{94}n^{-N}\int\limits_{|x-y|\leq c/n}\frac{|\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy}{|x-y|^{N-2}},$$

откуда и из (40) следует, что

$$I_2\leq c_{95}n^{-N/2-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}+c_{96}n^{-N}\int\limits_{|x-y|\leq c/n}\frac{|\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy}{|x-y|^{N-2}}. \tag{45}$$

Оценивая второе слагаемое в правой части (45) аналогично подобному слагаемому в (30), убеждаемся, что оно не превосходит величины $c_{97}n^{N/p_1-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_{p_1}(\Omega(x,c/n))}$. Тогда из (45) получаем оценку $I_2\leq c_{98}n^{-N/2-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}+c_{99}n^{N/p_1-N-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_{p_1}(\Omega(x,c/n))}$, из которой и (38) выводим оценку

$$|\overset{l}{u}(x)|\leq c_{100}n^{N/2-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}+c_{101}n^{N/p_1-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_{p_1}(\Omega(x,c/n))}. \tag{46}$$

Если $N=3$, то из (46) и $(*)$ получаем утверждение теоремы.

Предположим $N\geq 4$. Как и в случае 1), обозначим $1/p_{i+1}=1/p_i+1/(2N-2)$, $\gamma_i=(1/p_i+$ $+1/2)^{-1}$, $\rho=(2N-3)/(2N-2)$. Пусть $\|\overset{n}{u}\|_{L_\infty(K)}=|\overset{n}{u}(x_0)|$. Обозначим $K_i=\Omega(x_0,ci/n)$. Согласно (46), будем иметь

$$|\overset{n}{u}(x_0)|\leq c_{102}n^{N/2}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(\hat{K})}+c_{103}n^{N/p_1-2}(\|\overset{n}{u}\|_{L_{p_1}(K_1)}+\|\overset{n-1}{u}\|_{L_{p_1}(K_1)}). \tag{47}$$

Для любого $i=\overline{1,N-3}$ оценим $\|\overset{l}{u}\|_{L_{p_i}(K_i)}$. Из неравенства (37) вытекает, что

$$\|\overset{l}{u}\|_{L_{p_i}(K_i)}\leq c_{104}n^{N}(\|I_1\|_{L_{p_i}(K_i)}+\|I_2\|_{L_{p_i}(K_i)}). \tag{48}$$

Исходя из неравенства Юнга, находим,что

$$\|I_1\|_{L_{p_i}(K_i)}\leq\Big(\int\limits_{\Omega(x,c/n)}dy\Big)^{1/\gamma_i}\|\overset{l}{u}\|_{L_2(K_{i+1})}\leq c_{105}n^{-N(1/p_i+1/2)}\|\overset{l}{u}\|_{L_2(K_{i+1})}. \tag{49}$$

Оценим $\|I_2\|_{L_{p_i}(K_i)}$. Из (45) и неравенства Юнга следует, что

$$\|I_2\|_{L_{p_i}(K_i)}\leq c_{106}n^{-N/2-2}(\operatorname{meg}K_i)^{1/p_i}\sup_{x\in K_i}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\Omega(x,c/n))}+c_{107}n^{-N}\Big\|\int\limits_{\Omega(x,c/n)}\frac{|\overset{l}{\varphi}(y)|\,dy}{|x-y|^{N-2}}\Big\|_{L_{p_i}(K_i)}\leq$$

$$\leq c_{108}n^{-N(1/p_i+1/2)-2}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_2(\hat{K})}+c_{109}n^{-N-2-N(1/p_i-1/p_{i+1})}\|\overset{l}{\varphi}\|_{L_{p_{i+1}}(K_{i+1})}. \tag{50}$$

Из неравенств (48) — (50) вытекает, что при $0\leq m\leq n$ $\|\overset{n-m}{u}\|_{L_{p_i}(K_i)}\leq c_{110}n^{N/2-N/p_i-2}\times$ $\times(\|\overset{n-m}{u}\|_{L_2(\hat{K})}+\|\overset{n-m-1}{u}\|_{L_2(\hat{K})})+c_{111}n^{-N(1/p_i-1/p_{i+1})-2}(\|\overset{n-m}{u}\|_{L_{p_{i+1}}(K_{i+1})}+\|\overset{n-m-1}{u}\|_{L_{p_{i+1}}(K_{i+1})})$. Вставляя в правую часть (47) последнее неравенство последовательно при $i=\overline{1,N-3}$, получаем неравенство $|\overset{n}{u}(x_0)|\leq c_{112}n^{N/2}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(\hat{K})}+c_{113}n^{N/2}\sum\limits_{j=0}^{N-2}n^{-2j}\|\overset{n-j}{u}\|_{L_2(K_{N-2})}$, из которого и $(*)$ следует, что $|\overset{n}{u}(x_0)|\leq c_{114}n^{N/2}\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}$, откуда вытекает справедливость оценки (2).

Приведем примеры, показывающие, что оценка (2) является точной по порядку. Рассмотрим на отрезке $[-1,1]$ многочлен

$$Q_{2n}(x)=n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sqrt{2k+1/2}\;P_{2k}(x),$$

где $P_k(x)=(2^kk!)^{-1}d^k((x^2-1)^k)/dx^k$ — многочлены Лежандра, свойства которых хорошо известны. Нетрудно получить, что

$$\|Q_{2n}(x)\|_{L_2[-1,1]} = 1, \quad Q_{2n}(0) > c_0\sqrt{n}, \tag{51}$$

где $c_0 > 0$. Положим $\mu > 0$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\mu > n$. Обозначим $\overset{2n}{u}(x) = Q_{2n}(|x|)\overset{0}{u}(x)$, где $\overset{0}{u}(x) = J_\nu(\mu|x|)(\mu|x|)^{-\nu}$. Известно, что функция $\overset{0}{u}(x)$ удовлетворяет уравнению $\Delta\overset{0}{u} + \mu^2\overset{0}{u} = 0$. Отсюда и из леммы работы [6, с. 72] вытекает, что функция $\overset{2n}{u}(x)$ является присоединенной функцией порядка $2n$ оператора Лапласа Δu, отвечающей собственному значению $\lambda = \mu^2$. Так как $\overset{0}{u}(0) = 1/\Gamma(N/2)$, то $\overset{2n}{u}(0) > c_1\sqrt{n}$. Из неравенства $|J_\nu(y)\sqrt{y}| \le c_2$, справедливого при любом $y \ge 0$, и равенства (51) следует, что

$$\|\overset{2n}{u}\|_{L_2(|x|\le 1)} = c_3\mu^{(1-N)/2}\Big(\int_0^1 |Q_{2n}(r)|^2 r\mu J_\nu^2(r\mu)\,dr\Big)^{1/2} \le c_4\mu^{(1-N)/2}\Big(\int_0^1 |Q_{2n}(r)|^2\,dr\Big)^{1/2} \le c_5\mu^{(1-N)/2}.$$

Отсюда имеем, что $\overset{2n}{u}(0) \ge c_6\sqrt{n}\,\mu^{(N-1)/2}\|\overset{2n}{u}\|_{L_2(|x|\le 1)}$.

2) Пусть $\mu \le n$. Легко видеть, что функция $\overset{2nN}{u}(x) = \prod_{j=1}^{N} Q_{2n}(x_j)e^{i\mu x_j}$ является присоединенной функцией оператора Лапласа, отвечающей собственному значению $\lambda = N\mu^2$. Из (51) следует, что $\overset{2nN}{u}(0) \ge c_7 n^{N/2}$, $\|\overset{2nN}{u}\|_{L_2(K')} \le c_8$, где компакт $K' = \{|x_j| \le 1,\ j = 1,\dots,N\}$, т. е. $\overset{2nN}{u}(0) \ge c_9 n^{N/2}\|\overset{2nN}{u}\|_{L_2(K')}$.

Замечание. Для общего эллиптического оператора второго порядка при дополнительном условии $|\mathrm{Im}\mu| \le M$ в [7] установлена оценка $\|\overset{n}{u}\|_{L_\infty(K)} \le C(K, K', n)(|\lambda|^{(N-1)/4} + 1)\|\overset{n}{u}\|_{L_2(K')}$. Указанное дополнительное условие снято в работе [8].

Таким образом, новым при оценке типа (2) является то, что она указывает зависимость соответствующей постоянной от номера присоединенной функции в явном виде. Краевые задачи на собственные значения для оператора Шредингера, системы корневых функций которых содержат присоединенные функции сколь угодно высокого порядка, впервые были рассмотрены в работе [9].

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Ильину и Е. И. Моисееву за внимание к работе.

Литература

1. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 30 — 37.
2. *Макин А. С.* //Тр. II-го Европейского математического конгресса. Будапешт, 1996.
3. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М., 1969. Т. 1.
4. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* // Проблемы мат. физики и вычислит. математики. М., 1977. С. 157 — 166.
5. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М., 1969.
6. *Макин А. С.* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 65 — 73.
7. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* // Мат. заметки. 1983. Т. 34, № 5. С. 683 — 692.
8. *Капустин Н. Ю.* // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 6. С. 1293 — 1297.
9. *Лидский В. Б.* // Функц. анализ. 1976. Т. 10, № 4. С. 89 — 90.

Московская государственная академия приборостроения и информатики

Поступила в редакцию 18 сентября 1996 г.