А. М. Елизаров, Об интегральных уравнениях смешанных обратных краевых задач, *Констр. теор. функц. и функц. анал.*, 1981, выпуск 3, 16–25

А. М. Елизаров

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ СМЕШАННЫХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Введение. Смешанные обратные краевые задачи для аналитических функций возникли как обобщение обратных краевых задач [1, §§ 1—3, 5], [2], когда задается лишь часть границы искомой области и требуется определить эту область и аналитическую в ней функцию по заданным краевым условиям. Некоторые классы смешанных задач изучены в [3—5].

В своей работе [6] Б. Демченко решал смешанную краевую задачу для гармонической функции, задавая граничные значения в зависимости от полярного угла единичного круга E плоскости ζ при конформном отображении его на искомую область. Одна смешанная обратная задача с граничными условиями в форме Демченко исследована в работе [7].

В настоящей статье рассматриваются внутренние смешанные обратные краевые задачи, в граничных условиях которых фигурируют только действительная и мнимая части искомой регулярной функции, причем часть условий задается в форме Демченко. Все задачи сводятся к интегральным уравнениям, разрешимость которых доказывается на основании принципа неподвижной точки Шаудера и принципа сжатых отображений (см., например, [8], с. 605, 620).

1°. Пусть в плоскости $z=x+iy$ задана простая гладкая кривая $\Gamma_0: y=\Phi(x)$, $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$, и односвязная конечная область D_z имеет частью своей границы дугу Γ_z^1, лежащую на Γ_0, причем ни начало, ни конец ее не фиксируются.

Задача 1. Определить область D_z с границей $\Gamma_z = \Gamma_z^1 + \Gamma_z^2$, Γ_z^2 неизвестна, и регулярную в ней функцию $w(z)$, непрерывную вплоть до границы и осуществляющую конформное отображение, по краевым условиям

$$\operatorname{Re} w(z)\big|_{\Gamma_z} = f(\theta),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ f(0)=f(2\pi),$$

$$\operatorname{Im} w(z)\big|_{\Gamma_z^2} = f_1(\bar{x}), \tag{1}$$

причем дуге Γ_z^1 соответствует верхняя полуокружность при конформном отображении $z(\zeta): E \to D_z$, и функция f_1 задана на всей оси $-\infty \leqslant \bar{x} \leqslant \infty$. Через $\bar{x}$ обозначена приведенная абсцисса, связанная с $x = \operatorname{Re} z$ соотношением $\bar{x} = \varkappa x$, $\varkappa > 0$ — неизвестный коэффициент растяжения.

В (1) предполагается, что f, f_1 однозначны и

$$f_1 \in C^{(2)},\ f_1' \neq 0;\ f' \in H(A,\ \mu),\ 0 < \mu \leqslant 1;\ \Phi' \in H(B,\ 1) \qquad (2)$$

(здесь $H(N,\ \lambda)$ — класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера с коэффициентом $N > 0$ и показателем λ, $0 < \lambda \leqslant 1$, а $C^{(k)}$, $k \geqslant 1$, — пространство k раз непрерывно-дифференцируемых функций).

Для решения задачи достаточно определить гельдерову функцию $x(\theta)$, $\theta \in [0,\ 2\pi]$. Выведем уравнение для определения этой функции на интервале $[\pi,\ 2\pi]$.

Из формул обращения Гильберта ([2], с. 59) следует, что

$$f_1[\bar{x}(\varphi)] = T_0(\varphi) - T_0(2\pi) + f_1[\bar{x}(2\pi)],\ T_0(\varphi) = \\ = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta - \varphi}{2}\, d\theta. \qquad (3)$$

Так как значение $\bar{x}(2\pi)$ неизвестно, то непосредственно разрешить соотношение (3) относительно $\bar{x}(\varphi)$ нельзя. Дифференцируя (3) по φ и учитывая (2), получаем уравнение:

$$\bar{x}(\varphi) = (\mathscr{A}\bar{x})(\varphi) = -\int_\varphi^{2\pi} T(\varphi)/f_1'[\bar{x}(\varphi)]\, d\varphi + \bar{x}(2\pi),\ \varphi \in [\pi,\ 2\pi], \qquad (4)$$

$$T(\varphi) = T_0'(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta - \varphi}{2}\, d\theta.$$

Докажем разрешимость уравнения (4) в пространстве H_ν, $0 < \nu < 1$, гельдеровых функций с нормой

$$\|\bar{x}\|_\nu = \max_{\theta \in [\pi,\ 2\pi]} |\bar{x}(\theta)| + \sup_{\substack{\theta_1,\ \theta_2 \in [\pi,\ 2\pi],\\ \theta_1 \neq \theta_2}} \frac{|\bar{x}(\theta_1) - \bar{x}(\theta_2)|}{|\theta_1 - \theta_2|^\nu}.$$

Очевидно, что оператор $\mathscr{A}$ действует из H_ν в H_ν. Имеем

$$(\mathscr{A}\bar{x}_1)(\varphi) - (\mathscr{A}\bar{x}_2)(\varphi) = -\int_\varphi^{2\pi} T(\varphi)\int_0^1 f_1''\{\bar{x}_2(\varphi) + t[\bar{x}_1(\varphi) - \\ - \bar{x}_2(\varphi)]\}\, dt \cdot \{f_1'(\bar{x}_1(\varphi))\, f_1'(\bar{x}_2(\varphi))]^{-1}[\bar{x}_1(\varphi) - \bar{x}_2(\varphi)]\, d\varphi + \\ + \bar{x}_1(2\pi) - \bar{x}_2(2\pi). \qquad (5)$$

Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ непрерывен. Докажем его компактность. Имеем

$$\left| \frac{d}{d\varphi} (\mathcal{A}\bar{x})(\varphi) \right| \leqslant \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} | T(\varphi) | / \min_{|\bar{x}| \leqslant \infty} | f_1'(\bar{x}) |. \tag{6}$$

Так как правая часть в (6) ограничена (см. [9]), то образом любого ограниченного множества из H_ν при действии оператора $\mathcal{A}$ является ограниченное множество в $C^{(1)}$. В силу [10], оператор $\mathcal{A}$ компактен.

Рассмотрим замкнутое выпуклое множество $U = \{\bar{x}(\varphi) \in H_\nu : |\bar{x}(2\pi)| \leqslant c < \infty\}$, где c — любая фиксированная постоянная. Очевидно, что $\mathcal{A}[U] \subset U$. Из (6) следует, что

$$\mathcal{A}[U] \subset U_R = \{\bar{x}(\varphi) \in H_\nu : \|\bar{x}\|_\nu \leqslant R\},$$

$$R = (1 + \pi) \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} | T(\varphi) | / \min_{|\bar{x}| \leqslant \infty} | f_1'(\bar{x}) | + c .$$

Так как замкнутое выпуклое ограниченное множество $U \cap U_R \neq \varnothing$ и одновременно $\mathcal{A}[U] \subset U$, $\mathcal{A}[U] \subset U_R$, то $\mathcal{A}]U \cap U_R] \subset \subset U \cap U_R$. Таким образом, по теореме Шаудера уравнение (4) разрешимо. Итак, при любом значении c, определяющем интервал изменения величины $d = \bar{x}(2\pi)$, все решения уравнения лежат в шаре U_R. Точное значение d определится после нахождения этого решения (обозначим его $g(\theta)$).

Заметим, что в силу (6) и [9], функция $g \in C^{(1)}$ и поэтому $g \in H(A_1, \mu_1)$ с любым $0 < \mu_1 \leqslant 1$,

$$A_1 = AM(\mu) / \min_{|\bar{x}| \leqslant \infty} | f_1'(\bar{x}) |; \quad M(\mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\mu\,\pi/2} t^\mu \operatorname{cosec} t dt \,([9]) \tag{7}$$

2°. Переходим к построению интегрального уравнения задачи 1. Для регулярной в E функции $z(\zeta)$ можем записать следующие краевые условия:

$$\operatorname{Re} z(e^{i\theta}) = \varkappa g(\theta), \ \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi; \ \operatorname{Im} z(e^{i\theta}) = \Phi[x(\theta)], \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Решая полученную краевую задачу по формуле Синьорини [11], пересчитанной для круга, приходим к уравнению для определения $x(\varphi)$ на интервале $[0, \pi]$:

$$x(\varphi) = (Ix)(\varphi) + \varkappa (Kg)(\varphi), \tag{8}$$

$$(Ix)(\varphi) = \frac{\sqrt{\sin\varphi}}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\Phi[x(\theta)]\, d\theta}{\sqrt{\sin\theta}\, \sin\frac{\theta - \varphi}{2}},$$

$$(Kg)(\varphi) = \frac{\sqrt{\sin\varphi}}{2\pi} \left[\int_\pi^{3\pi/2} \frac{g(\theta)\, d\theta}{\sqrt{|\sin\theta|}\, \sin\frac{\theta - \varphi}{2}} - \int_{-\pi/2}^{0} \frac{g(\theta)\, d\theta}{\sqrt{|\sin\theta|}\, \sin\frac{\theta - \varphi}{2}} \right].$$

Для получения решения задачи 1 нужно найти решение уравнения (8).

3°. Прежде всего исследуем свойства функции $(Kg)(\varphi)$.

Лемма. *Если* $g(\theta)\in H(A_1, \mu_1)$, *то* $(Kg)(\varphi)$ — *ограниченная гельдерова функция с коэффициентом* $A_1 \cdot A_2$, A_2 — const.

Доказательство. Осуществим в $(Kg)(\varphi)$ замену переменных

$$\theta = 3\pi/2 - 2\,\mathrm{arctg}\,[2\cos\gamma/(1+\cos^2\gamma)],\ 0\leqslant\gamma\leqslant\pi, \tag{9}$$

$$\varphi = 3\pi/2 - 2\,\mathrm{arctg}\,[2\xi/(1+\xi^2)],\ -1\leqslant\xi\leqslant 1.$$

Так как функция g гельдерова, то

$$|g(\theta(\gamma)) - g(\theta(0))| \leqslant A_1\,|\theta(\gamma)-\theta(0)|^{\mu_1} \leqslant A_1(1-\cos\gamma)^{\mu_1},$$

$$|g(\theta(\gamma)) - g(\theta(\pi))| \leqslant A_1(1+\cos\gamma)^{\mu_1}.$$

Нетрудно подсчитать, что

$$dK/d\xi = \frac{2i}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}[g(\theta(\gamma)) - g(\theta(0))]\,G(\gamma;\ \xi)\,q^\alpha(\gamma,\ \xi)\,d\gamma +$$

$$+\frac{2i}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}[g(\theta(\gamma)) - g(\theta(\pi))]\,G(\gamma;\ \xi)\,q^\alpha(\gamma,\ \xi)\,d\gamma - \frac{2i}{\pi}[g(\theta(0)) -$$

$$- g(\theta(\pi))]/(1+\xi^2),$$

$$G(\gamma;\ \xi) = [(\xi^2+1)\cos\gamma - 2\xi]\,q^{2-\alpha}(\gamma,\ \xi);\quad q(\gamma,\ \xi) = (1-2\xi\cos\gamma+\xi^2)^{-1}.$$

Следовательно,

$$|dK/d\xi| \leqslant \frac{2}{\pi}\left|\int\limits_0^{\pi/2}[g(\theta(\gamma)) - g(\theta(0))]\,G(\gamma,\ \xi)\,q^\alpha(\gamma,\ \xi)\,d\gamma\right| +$$

$$+\frac{2}{\pi}\left|\int\limits_{\pi/2}^{\pi}[g(\theta(\gamma)) - g(\theta(\pi))]\,G(\gamma,\xi)\,q^\alpha(\gamma,\xi)\,d\gamma\right| + \frac{2}{\pi}|g(\theta(0)) - g(\theta(\pi))|.$$

Так как $G(\gamma;\ \xi)$ достигает максимума в одной из точек $\xi=\pm 1$ и $G(\gamma;\ 1)\geqslant G(\gamma;\ -1)$ при $\gamma\in[0,\ \pi/2]$, $G(\gamma;\ 1)\leqslant G(\gamma;\ -1)$ при $\gamma\in[\pi/2,\ \pi]$, а $q^\alpha(\gamma,\ \xi)\leqslant(1-|\xi|)^{-2\alpha}$, $|\xi|\leqslant 1$, то при $0\leqslant\alpha<1/2$ можем записать

$$|dK/d\xi| \leqslant 2^\alpha A_1\pi^{-1}(1-|\xi|)^{-2\alpha}\left[\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos\gamma)^{\alpha+\mu_1-1}\,d\gamma +\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(1+\cos\gamma)^{\alpha+\mu_1-1}\,d\gamma\right] + 2^{\mu_1+1}A_1\pi^{-1} \leqslant 2^{\alpha+1}A_1\pi^{-1}(1-|\xi|)^{-2\alpha}\times$$

$$\times \int_0^1 t^{\alpha+\mu-3/2}\,dt + 2^{\mu_1+1} A_1 \pi^{-1} = [2^{\alpha+1}(1-|\xi|)^{-2\alpha}(\alpha+\mu_1-1/2)^{-1} +$$
$$+ 2^{\mu_1+1}]\, A_1 \pi^{-1},$$

где $\alpha+\mu_1 > 1/2$. Пусть $\xi_1 \leqslant \xi_2$. Тогда

$$|(Kg)(\varphi(\xi_2)) - (Kg)(\varphi(\xi_1))| \leqslant \int_{\xi_1}^{\xi_2} |dK/d\xi|\, d\xi \leqslant A_1 R_1 |\xi_2-\xi_1|^{1-2\alpha}, \tag{10}$$
$$R_1 = [2^{3\alpha+1}(1-2\alpha)^{-1}(\alpha+\mu_1-1/2)^{-1} + 2^{\mu_1+1}]\,\pi^{-1}.$$

Но из (9) следует, что

$$|\xi_2-\xi_1| = \Big|\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi'(\varphi)\,d\varphi\Big| \leqslant R_2|\varphi_2-\varphi_1|^{\delta}, \tag{11}$$
$$R_2 = 1 + 2^{1/\delta-2}\left[\boldsymbol{B}\left(\frac{1-2\delta}{2(1-\delta)}, \frac{1-2\delta}{2(1-\delta)}\right)\right]^{1-\delta}, \quad 0<\delta<1/2$$

(здесь $\boldsymbol{B}$ — бета-функция Эйлера). Используя (11), выводим из (10), что

$$|(Kg)(\varphi_2) - (Kg)(\varphi_1)| \leqslant A_1A_2|\varphi_1-\varphi_2|^{(1-2\alpha)\delta}, \quad A_2 = R_1 R_2^{1-2\alpha}. \tag{12}$$

Так как $|(Kg)(\varphi)| \leqslant \max|g| < \infty$, то $(Kg)(\varphi)$ ограничена. Лемма доказана.

Замечание 1. Если $1/2 < \mu_1 \leqslant 1$, то можно взять $\alpha \equiv 0$, и тогда

$$|(Kg)(\varphi_1) - (Kg)(\varphi_2)| \leqslant A_1A_2|\varphi_1-\varphi_2|^{\delta}, \quad 0<\delta<1/2, \tag{12'}$$
$$A_2 = 2R_1[2+2^{\mu_1}(2\mu_1-1)][\pi(2\mu_1-1)]^{-1}.$$

Замечание 2. При $\mu_1 > 1/2$ можно выбрать α так, что $\alpha+\mu_1 > 1$. Тогда в (12)

$$A_2 = [2^{\alpha}(1-2\alpha) + 2^{\mu_1+1}\pi^{-1}]\,R_1^{1-2\alpha}(1-2\alpha)^{-1}.$$

По условию задачи, $g \in C^{(1)}$, т. е. можем взять $\mu_1 = 1$. Из леммы следует, что $Kg \in H_\nu$, $0<\nu<1/2$.

4°. **Теорема 1.** *Если уравнение* (8) *при фиксированном* $\varkappa$ *разрешимо в* H_ν, $0<\nu<1/2$, *то решение его единственно.*

Доказательство проводится методом работы [12].

Пусть существует два решения $x_1(\varphi)$ и $x_2(\varphi)$. Из (8) следует, что

$$x_1(\varphi) - x_2(\varphi) = (Ix_1)(\varphi) - (Ix_2)(\varphi), \quad \varphi \in [0, \pi]. \tag{13}$$

Обозначим

$$\Omega_1(\varphi) = \Phi[x_1(\varphi)] - \Phi[x_2(\varphi)],$$

$$\operatorname{ctg}\beta_0(\varphi) = \int_0^1 \Phi'_t [x_2(\varphi) + t[x_1(\varphi) - x_2(\varphi)]]\, dt; \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Имеем

$$\Omega_1(\varphi) = \operatorname{ctg}\beta_0(\varphi)[x_1(\varphi) - x_2(\varphi)].$$

Правая часть (13) представляет собой значения на верхней полуокружности функции $\Omega_2(\varphi) = \operatorname{Im}\Omega_0(e^{i\varphi})$, где функция $\Omega_0(\zeta)$ регулярна в E, вещественна на вещественной оси, обращается в нуль в начале координат и $\operatorname{Re}\Omega_0(e^{i\varphi}) = \Omega_1(\varphi)$, $\pm\varphi \in [0, \pi]$. (Этот факт непосредственно следует из решения задачи Шварца с указанными краевыми условиями.)

Продолжим функцию $\beta_0(\varphi)$ нечетным образом на $[-\pi, 0]$ (по условию, $x_i(\varphi) = g(\varphi)$, $i = 1, 2$, $\varphi = 0, \pi$, поэтому $\beta_0(\varphi)$ будет непрерывна и $\beta_0(-\pi) = \beta_0(\pi)$). В силу нечетности $\Omega_2(\varphi)$, выводим из (13) условия краевой задачи Гильберта

$$\operatorname{ctg}\beta_0(\varphi)\,\Omega_2(\varphi) = \Omega_1(\varphi), \quad \pm\varphi \in [0, \pi] \tag{14}$$

(в точках φ, где $x_1(\varphi) = x_2(\varphi)$, $\Omega_1(\varphi) = \Omega_2(\varphi) = 0$). Запишем соответствующую (14) задачу Римана (см. [2], § 10):

$$\Omega_0^+(e^{i\varphi}) = \Omega_0^-(e^{i\varphi})\, e^{2i\beta_0(\varphi)}, \quad \pm\varphi \in [0, \pi], \ \overline{\Omega_0^-(\bar{\xi}^{-1})} = \Omega_0^+(\xi) = \Omega_0(\xi).$$

Индекс этой задачи в классе ограниченных функций равен нулю. Так как $\Omega_0^-(\infty) = \overline{\Omega_0^+(0)} = 0$, то решение задачи есть $\Omega_0(\xi) \equiv 0$. Теорема доказана.

5°. Обозначим через $\mathbf{I}$ оператор в уравнении (8) (определяемый функцией $(Ix)(\varphi)$). Так как $(Kg)(\varphi) \in H_\delta$ (в силу леммы), то уравнение будем рассматривать в пространстве H_ν, $0 < \nu < 1/2$. Заметим, что оператор $\mathbf{I}$ непрерывен в H_ν как интеграл типа Коши.

Рассмотрим замкнутое множество

$$N(K) = \{x(\theta) \in H_\nu : x(\theta) \in H(K, \nu), \ K < \infty\}.$$

Выведем условие сжатости $\mathbf{I}$ на $N(K)$. Имеем

$$(\mathbf{I}x_1)(\varphi) - (\mathbf{I}x_2)(\varphi) = (Ix_1)(\varphi) - (Ix_2)(\varphi) =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin\varphi}}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\Delta x(\theta)}{\sqrt{\sin\theta}} \int_0^1 \Phi'[x_1(\theta) + t\Delta x(\theta)]\, dt \frac{d\theta}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}, \tag{15}$$

$$x_1, x_2 \in N(K), \ \Delta x = x_2 - x_1.$$

Из результатов [9, 13] следует:

$$\max_{\varphi\in[0,\pi]} |(Ix)(\varphi)| \leqslant 2^\nu \max_{|x|\leqslant\infty} |\Phi'(x)|\, K M(\nu),$$

$$|(Ix)(\varphi_1) - (Ix)(\varphi_2)| \leqslant 2^\nu \pi^{-1} \mathbf{B}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}\right) \max_{|x|\leqslant\infty} |\Phi'(x)|\, K |\varphi_1 - \varphi_2|^\nu. \tag{16}$$

Аналогично (16), выводим из (15), что (см. (2))

$$\|(\mathrm{I}x_1)(\varphi)-(\mathrm{I}x_2)(\varphi)\|_\nu\leqslant 2^\nu\left[M(\nu)+\pi^{-1}B\left(\frac{\nu}{2},\ \frac{1-\nu}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\ (\max_{|x|\leqslant\infty}|\Phi'(x)|+KB)\|\Delta x\|_\nu$$

и, следовательно, оператор I будет сжимающим, если

$$\Lambda(\nu)\ (\max_{|x|\leqslant\infty}|\Phi'(x)|+KB)<1,\ \ \Lambda(\nu)=2^\nu\left[M(\nu)+\pi^{-1}B\left(\frac{\nu}{2},\ \frac{1-\nu}{2}\right)\right]. \tag{17}$$

В силу принципа сжатых отображений, уравнение (8) будет иметь одну неподвижную точку в $N(K)$, если $\mathcal{A}[N(K)]\subset N(K)$. Для выполнения этого условия накладываем ограничения на K (см. (12′), (16)):

$$2^\nu\pi^{-1}\mathrm{B}\left(\frac{\nu}{2},\ \frac{1-\nu}{2}\right)\max_{|x|\leqslant\infty}|\Phi'(x)|K+8A_1R_1\varkappa\pi^{-1}\leqslant K. \tag{18}$$

Из (17) следует, что неравенство (18) можно удовлетворить подбором положительного K. Возьмем наименьшее возможное $K=K_0$:

$$K_0=8A_1R_1\varkappa/\lambda(\nu),\ \ \lambda(\nu)=\pi-2^\nu B\left(\frac{\nu}{2},\ \frac{1-\nu}{2}\right)\max_{|x|\leqslant\infty}|\Phi'(x)|\,.$$

Итак, уравнение (8) имеет единственную неподвижную точку в $N(K_0)$ при выполнении неравенства (17) с $K=K_0$. Пусть имеется ограничение

$$\Lambda(\nu)\max_{|x|\leqslant\infty}|\Phi'(x)|<1, \tag{19}$$

В силу произвольности $\varkappa$, неравенство(17) с $K=K_0$ будет иметь место для всех $\varkappa$ из интервала

$$0<\varkappa<\varkappa_0=[1-\Lambda(\nu)\max_{|x|\leqslant\infty}|\Phi'(x)|\,]\,\lambda(\nu)/[8A_1R_1B\Lambda(\nu)],$$

если $\Phi'\neq\mathrm{const}$. Если $\Phi=\mathrm{const}$, то (17) выполняется автоматически.

Пусть в качестве решения задачи 1 допускаются области, у которых дуга Γ_z^1 покрывает неоднократно некоторые участки Γ_0.

Теорема 2. *Пусть выполнено одно из предположений:*

а) $\Phi'\in H(B,\ 1)$, $\Lambda(\nu)\max_{|x|\leqslant\infty}|\Phi'(x)|<1$, $\Phi'\neq\mathrm{const}$, $g\in H(A_1,\ 1)$,

$$\varkappa\in(0,\ \varkappa_0);$$

в) $\Phi'=\mathrm{const}$, $\varkappa>0$; с) $\Phi=\mathrm{const}$, $\varkappa>0$.

Тогда задача 1 однозначно разрешима.

Доказательство. Из предыдущих построений следует, что при выполнении а) или с) уравнение (8) имеет единственное решение в $N(K_0)$. Пусть $\Phi' = c_0 = \mathrm{const}$. Осуществляя замену переменных (9), приходим к линейному сингулярному уравнению

$$x(\delta) = \frac{c_0}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\delta}{2}\,d\sigma + c(\delta),$$

где $x(\delta) = x(\varphi(\delta))$, $c(\delta) = \varkappa(Kg)(\varphi(\delta))$. В силу [2], § 31,

$$x(\delta) = (1 + c_0^2)^{-1/2}\left[-c_0\gamma_0 + c(\delta) + \frac{c_0}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} c(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\delta}{2}\,d\sigma\right],$$

$$\gamma_0 = c_0\int\limits_0^{2\pi} c(\sigma)\,d\sigma,$$

т. е. при любом $\varkappa$ решение существует и единственно.

В силу теоремы 1, других решений в H_ν уравнение (8) не имеет. Подставляя полученное решение в формулу Синьорини, получим регулярную и ограниченную в E функцию, отображающую E на область D_z, часть границы которой имеет уравнение $y = \Phi(x)$, т. е. получим решение задачи 1. Следует заметить, что решение уравнения (8) вовсе не обязано быть функцией монотонной. Однако уравнение (8) получено из формулы Синьорини, построенной по граничным значениям регулярной функции, осуществляющей конформное отображение. Поэтому решение уравнения будет непрерывно продолжать функцию $\varkappa g(\theta)$ на интервал $[0, \pi]$ и менять вид монотонности (с монотонного возрастания на убывание или наоборот) конечное число раз. При этом дуга Γ_z^1 с уравнением $y = \Phi[x(\theta)]$, $x = x(\theta)$ будет покрывать несколько раз некоторые участки Γ_0, а область D_z может быть неоднолистной. Теорема доказана.

Следствие. *Если функция g монотонна, то дуга Γ_z^1 будет покрывать некоторый участок Γ_0 только один раз.*

Доказательство вытекает из того факта, что $x(\theta)$ по $[0, \pi]$ непрерывно продолжает функцию $\varkappa g(\theta)$ и, следовательно, при монотонной функции g на ∂D_z не могут образоваться разрезы.

Из результатов работы [14] и следствия вытекает следующая

Теорема 3. *Если функция $g(\theta)$ не убывает (или не возрастает) на интервале $[\pi, 2\pi]$ и решение задачи существует, то отображение $z(\zeta)$ будет почти выпукло и, следовательно, искомая область будет однолистна.*

6°. Опишем задачи, доказательство разрешимости которых может быть проведено по схеме п. 2° — 5°.

Пусть дуга Γ_z^2 лежит в полосе $d \leqslant x \leqslant d + l$, где $d = x(0) = x(2\pi)$, l — неизвестная ширина полосы, а дуга Γ_z^1 задается как в п. 1° и возможно, покрывает неоднократно некоторые участки Γ_0.

Задача 2. Решить задачу 1, где $\bar{x} = [2(x-d)-l]/l, |\bar{x}| \leqslant 1$, а дуга Γ_z^2 разбита на участки монотонного изменения $\bar{x}$.

На каждом таком участке ветви функции f_1^{-1} однозначны и непрерывно продолжают друг друга. Кроме того, $f_1^{-1} \in H(A_3, \mu_2)$,

$$\min_{|\bar{x}| \leqslant 1} f_1(\bar{x}) = \min_{\varphi \in [\pi, 2\pi]} T_1(\varphi); \quad \max_{|\bar{x}| \leqslant 1} f_1(\bar{x}) = \max_{\varphi \in [\pi, 2\pi]} |T_1(\varphi)|, \tag{20}$$

$$T_1(\varphi) = T_0(\varphi) - T_0(2\pi) + f_1(-1).$$

Из (20) и формулы обращения Гильберта выводим:

$$\bar{x}(\varphi) = g(\varphi) = f_1^{-1}[T_1(\varphi)], \quad \varphi \in [\pi, 2\pi].$$

Из [13] получаем, что $g(\varphi) \in H(A_1, \mu_1)$,

$$A_1 = \left[AB\left(\frac{\mu}{2}, \frac{1-\mu}{2}\right)\pi^{-1}\right]^{\mu_2} A_3, \quad \mu_1 = \mu \cdot \mu_2.$$

Задача 3. Пусть дуги Γ_z^1, Γ_z^2 и $\bar{x}$ определены как в задаче 2. Найти область D_z и регулярную функцию $w(z)$, конформно отображающую D_z на заданную область D_w, если

$$w(z)|_{\Gamma_z^2} = f(\bar{x}) + if_1(\bar{x}), \quad |\bar{x}| \leqslant 1, \ f, f_1 \in C^{(2)},$$

и на ∂D_w отмечено положение образов концов дуги Γ_z^1.

Отображая конформно круг E на D_w функцией $w = \omega(\zeta)$ так, чтобы дуге Γ_w^1 соответствовала верхняя полуокружность, из тождества $f(\bar{x}) + if_1(\bar{x}) \equiv \omega(e^{i\varphi})$ определяем функцию $g(\varphi) = \bar{x}(\varphi)$ на $[\pi, 2\pi]$. Уравнения задач 2, 3 выводятся аналогично (8) и имеют вид

$$x(\varphi) = (lx)(\varphi) + \frac{l}{2}[K(g+1)](\varphi) + d. \tag{21}$$

Нетрудно заметить, что в (21) роль параметра $\varkappa$ играет величина $l/2$. Аналогично теореме 2 может быть доказана

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения теоремы 2, где* $\varkappa$ *заменено на* $l/2$, ν — *на* $(1-2\alpha)\delta$, $8R_1$ — *на* $R_1 R_2^{1-2\alpha}$ (см. (12)), а

$$\varkappa_0 = [1 - \Lambda(\nu_0) \max_{|x| \leqslant \infty} |\Phi'(x)|]\lambda(\nu_0)/[R_1 R_2^{1-2\alpha} B\Lambda(\nu_0)], \quad \nu_0 = (1-2\alpha)\delta.$$

Тогда смешанные задачи 2, 3 однозначно разрешимы при любом фиксированном значении $-\infty < d < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань. Изд-во Казан. ун-та, 1965.

2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., „Наука", 1977.

3. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, „Наука", 1977.

4. Хайкин М. И. Теоремы существования и единственности для обратных смешанных краевых задач теории аналитических функций. Автореф. канд. дисс. Казань, 1961.

5. Салимов Н. Б. О некоторых задачах фильтрации жидкости с неизвестными границами.—„Изв. вузов. Матем.“, 1969, № 2, с. 88—98.

6. Demtchenko B. Problemes mixtes harmoniques en hydrodynamique des fluides parfaits. Paris, 1933.

7. Елизаров А. М. Об обратной смешанной краевой задаче Демченко. Деп. № 164—78.

8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., „Наука“, 1977.

9. Аксентьев Л. А. Точные оценки для гармонических в круге функций. — „Изв. вузов. Матем.“, 1968, № 3, с. 3—8.

10. Крейн С. Г., Петунин Ю. И. Шкалы банаховых пространств. — УМН, 1966, **21**, № 2, с. 89—169.

11. Signorini A. Sopra un problema al contorno nella teoria della funzioni di variabile complessa. Ann. di Math., 1916, **25**, № 3, 252—272.

12. Салимов Н. Б. Обратная задача напорной фильтрации в области с криволинейным водоупором. — Тр. семинара по краевым задачам. Казань, Изд-во Казан. ун-та, 1968, вып. 5, с. 146—158.

13. Александров А. Б. Норма преобразования Гильберта в пространстве гельдеровых функций. Функц. анализ и его прил., 1975, **9**, № 2, с. 1—4.

14. Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions. Michigan Math. J., **1**:2, 1952, 169—185.