Е. И. Хухро, Неподвижные точки p-автоморфизмов конечных p-групп, *Алгебра и логика*, 1975, том 14, номер 6, 697–703

Алгебра и логика, 14, № 6 (1975), 697-703.

УДК 519.44

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ p-АВТОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНЫХ p-ГРУПП

Е. И. ХУХРО

Томпсон [1, теорема 1] доказал, что если на конечной p-группе P нечетного порядка, подгруппа Фраттини которой элементарна и центральна, действует p-группа операторов A, причем $V=P/\Phi(P)$ является свободным $\mathbb{Z}_pA$-модулем, то $C_P(A)$ накрывает $C_V(A)$, т.е. $C_P(A)\cdot\Phi(P)/\Phi(P)=C_V(A)$. Там же был поставлен вопрос, насколько существенны сильные ограничения на $\Phi(P)$.

Позднее Ивенс [4] заметил, что доказательство этой теоремы Томпсона можно получить, используя теорию неабелевых когомологий.

Мы покажем, что заключение теоремы Томпсона верно для всех групп P ступени нильпотентности $\leq p-1$.

ТЕОРЕМА. Пусть на конечной p-группе P, ступень нильпотентности которой меньше p, действует p-группа операторов A, и $P/\Phi(P)$ является свободным $\mathbb{Z}_pA$-модулем. Тогда $C_P(A)$ накрывает $C_{P/\Phi(P)}(A)$.

Пример применения этой теоремы приведен в конце работы.

Доказательству предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Пусть G – группа, φ – её автоморфизм порядка k. Пусть G обладает нормальным рядом $G\rhd H_1\rhd\ldots\rhd H_n\rhd H_{n+1}=1$, состоящим из φ-инвариантных подгрупп H_i, в котором все факторы

H_i/H_{i+1} при $i=1,\dots,n$ — конечно-порожденные абелевы группы, являющиеся свободными $\mathbb{Z}\langle\varphi\rangle$-модулями. Тогда $C_G(\varphi)$ накрывает $C_{G/H_1}(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тривиальная индукция сводит доказательство к случаю, когда $n=1$. Будем использовать аддитивную запись. Нам достаточно в каждом φ-инвариантном смежном классе $g+H_1$ указать элемент из $C_G(\varphi)$. Пусть сначала модуль H_1 одномерен. Пусть элемент a порождает H_1 как $\mathbb{Z}\langle\varphi\rangle$-модуль. Тогда элементы $b_i = a^{\varphi^{i-1}}$, $i=1,\dots,k$, составляют базис H_1. Пусть

$$g^{\varphi}=g+\sum_{i=1}^{k}\beta_i b_i .$$

Так как

$$g=g^{\varphi^k}=g+\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{i=1}^{k}\beta_i\Big)b_j ,$$

то $\sum_{i=1}^{K}\beta_i=0$. Поэтому элемент

$$g+\sum_{i=2}^{k}(1-\beta_i-\dots-\beta_K)b_{i-1}+b_K$$

будет искомым элементом из $C_G(\varphi)$. В случае, когда модуль H_1 не одномерен, доказательство аналогично.

Лемма доказана.

В последующих рассуждениях через F обозначается свободная группа конечного ранга, через $F_1=F, F_2,\dots$ — члены её нижнего центрального ряда. Используется собирательный процесс Ф. Холла и теорема о базисе, по которой базисные коммутаторы веса k образуют базис свободной абелевой группы F_K/F_{K+1} (см. например, [2]).

Если $u_1,\dots,u_n$ — свободные образующие группы F, то о неупорядоченном наборе индексов элементов $u_{i_1},\dots,u_{i_s}$, входящих в запись коммутатора C, будем говорить как о наборе индексов C. Например, набор индексов коммутатора $[[u_1,u_2],[u_3,u_1,u_1]]$ — это $\{1,1,1,2,3\}$.

ЛЕММА 2. Любой коммутатор C веса k по модулю F_{K+1} равен либо 1, либо произведению базисных коммутаторов веса k, неупорядоченные наборы индексов которых совпадают с набором индексов c, или обратных к ним. (Например:

$$[u_4, u_3, u_1, u_1] \equiv [u_3, u_1, u_1, u_4]^{-1} \cdot [u_4, u_1, u_1, u_3][[u_4, u_1], [u_3, u_1]]^2 (\operatorname{mod} F_5)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассуждать по индукции по весу коммутатора k. Все рассматривается по модулю F_{k+1}. Пусть $c = [c_1, c_2]$, где c_i имеет вес $k_i < k$ и набор индексов M_i. Набор индексов c равен $M = M_1 \cup M_2$. По индукции можно считать, что c_1 и c_2 – базисные коммутаторы. Если при этом c – не базисный коммутатор, то $c_1 = [c_{11}, c_{12}]$ и $c_{11} > c_{12} > c_2$, где „$\geqslant$" – принятый порядок на множестве базисных коммутаторов. Если бы c_1 имел вес 1, то достаточно было бы рассмотреть $c^{-1} = [c_2, c_1]$, а если вес c равен 2, то утверждение проверяется непосредственно. Но теперь

$$c = [[c_{11}, c_{12}], c_2] \equiv [[c_{12}, c_2], c_{11}]^{-1} \cdot [[c_{11}, c_2], c_{12}] \; (\operatorname{mod} F_{k+1}).$$

Второй из полученных коммутаторов, очевидно, базисный. Поэтому все свелось к коммутатору $[[c_{12}, c_2], c_{11}]$, у которого, однако, обе части имеют вес больший, чем у правой части первоначального коммутатора. Поэтому многократное применение описанных рассуждений приведет к цели.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть F – свободная группа ранга p, где p – простое число, со свободными образующими $u_1, \ldots, u_p$. Пусть φ – её автоморфизм порядка p, циклически переставляющий образующие, т.е. $u_i^{\varphi} = u_{i+1}$, $i = 1, \ldots, p-1$, $u_p^{\varphi} = u_1$. Тогда фактор-группы F_k / F_{k+1} при $k = 1, \ldots, p-1$ являются свободными $\mathbb{Z}\langle\varphi\rangle$-модулями. На F_p / F_{p+1} φ не свободен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все рассматривается по модулю F_{k+1}. Пусть u – базисный коммутатор веса k. Очевидно, что наборы индексов элементов u^{φ^i}, $i = 0, 1, \ldots, p-1$, попарно различны. Из леммы 2 следует, что элементы $u, u^{\varphi}, \ldots, u^{\varphi^{p-1}}$ линейно независимы. В частности, $U = \langle u, \ldots, u^{\varphi^{p-1}} \rangle$ – свободный циклический $\mathbb{Z}\langle\varphi\rangle$-модуль. Пусть B_I – подгруппа группы F_k/F_{k+1}, порожденная всеми базисными коммутаторами с данным набором индексов I. Очевидно, что $F_k/F_{k+1} = \sum_I \oplus B_I$. Ясно, что $B_I^{\varphi} = B_J$ для некоторого набора индексов $J \neq I$. Пусть $B_1, \ldots, B_s$ – представители орбит $\{B_I\}$ при действии на множестве подгрупп B_I автоморфизма φ. Тогда объединение базисов $B_1, \ldots, B_s$ даст искомый свободный $\mathbb{Z}\langle\varphi\rangle$-базис группы F_k/F_{k+1}. Итак, группы F_k/F_{k+1} при $k=1,\ldots,p-1$ являются свободными $\mathbb{Z}\langle\varphi\rangle$ -модулями. Группа F_p/F_{p+1} имеет ранг, не делящийся на p, и, следовательно, она не может быть свободным $\mathbb{Z}\langle\varphi\rangle$ -модулем.

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству основной теоремы.

ТЕОРЕМА. *Пусть A – p-группа операторов конечной p-группы P, ступень нильпотентности которой меньше p, и пусть $P/\Phi(P)$ – свободный $\mathbb{Z}_p A$ -модуль. Тогда $C_P(A)$ накрывает $C_{P/\Phi(P)}(A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе Томпсона [1] в доказательстве теоремы 1 проведена редукция, дословное применение которой сводит все к случаю, когда $|A| = p$, а модуль $P/\Phi(P)$ одномерен. Положим $A = \langle\alpha\rangle$. Пусть элемент x_1 из P в факторе по $\Phi(P)$ порождает $P/\Phi(P)$ как $\mathbb{Z}_p A$ -модуль. Положим $x_i = x_1^{\alpha^{i-1}}$, $i=2,\ldots,p$. Тогда $x_1 = x_p^{\alpha}, x_2, \ldots, x_p$ – минимальная система порождающих P, такая, что α циклически переставляет её элементы. Очевидно, что $C_{P/\Phi(P)}(\alpha) = \langle x_1 \cdot \ldots \cdot x_p \cdot \Phi(P)\rangle$. Теорема будет доказана, если в смежном классе $x_1 \cdot \ldots \cdot x_p P'$ будет найден элемент из $C_P(\alpha)$.

Рассмотрим свободную нильпотентную ступени $p-1$ группу F ранга p со свободными образующими $u_1, \ldots, u_p$. Группа F обладает автоморфизмом φ, который циклически переставляет образующие. Отображение $u_i \longrightarrow x_i$, $i=1,\ldots,p$, как известно, продолжается до гомоморфизма $\tau: F \to P$, $F^{\tau} = P$. Ясно, что $\tau\alpha = \varphi\tau$. Если будет найден элемент из $C_F(\varphi)$ в смежном классе $u_1 \cdot \ldots \cdot u_p \cdot F'$, то его образ при гомоморфизме τ и будет искомой неподвижной точкой в смежном классе $x_1 \cdot \ldots \cdot x_p P'$. Но по лемме 3 φ действует свободно на факторах нижнего центрального ряда группы F, поэтому применение леммы 1 доказывает теорему.

Фактически доказано более сильное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть G – произвольная группа, φ – её автоморфизм порядка p^n, x – элемент из G и пусть группа

$$G_0 = \langle x, x^\varphi, \ldots, x^{\varphi^{|\varphi|-1}} \rangle$$

нильпотентна ступени меньше p. Тогда в смежном классе $x \cdot x^\varphi \cdot \ldots \cdot x^{\varphi^{|\varphi|-1}} G_0'$ есть элемент из $C_{G_0}(\varphi)$.

Для доказательства необходима лишь достаточно простая редукция к случаю, когда $|\varphi| = p$, а затем нужно вновь перейти к группе, свободной в многообразии $(p-1)$-ступенно нильпотентных групп.

Примеры показывают, что увеличить ступень нильпотентности p в формулировке теоремы нельзя.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G – конечная разрешимая группа, A – её абелева p-группа автоморфизмов. Пусть Q_1 и Q_2 – две A-инвариантные холловские p'-подгруппы группы G. Если ступень нильпотентности силовской p-подгруппы группы G меньше p, то Q_1 и Q_2 сопряжены элементом из $C_G(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по порядку группы G.

(1) Можно считать, что любая максимальная нормальная подгруппа из G имеет индекс, взаимно простой с p. Если бы это было не так, то достаточно было бы рассмотреть вместо G подгруппу $O^p(G)$.

(2) Очевидно, можно считать, что $O_{p'}(G) = 1$.

(3) Далее, можно считать, что любая собственная A -инвари - антная нормальная подгруппа пересекается с Q_1, а значит, и с Q_2, по 1. Пусть, напротив, $N \triangleleft G$, N – A -инвариантна и $Q_1 \cap N \neq 1$. Из (1) следует, что $N \cap Q_1 \neq Q_1$. Ясно, что $N \cap Q_1$ и $N \cap Q_2$ являются холловскими p'-подгруппами группы N и, так как они A -инвариантны, сопряжены элементом y из $C_G(A)$. Но теперь достаточно доказать сопряженность элементом из $C_G(A)$ подгрупп Q_1^y и Q_2. Очевидно, можно считать, что $G = \langle Q_1^y, Q_2 \rangle$. Но тогда $(Q_1 \cap N)^y$ лежит в $O_{p'}(G)$ вопреки (2).

(4) Из (2) и (3) следует, что Q_1 можно считать элементар - ной q -группой, точно действующей на нормальной силовской p-под- группе.

(5) Аналогично (3) легко получить, что в Q_1 нет собственных A -инвариантных подгрупп.

(6) Из (5) следует, что можно считать $A = \langle \varphi \rangle$. Пусть $|\varphi| = p^n$.

(7) Автоморфизм φ точно представлен на Q_1.

Если бы это было не так, то достаточно было бы рассмотреть группу $C_G(\varphi^{p^{n-1}})$, которая имеет меньший порядок.

(8) Так как автоморфизм φ точен и неприводим на Q_1, то он регулярен на Q_1, и, следовательно, группа $Q_1\langle\varphi\rangle$ фробениусова с ядром Q_1.

(9) Можно считать, что группа Q_1 действует без неподвижных точек на $P/\Phi(P)$. Достаточно, воспользовавшись теоремой 5. 3. 5 из [3], перейти к φ -инвариантной группе $[P, Q_1] \cdot Q_1$.

(10) Докажем, что $V = P/\Phi(P)$ является свободным $\mathbb{Z}_p\langle\varphi\rangle$-модулем. То, что $\mathbb{Z}_p\langle\varphi\rangle$- модуль V свободен, эквивалентно тому, что относительно некоторого базиса элемент φ представлен клеточ - но-диагональной матрицей, в которой все клетки размера $|\varphi| \times |\varphi|$ и имеют такой вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому достаточно доказать, что свободен $K\langle\varphi\rangle$-модуль V_K, который получается при алгебраическом замыкании поля $\mathbb{Z}_p$. Действие группы $Q_1\langle\varphi\rangle$ на V_K определяется естественным образом.

Пусть $V_K = V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset V_{n+1} = 0$ – неуплотняемая цепочка $Q_1\langle\varphi\rangle$-инвариантных подпространств. Из (9) следует, что группа Q_1 действует без неподвижных точек на каждом из фактор-пространств V_i/V_{i+1}. Теперь, в силу (5) и (8), выполнены условия теоремы 3.4.3 из [3], из заключения которой следует, что модуль V_i/V_{i+1} свободен. Легко доказать, что свободен и модуль V_K, а следовательно, и модуль $V = P/\Phi(P)$.

Далее, можно считать, что $Q_2 = Q_1^x$, где $x \in P \setminus \Phi(P)$. Из того, что Q_2 и Q_1 φ-инвариантны, следует, что $[x^{-1},\varphi] \in C_P(Q_1)$. По (9) $C_P(Q_1) \subseteq \Phi(P)$. Отсюда имеем, что $x \in C_{P/\Phi(P)}(\varphi)$. (Мы обозначаем образы элементов в фактор-группах так же, как и сами элементы.) Теперь, в силу доказанной теоремы, найдется такой элемент c из $C_P(\varphi)$, что $x = c\cdot f$ для некоторого элемента f из $\Phi(P)$. Очевидно, что группа Q_1^c φ-инвариантна. Теперь достаточно доказать сопряженность элементом из $C_P(\varphi)$ групп Q_1^c и Q_2. Но обе они лежат в φ-инвариантной группе $Q_1^c\cdot\Phi(P)$ меньшего порядка, и индукция завершает доказательство.

Литература

1. J.THOMPSON, Fixed points of p-groups, acting on p-groups, Math.Z.,86 (1964),12–13.

2. М.ХОЛЛ, Теория групп, М., ИЛ, 1962.

3. D.GORENSTEIN, Finite groups, Harper and Row, 1968.

4. L.EVENS, On a theorem of Thompson on fixed points of groups acting on p-groups, Math.Z.,93, № 2 (1966),105–108.

Поступило 25 ноября 1975 г.