N. N. Dobrovol'skii, The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization,
Chebyshevskii Sb., 2017, Volume 18, Issue 4, 188–208

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 4

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-187-207

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ МОНОИДОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ОДНОЗНАЧНЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ[1]

Н. Н. Добровольский (г. Тула)

Аннотация

В работе рассматривается новый класс рядов Дирихле — дзета-функции моноидов натуральных чисел. Изучаются обратные ряды Дирихле для дзета-функции моноидов натуральных чисел. Показано, что вопрос о существовании эйлерова произведения для дзета-функции моноида связан с однозначностью разложения на простые множители в этом моноиде.

Вводится понятие взаимно простых множеств натуральных чисел и показано, что для таких множеств имеет место мультипликативность минимальных моноидов и соответствующих дзета-функций моноидов.

Показано, что если все простые элементы моноида являются простыми числами, то характеристическая функция моноида будет мультипликативной функцией и в этом случае дзета-функция моноида будет обобщённой L-функцией.

Рассматриваются различные примеры моноидов и соответствующих дзета-функций моноидов. Изучена связь вопросов обращения дзета-функции моноида и обобщённой функции Мёбиуса на моноиде как частично упорядоченном множестве с помощью отношения делимости натуральных чисел. Получены ряд свойств дзета-функций моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители.

В работе рассмотрен вопрос о логарифмировании эйлерова произведения, как функции комплексного аргумента. Показано, что непрерывная функция, задающая значение логарифма эйлерового произведения вблизи полюса пробегает все ветви бесконечно-значной функции логарифма. Получены следствия о значения комплекснозначной функции специального вида вблизи особой точки. Из этих свойств вытекают утверждения о значениях дзета-функции Римана вблизи границы области абсолютной сходимости.

С помощью постулата Бертрана введены бесконечные экспоненциальные последовательности простых чисел. Показано, что соответствующие дзета-функции моноидов натуральных чисел абсолютно сходятся во всей полуплоскости с положительной действительной частью. Так как такие дзета-функции моноидов натуральных чисел во всей области абсолютной сходимости раскладываются в эйлерово произведение, то они во всей полуплоскости с положительной действительной частью не имеют нулей.

В заключении рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение, логарифм эйлерова произведения.

Библиография: 17 названий.

THE ZETA-FUNCTION IS THE MONOID OF NATURAL NUMBERS WITH UNIQUE FACTORIZATION

N. N. Dobrovol'skii (Tula)

[1]Работа подготовлена по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

Abstract

In this paper we consider a new class of Dirichlet series, the zeta functions of monoids of natural numbers. The inverse Dirichlet series for the zeta function of monoids of natural numbers are studied. It is shown that the existence of an Euler product for the zeta function of a monoid is related to the uniqueness of the factorization into prime factors in this monoid.

The notion of coprime sets of natural numbers is introduced and it is shown that for such sets the multiplicativity of minimal monoids and corresponding zeta-functions of monoids takes place.

It is shown that if all prime elements of a monoid are prime numbers, then the characteristic function of the monoid is a multiplicative function and in this case the zeta function of the monoid is a generalized L-function.

Various examples of monoids and corresponding zeta functions of monoids are considered. The relation between the inversion of the zeta function of a monoid and the generalized Möbius function on a monoid as a partially ordered set is studied by means of the divisibility of natural numbers. A number of properties of the zeta functions of monoids of natural numbers with a unique decomposition into prime factors are obtained.

The paper deals with taking the logarithm of an Eulerian product as a function of a complex argument. It is shown that a continuous function that determines the value of the logarithm of an Euler product runs through all branches of the infinite-valued function of the logarithm near its pole. The corollaries on the value of a complex-valued function of a special form near a singular point are obtained. These properties imply statements about the values of the Riemann zeta function near the boundary of the region of absolute convergence.

Using Bertrand's postulate, infinite exponential sequences of prime numbers are introduced. It is shown that corresponding zeta-functions of monoids of natural numbers converge absolutely in the whole half-plane with a positive real part. Since such zeta-functions of monoids of natural numbers can be decomposed into an Euler product in the whole region of absolute convergence, they do not have zeros in the entire half-plane with a positive real part.

In conclusion, topical problems with zeta-functions of monoids of natural numbers that require further investigation are considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product, logarithm of the Euler product.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Для любого множества A натуральных чисел определим дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ равенством

$$\zeta(A|\alpha)=\sum_{x\in A}\frac{1}{x^{\alpha}}\quad(\alpha=\sigma+it,\,\sigma>1). \tag{1}$$

Если множество A конечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α-плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leqslant \sigma_A \leqslant 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$ (см. [13], [14]). Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Будем через $M(A)$ обозначать минимальный мультипликативный моноид, содержащий множество A. Таким образом, мы имеем:

$$M(A) = \{a_1 \ldots a_l | a_1, \ldots, a_l \in A, l \geqslant 0\}.$$

Здесь мы используем естественное соглашение, что пустое произведение равно 1.

Будем говорить, что два множества натуральных чисел A и B взаимно просты, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ выполнено $(a, b) = 1$. В этом случае будем писать $(A, B) = 1$.

Нетрудно видеть, что при $(A, B) = 1$ справедливы равенства

$$M(A \cdot B) = M(A) \cdot M(B), \quad \zeta(M(A \cdot B)|\alpha) = \zeta(M(A)|\alpha)\zeta(M(B)|\alpha). \tag{2}$$

Ясно, что последнее равенство имеет место при $\sigma > \sigma_{M(A \cdot B)}$ и $\sigma_{M(A\cdot B)} = \max(\sigma_{M(A)}, \sigma_{M(B)})$. Равенство (2) следует из того, что при $(A, B) = 1$ представление $n = n_1 n_2$, где $n \in M(A \cdot B)$, $n_1 \in M(A)$ и $n_2 \in M(B)$, единственное.

Если через $\zeta^*(A|\alpha)$ обозначается обратный ряд, то есть $\zeta^*(A|\alpha) = \zeta^{-1}(A|\alpha)$, то нетрудно понять, что если $1 \in A$, то

$$\zeta^*(A|\alpha) = \sum_{n \in M(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha}, \tag{3}$$

где коэффициенты $x_A(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$x_A(1) = 1, \sum_{m|n,\, m \in A} x_A\left(\frac{n}{m}\right) = 0 \quad (n \in M(A), n > 1). \tag{4}$$

Обозначим через $\sigma_{A,1}$ число, такое что для $A^* = A \setminus \{1\}$ и

$$S(A, \alpha) = \sum_{n \in A^*} \frac{1}{n^\alpha}$$

выполнено $|S(A, \alpha)| < 1$ при $\sigma > \sigma_{A,1}$, тогда

$$\zeta^{-1}(A|\alpha) = \frac{1}{1 + S(A, \alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu S^\nu(A, \alpha) =$$

$$= 1 - \sum_{n \in A^*} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^\nu \sum_{n_1, \ldots, n_\nu \in A^*} \frac{1}{(n_1 \ldots n_\nu)^\alpha} = \sum_{n \in M(A)} \frac{x_A(n)}{n^\alpha}$$

и для $x_A(n)$ выполнены соотношения

$$x_A(1) = 1, \quad x_A(n) = \sum_{\nu \geqslant 1} (-1)^\nu y_\nu(n) \quad n \in M^*(A),$$

где $y_\nu(n)$ — количество решений уравнения $n = n_1 \ldots n_\nu$ в натуральных $n_1, \ldots, n_\nu \in A^*$.

Таким образом, если σ_A^* определяет правую полуплоскость $\sigma > \sigma_A^*$ абсолютной сходимости обратного ряда $\zeta^*(A|\alpha)$, то $\sigma_A^* \leqslant \sigma_{A,1}$.

Если M_1 и M_2 — два взаимно простых моноида[2] $(M_1, M_2) = 1$, то из равенства

$$\zeta(M_1 \cdot M_2)|\alpha) = \zeta(M_1|\alpha)\zeta(M_2|\alpha)$$

вытекает

$$\zeta^*(M_1 \cdot M_2)|\alpha) = \zeta^*(M_1|\alpha)\zeta^*(M_2|\alpha),$$
$$x_{M_1 \cdot M_2}(n_1 n_2) = x_{M_1}(n_1) x_{M_2}(n_2), \quad n_\nu \in M_\nu \quad (\nu = 1, 2).$$

Пусть M — произвольный мультипликативный моноид натуральных чисел. Будем через $P(M)$ обозначать множество его простых элементов. Понятно, что если через $\mathbb{P}$ мы обозначаем множество простых чисел, то $M \bigcap \mathbb{P} \subset P(M)$. Кроме простых чисел, попавших в M, множество простых элементов $P(M)$ состоит из псевдопростых чисел. Если любые два простых элемента из $P(M)$ взаимнопросты, то моноид M имеет однозначное разложение на простые элементы. Это достаточное условие однозначности разложения на простые элементы, но оно не является необходимым.

Обозначим через $P(M|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

Будем называть каноническим разложением элемента x из мультипликативного моноида M натуральных чисел представление вида

$$x = r_1^{\alpha_1} \ldots r_k^{\alpha_k}, \quad 1 < r_1 < \ldots < r_k, \quad r_1, \ldots, r_k \in P(M).$$

Через $k(x)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа x, тогда эйлерово произведение $P(M|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}.$$

Таким образом, равенство эйлерова произведения и дзета-функции моноида M равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде.

Для произвольной мультипликативной функции $f(n)$ через $L(\alpha, f)$ будем обозначать обобщенную L-функцию, если ряд Дирихле

$$L(\alpha, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\alpha} \tag{5}$$

абсолютно сходится в некоторой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$. В этой полуплоскости будет справедливо разложение в эйлерово произведение

$$L(\alpha, f) = \prod_p \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\right).$$

[2]Как правило здесь и далее слово мультипликативный будем опускать, так как все моноиды в данной работе мультипликативные.

Если выполнено дополнительное условие $f(p^\nu) = f^\nu(p)$, то эйлерово произведение будет иметь более компактный вид

$$L(\alpha, f) = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Если выполнено другое дополнительное условие $f(p^\nu) = af_1^\nu(p)$ при $\nu \geqslant 1$, то эйлерово произведение будет иметь другой компактный вид

$$L(\alpha, a, f_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\nu(n)} f_1(n)}{n^\alpha} = \prod_p \left(1 + \frac{af_1(p)}{p^\alpha - f_1(p)}\right).$$

Если для мультипликативной функции $f(n)$ выполнено соотношение $f(n) = O(n^\varepsilon)$ для произвольного $\varepsilon > 0$, то ряд Дирихле (5) абсолютно сходится в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$.

Обозначим через $\chi_M(n)$ характеристическую функцию мультипликативного моноида M натуральных чисел:

$$\chi_M(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n \in M, \\ 0, & \text{при } n \in \mathbb{N} \setminus M. \end{cases}$$

Если $P(M) \subset \mathbb{P}$, то $\chi_M(n)$ — мультипликативная функция и мультипликативный моноид M имеет однозначное разложение на простые множители. В этом случае дзета-функция $\zeta(M|\alpha)$ является обобщённой L-функцией $L(\alpha, \chi_M)$.

Цель данной статьи — изучить свойства дзета-функций мультипликативных моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители и её логарифмов.

2. Примеры моноидов и обобщённая функция Мёбиуса

Простейшем примером моноида натуральных чисел является геометрическая прогрессия. Пусть $A = \{1, a\}$ и $a > 1$, тогда $M(A) = \{a^\nu | \nu \geqslant 0\}$, $P(M(A)) = \{a\}$,

$$\zeta(A|\alpha) = 1 + \frac{1}{a^\alpha}, \quad \zeta^*(A|\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{a^{\nu\alpha}} = \sum_{n \in M(A)} \frac{\mu_A(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu_A(n)$ — обобщённая функция Мёбиуса на моноиде $M(A)$:

$$\mu_A(n) = (-1)^\nu \text{ при } n = a^\nu.$$

Для моноида $M(A)$ имеем:

$$\zeta(M(A)|\alpha) = \sum_{n \in M(A)} \frac{1}{n^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{a^\alpha}\right)^{-1}, \quad \zeta^*(M(A)|\alpha) = 1 - \frac{1}{a^\alpha}.$$

Будем для любого простого числа $p \in \mathbb{P}$ через $M(p)$ обозначать геометрическую прогрессию со знаменателем p и первым членом 1. Теорему о разложении любого натурального числа в произведение простых чисел можно записать следующим образом

$$\mathbb{N} = \prod_{p \in \mathbb{P}} M(p),$$

а теорема об однозначности такого разложения означает, что $k(n) = 1$ — число канонических разложений для натурального числа n.

Таким образом, наиболее известными моноидами натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители являются $\mathbb{N}$ и $M(p)$ ($p \in \mathbb{P}$). Для случая $M(p)$ обратный ряд $\zeta^*(M(p)|\alpha)$ для $\zeta(M(p)|\alpha)$ выписан выше, а для случая $\mathbb{N}$ он хорошо известен:

$$\zeta(\mathbb{N}|\alpha) = \zeta(\alpha), \quad \zeta^*(\mathbb{N}|\alpha) = \zeta^{-1}(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu(n)$ — обычная функция Мёбиуса.

Рассмотрим ещё два примера. Пусть $(a,b) = d$, $a = da_1$, $b = db_1$, $a_1 > 1$, $b_1 > 1$ и $A(a,b) = \{1, a, b\}$. Ясно, что

$$M(A(a,b)) = \{a^\nu b^\mu | \nu, \mu \geqslant 0\}, \quad P(M(A(a,b))) = \{a, b\}$$

и $M(A(a,b))$ — моноид с однозначным разложением на простые множители.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(A(a,b)) = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu+\mu}^{\nu}(-1)^{\nu+\mu}}{(a^\nu b^\mu)^\alpha}.$$

Доказательство. Действительно, перемножая ряды Дирихле, получим

$$\zeta(A(a,b))\zeta^*(A(a,b)) = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu+\mu}^{\nu}(-1)^{\nu+\mu}}{(a^\nu b^\mu)^\alpha} + \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu+\mu}^{\nu}(-1)^{\nu+\mu}}{(a^{\nu+1} b^\mu)^\alpha} + \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu+\mu}^{\nu}(-1)^{\nu+\mu}}{(a^\nu b^{\mu+1})^\alpha} = 1+$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu + (-1)^{\nu-1}}{(a^\nu)^\alpha} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\mu + (-1)^{\mu-1}}{(b^\mu)^\alpha} + \sum_{\nu,\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+\mu}(C_{\nu+\mu}^{\nu} - C_{\nu+\mu-1}^{\nu} - C_{\nu+\mu-1}^{\nu-1})}{(a^\nu b^\mu)^\alpha} = 1,$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Пусть $a > 1$ и $\nu > 1$, тогда для $A(a, a^\nu)$ имеем:

$$M(A(a,a^\nu)) = \{a^\mu | \mu \geqslant 0\}, \quad P(M(A(a,a^\nu))) = \{a\}$$

и $M(A(a,a^\nu))$ — моноид с однозначным разложением на простые множители.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\zeta^*(A(a,a^\nu)) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x(\mu)}{(a^\mu)^\alpha},$$

где $x(\mu) = (-1)^\mu$ *при* $0 \leqslant \mu \leqslant \nu - 1$ *и* $x(\mu) = -x(\mu-1) - x(\mu-\nu)$ *при* $\mu \geqslant \nu$.

Доказательство. Действительно, перемножая ряды Дирихле, получим

$$\zeta(A(a,a^\nu))\zeta^*(A(a,a^\nu)) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x(\mu)}{(a^\mu)^\alpha} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x(\mu)}{(a^{\mu+1})^\alpha} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x(\mu)}{(a^{\nu+\mu})^\alpha} = 1+$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{x(\mu) + x(\mu-1)}{(a^\mu)^\alpha} + \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \frac{x(\mu) + x(\mu-1) + x(\mu-\nu)}{(a^\mu)^\alpha} = 1.$$

Отсюда следует, что $x(\mu) = (-1)^\mu$ при $0 \leqslant \mu \leqslant \nu - 1$ и $x(\mu) = -x(\mu-1) - x(\mu-\nu)$ при $\mu \geqslant \nu$, что и доказывает утверждение леммы. □

Из доказанной леммы следует, что при всех значениях $\nu \geqslant 2$ минимальные моноиды $M(A(a, a^\nu))$ совпадают, а коэффициенты в числителях отличаются.

Если M — моноид с однозначным разложением на простые множители, то существует эйлерово произведение и мы легко находим обратный ряд

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha) = \prod_{r\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$
$$\zeta^*(M|\alpha) = \prod_{r\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right) = \sum_{n\in M} \frac{\mu_M(n)}{n^\alpha},$$

где $\mu_M(n)$ — обобщённая функция Мёбиуса, заданная равенствами

$$\mu_M(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ (-1)^\nu, & \text{при } n = r_1 \ldots r_\nu,\ r_1 < \ldots r_\nu, \\ 0, & \text{при } n = r^2 n_1,\ r, n_1 \in M. \end{cases}$$

В общем случае, описываемым формулами (3) и (4), для нахождения явного вида коэффициентов $x_A(n)$ нам потребуется обобщённая функция Мёбиуса на частично упорядоченном моноиде $M(A)$.

Рассмотрим на $M(A)$ естественное частичное упорядочение индуцированное отношением делимости натуральных чисел.

Определение 1. *Говорим, что для $a, b \in M(A)$ выполнено $a \prec b$, если $a|b$, $a \in A$ и $a < b$. Соотношение $a \preceq b$ означает, что либо $a \prec b$, либо $a = b$.*

Воспользуемся известными обозначениями и фактами из комбинаторной теории (см. [12], [1]):
дельта функция Кронекера

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y; \end{cases}$$

дзета-функция

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \preceq y, \\ 0, & \text{если } x \not\preceq y; \end{cases}$$

функция Мёбиуса

$$\mu(x, y) = \zeta^{-1}(x, y).$$

Последнее равенство означает, что

$$(\zeta * \mu)(x, y) = \sum_{x\preceq z\preceq y} \zeta(x, z)\mu(z, y) = \sum_{x\preceq z\preceq y} \mu(z, y) = \delta(x, y),$$
$$(\mu * \zeta)(x, y) = \sum_{x\preceq z\preceq y} \mu(x, z)\zeta(z, y) = \sum_{x\preceq z\preceq y} \mu(x, z) = \delta(x, y).$$

Если

$$g(x) = \sum_{y\preceq x} f\left(\frac{x}{y}\right),$$

то

$$f(x) = \sum_{y\preceq x} g\left(\frac{x}{y}\right) \mu(y, x).$$

Лемма 3. *Для коэффициентов $x_A(n)$ справедливо равенство*

$$x_A(n) = \mu(1, n)$$

для любого $n \in M(A)$.

Доказательство. Действительно, перемножим ряды $\zeta(A|\alpha)$ и $\zeta^*(A|\alpha)$, получим

$$\zeta(A|\alpha)\zeta^*(A|\alpha) = \sum_{n\in M(A)} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{m\preceq n} x\left(\frac{n}{m}\right) = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{m\preceq n} x\left(\frac{n}{m}\right) = \delta(1, n).$$

Поэтому

$$x(n) = \sum_{m\preceq n} \delta(1, m)\mu(m, n) = \mu(1, n),$$

что доказывает утверждение леммы. □

3. Логарифм эйлерова произведения

3.1. Лемма о ветвях логарифма

Будем в этом разделе через $(\ln z)$ обозначать, следуя [9], главное значение $\ln z$. Таким образом, если $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, то $(\ln z) = \ln\rho + i\varphi$, где $\ln\rho$ — обычный вещественный логарифм, изменяющийся от $-\infty$ до ∞. Отсюда следует, что

$$\varphi = -i\left(\ln\frac{z}{|z|}\right).$$

Приведём важное тождество для главного значения логарифма произведения:

$$z_j = \rho_j e^{i\varphi_j}, \quad \rho_j > 0, \quad -\pi < \varphi_j \leqslant \pi \quad (j = 1, 2), \tag{6}$$

$$(\ln z_1 z_2) = (\ln z_1) + (\ln z_2) + 2\pi n i, \tag{7}$$

$$n = n(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\pi < \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant \pi, \\ 1, & \text{при } -2\pi < \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant -\pi, \\ -1, & \text{при } \pi < \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что

$$n = n(\varphi_1, \varphi_2) = \left[-\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\pi} + \frac{1}{2}\right],$$

$$(\ln z_1 z_2) = (\ln z_1) + (\ln z_2) + 2\pi\left[-\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] i =$$

$$= (\ln z_1) + (\ln z_2) + 2\pi\left[i\frac{\left(\ln\frac{z_1}{|z_1|}\right) + \left(\ln\frac{z_2}{|z_2|}\right)}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] i.$$

Так как все ветви многозначной функции $\ln z$ выражаются через главную ветвь, то мы пронумеруем все ветви номерами k от $-\infty$ до ∞ следующим образом:

$$\ln_k z = (\ln z) + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Тождество (7) можно обобщить следующим образом

$$\ln_{k_1+k_2} z_1 z_2 = \ln_{k_1} z_1 + \ln_{k_2} z_2 + 2\pi \left[i\frac{\left(\ln \frac{z_1}{|z_1|}\right) + \left(\ln \frac{z_2}{|z_2|}\right)}{2\pi} + \frac{1}{2} \right] i.$$

Как известно (см. [9], стр. 81) каждая ветвь $\ln_k z$ — регулярная ветвь в области D, состоящей из всех точек комплексной плоскости, за исключением точек отрицательной части действительной оси (в том числе и точки $z = 0$). При переходе через этот разрез происходит переход с одной ветви на другую соседнюю, согласно нумерации.

Лемма 4. **(О логарифме)** *Пусть в окрестности точки α_0 логарифм аналитической функции $f(\alpha)$ задан непрерывной функцией $h(\alpha)$: $\ln f(\alpha) = h(\alpha)$. Если в точке α_0 функция $h(\alpha)$ переходит с одной ветви логарифма на другую, то значение $f(\alpha_0)$ — отрицательное.*

Доказательство. Рассмотрим малую ε-окрестность точки α_0: $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, в которой непрерывная функция $h(\alpha)$ принимает либо значение $\ln_k f(\alpha)$, либо $\ln_{k+1} f(\alpha)$. Так как значения ветви $\ln_k f(\alpha)$ имеют вид $a + bi$, $-\pi + 2\pi k < b \leqslant \pi + 2\pi k$, а значения ветви $\ln_{k+1} f(\alpha)$ имеют вид $a + bi$, $-\pi + 2\pi(k+1) < b \leqslant \pi + 2\pi(k+1)$, то равенство двух ветвей может достигаться только в тех точках, где $b = \pi + 2\pi k = -\pi + 2\pi(k+1)$. Но если $h(\alpha) = a + (\pi + 2\pi k)i$, то значение $f(\alpha)$ — отрицательное. Если мы через γ обозначим границу между областью $D_\nu = \{\alpha | h(\alpha) = \ln_\nu f(\alpha), |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon\}$ $(\nu = k, k+1)$, то для всех точек $\alpha \in \gamma$ значение $f(\alpha)$ будет отрицательное. Так как по условию $\alpha_0 \in \gamma$, то лемма полностью доказана. □

Важно отметить, что если дано какое-то значение $\ln z = a + bi$, то легко определить номер ветви логарифма и выразить главное значение, а именно

$$\ln z = \ln_k z, \quad k = -\left[-\frac{b}{2\pi} + \frac{1}{2}\right],$$
$$(\ln z) = \ln z + 2\pi \left[-\frac{b}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] i = a + 2\pi \left(\frac{1}{2} - \left\{-\frac{b}{2\pi} + \frac{1}{2}\right\}\right) i.$$

Замечание 1. *Пользуясь этой формулой, можно легко указать как меняются ветви логарифма и как выражаются главные значения, если $\ln f(\alpha) = h(\alpha)$:*

$$\ln f(\alpha) = \ln_{k(\alpha)} f(\alpha), \quad k(\alpha) = -\left[-\frac{\Im h(\alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2}\right],$$
$$(\ln f(\alpha)) = h(\alpha) + 2\pi \left[-\frac{\Im h(\alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] i.$$

3.2. Значения логарифмируемой функции

Лемма 5. *Пусть при $1 < \alpha < 2$ комплекснозначная функция*

$$F(\alpha) = e^{-\frac{i}{2}\ln(\alpha-1) + f(\alpha)}$$

и непрерывная функция $f(\alpha)$ ограничена константой $c > 0$, $|f(\alpha)| \leqslant c < 2$, тогда на интервале $(1, 2)$ существует бесконечная последовательность $2 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > 1$ нулей действительной части $F(\alpha)$:

$$\Re(F(\alpha_j)) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

бесконечная последовательность $2 > \beta_1 > \beta_2 > \ldots > 1$ нулей мнимой части $F(\alpha)$:

$$\Im(F(\beta_j)) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

бесконечная последовательность $2 > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > 1$ *отрицательных значений* $F(\alpha)$*:*

$$F(\lambda_j) < 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

бесконечная последовательность $2 > \delta_1 > \delta_2 > \ldots > 1$ *положительных значений* $F(\alpha)$*:*

$$F(\delta_j) > 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Обозначим через $g(\alpha)$ действительную часть $f(\alpha)$, а через $h(\alpha)$ — мнимую часть. Таким образом, $f(\alpha) = g(\alpha) + ih(\alpha)$, $|g(\alpha)| \leqslant c$, $|h(\alpha)| \leqslant c$.

Имеем:

$$F(\alpha) = e^{g(\alpha)}\left(\cos\left(-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1) + h(\alpha)\right) + i\sin\left(-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1) + h(\alpha)\right)\right).$$

Так как для непрерывной функции $-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1) + h(\alpha)$ на интервале $(1, 2)$ выполнены условия

$$-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1) + h(\alpha) > -c, \qquad \lim_{\alpha\to 1^+}\left(-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1) + h(\alpha)\right) = \infty,$$

то для любого φ с $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ на каждом отрезке вида

$$\left[1 + e^{-2\varphi-4\pi k-2c}, 1 + e^{-2\varphi-4\pi k+2c}\right]$$

имеется хотя бы один корень уравнения

$$-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1) + h(\alpha) = \varphi + 2k\pi.$$

Действительно, если положить $\alpha = 1 + e^{-2\varphi-4\pi k-2\beta}$, то при β, пробегающем отрезок $[-c, c]$, α будет пробегать отрезок $\left[1 + e^{-2\varphi-4\pi k-2c}, 1 + e^{-2\varphi-4\pi k+2c}\right]$. При этом уравнение

$$-\frac{1}{2}\ln(\alpha-1) + h(\alpha) = \varphi + 2k\pi$$

перейдёт в уравнение

$$\beta + h\left(1 + e^{-2\varphi-4\pi k-2\beta}\right) = 0,$$

которое имеет хотя бы одно решение, так как график функции

$$y(\beta) = -h\left(1 + e^{-2\varphi-4\pi k-2\beta}\right)$$

лежит в квадрате $(\beta, y) \in [-c, c]^2$ и диагональ квадрата имеет с графиком хотя бы одну точку пересечения, которая соответствует корню уравнения.

Так как все отрезки $\left[1 + e^{-2\varphi-4\pi k-2c}, 1 + e^{-2\varphi-4\pi k+2c}\right]$ при $\frac{c-\varphi}{2\pi} \leqslant k$ вложены в отрезок $[1, 2]$ и их объединение при $k \geqslant 0$ вложено в отрезок $\left[1, 1 + e^{-2\varphi+2c}\right]$, то на отрезке $[1, 2]$ имеется бесконечное множество значений α, для которых $\arg F(\alpha) = \varphi$.

При $\varphi = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ получаем первое утверждение леммы о бесконечном числе нулей действительной части $F(\alpha)$.

При $\varphi = 0, \pi$ получаем второе утверждение леммы о бесконечном числе нулей мнимой части $F(\alpha)$.

При $\varphi = \pi$ получаем третье утверждение леммы о бесконечном числе отрицательных значений $F(\alpha)$.

Наконец, при $\varphi = 0$ получаем последнее утверждение леммы о бесконечном числе положительных значений $F(\alpha)$. $\square$

Другой вариант леммы 5 звучит так.

Лемма 6. *Пусть N — натуральное и при $1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}}<\alpha<2$ комплекснозначная функция*

$$F(\alpha)=e^{-\ln(\alpha-1)+f(\alpha)}$$

и непрерывная функция $f(\alpha)$ ограничена константой $c>0$, $|f(\alpha)|\leqslant c<2$, тогда на интервале $(1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}},2)$ существует последовательность $2>\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_N>1$ нулей действительной части $F(\alpha)$:

$$\Re(F(\alpha_j))=0\qquad(j=1,2,\ldots,N);$$

последовательность $2>\beta_1>\beta_2>\ldots>\beta_N>1$ нулей мнимой части $F(\alpha)$:

$$\Im(F(\beta_j))=0\qquad(j=1,2,\ldots,N);$$

последовательность $2>\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_N>1$ отрицательных значений $F(\alpha)$:

$$F(\lambda_j)<0\qquad(j=1,2,\ldots,N);$$

последовательность $2>\delta_1>\delta_2>\ldots>\delta_N>1$ положительных значений $F(\alpha)$:

$$F(\delta_j)>0\qquad(j=1,2,\ldots,N).$$

Доказательство. Обозначим через $g(\alpha)$ действительную часть $f(\alpha)$, а через $h(\alpha)$ — мнимую часть. Таким образом, $f(\alpha)=g(\alpha)+ih(\alpha)$, $|g(\alpha)|\leqslant c$, $|h(\alpha)|\leqslant c$.

Имеем:

$$F(\alpha)=e^{g(\alpha)}\left(\cos\left(-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)\right)+i\sin\left(-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)\right)\right).$$

Так как для непрерывной функции $-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)$ на интервале

$$(1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}},2)$$

выполнены условия

$$-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)>-c,\qquad\lim_{\alpha\to1^+}\left(-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)\right)=\infty,$$

то для любого φ с $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ на каждом отрезке вида

$$\left[1+e^{-\varphi-2\pi k-c},1+e^{-\varphi-2\pi k+c}\right]$$

имеется хотя бы один корень уравнения

$$-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)=\varphi+2k\pi.$$

Действительно, если положить $\alpha=1+e^{-\varphi-2\pi k-\beta}$, то при β, пробегающем отрезок $[-c,c]$, α будет пробегать отрезок $\left[1+e^{-\varphi-2\pi k-c},1+e^{-\varphi-2\pi k+c}\right]$. При этом уравнение

$$-\ln(\alpha-1)+h(\alpha)=\varphi+2k\pi$$

перейдёт в уравнение

$$\beta+h\left(1+e^{-\varphi-2\pi k-\beta}\right)=0,$$

которое имеет хотя бы одно решение, так как график функции

$$y(\beta)=-h\left(1+e^{-\varphi-2\pi k-2\beta}\right)$$

лежит в квадрате $(\beta, y) \in [-c, c]^2$ и диагональ квадрата имеет с графиком хотя бы одну точку пересечения, которая соответствует корню уравнения.

Так как все отрезки $\left[1+e^{-\varphi-2\pi k-c}, 1+e^{-\varphi-2\pi k+c}\right]$ при $1 \leqslant k \leqslant N$ вложены в отрезок $[1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}}, 2]$, то на отрезке $[1+e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}}, 2]$ имеется бесконечное множество значений α, для которых $\arg F(\alpha) = \varphi$.

При $\varphi = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ получаем первое утверждение леммы об N нулях действительной части $F(\alpha)$.

При $\varphi = 0, \pi$ получаем второе утверждение леммы об N нулях мнимой части $F(\alpha)$.

При $\varphi = \pi$ получаем третье утверждение леммы об N отрицательных значениях $F(\alpha)$.

Наконец, при $\varphi = 0$ получаем последнее утверждение леммы об N положительных значениях $F(\alpha)$. □

3.3. Логарифм обобщённой L-функции с эйлеровым произведением

Пусть мультипликативная функция $f(n)$ удовлетворяет соотношениям

$$f(n) = \prod_{p|n} f(p)^{\alpha_p} \quad (n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}), \quad \forall \varepsilon > 0 \quad f(n) = O\left(n^{\varepsilon}\right),$$

тогда обобщенная L-функция, заданная рядом Дирихле

$$L(\alpha, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{\alpha}},$$

который абсолютно сходится в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$, в этой полуплоскости имеет разложение в эйлерово произведение

$$L(\alpha, f) = \prod_{p} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(p^{\nu})}{p^{\nu\alpha}} \right) = \prod_{p} \left(1 - \frac{f(p)}{p^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Обобщённая L-функция $L(\alpha, f)$ для $\alpha = \sigma + it$ при фиксированном значении t и при $\sigma \to \infty$ имеет предел

$$\lim_{\sigma \to \infty} L(\alpha, f) = 1.$$

Поэтому для главного значения логарифма обобщённой L-функции $L(\alpha, f)$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\sigma \to \infty} (\ln L(\alpha, f)) = 0,$$

кроме того, всегда выполнено соотношение

$$(\ln L(\alpha, f)) = \ln |L(\alpha, f)| + i\varphi(\alpha, f), \quad -\pi < \varphi(\alpha, f) \leqslant \pi.$$

Для дальнейшего потребуется частный случай леммы о степенном ряде для главного значения логарифма.

Лемма 7. *Главное значение* $(\ln(1-z))$ *логарифма при* $|z| < 1$ *представляется сходящимся степенным рядом*

$$(\ln(1 - z)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Доказательство. См. [9], стр. 79–81. □

3.4. Логарифм дзета-функции Римана

Нам потребуется некоторые простейшие свойства дзета-функции Римана, которые в силу важности для дальнейшего кратко изложим.

Как известно, $\zeta(\alpha)$ аналитически продолжается на всю α-плоскость кроме точки $\alpha = 1$, в которой полюс первого порядка.

Определим сумматорную функции $A(x)$: $A(x) = \sum_{n=1}^{x} 1$.

Лемма 8. *При $x \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$A(x) = x - \{x\}.$$

Доказательство. Действительно,

$$A(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} 1 = [x] = x - \{x\}.$$

□

Лемма 9. *При $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 0$ справедливо интегральное представление*

$$\zeta(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) - \alpha \int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Доказательство. Действительно, по теореме Абеля (см. [14], стр. 106) имеем:

$$\zeta(\alpha) = \alpha \int\limits_1^{\infty} \frac{A(x)}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha \int\limits_1^{\infty} \frac{x - \{x\}}{x^{\alpha+1}} dx = \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) - \alpha \int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}} dx$$

и все интегралы абсолютно сходятся, так как $\sigma > 0$. □

Из доказанной леммы следует, что дзета-функция $\zeta(\alpha)$ аналитически продолжается с помощью указанного интегрального представления на полуплоскость $\sigma > 0$ кроме точки $\alpha = 1$, в которой полюс первого порядка с вычетом 1.

Лемма 10. *При $\alpha > 0$ и для*

$$\theta(\alpha) = \alpha \int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}} dx$$

справедливы соотношения

$$\zeta(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) - \theta(\alpha), \quad 0 < \theta(\alpha) < 1, \quad \alpha \neq 1. \tag{9}$$

При $\sigma > 0$ справедливы соотношения

$$\zeta(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) + \theta(\alpha), \quad |\theta(\alpha)| < \frac{|\alpha|}{\sigma}, \quad \alpha \neq 1. \tag{10}$$

Доказательство. Для числителя $\{x\}$ подынтегрального выражения справедливы неравенства $0 \leqslant \{x\} < 1$. Поэтому для $\theta(\alpha)$ при $\alpha > 0$ имеем соотношения

$$\theta(\alpha) = \alpha \int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}} dx, \quad 0 < \theta(\alpha) < \alpha \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx = 1$$

и первое утверждение леммы доказано.

При $\sigma > 0$ имеем:

$$|\theta(\alpha)| = |\alpha| \left| \int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\alpha+1}} dx \right| < |\alpha| \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx = \frac{|\alpha|}{\sigma}$$

и лемма полностью доказана. □

Лемма 11. *При $\alpha > 1$ справедливы неравенства*

$$-\ln(\alpha-1) < \ln\zeta(\alpha) < \begin{cases} -\ln(\alpha-1)+\ln(\alpha), & \text{при } 1<\alpha<2, \\ \ln 2, & \text{при } \alpha \geqslant 2. \end{cases} \tag{11}$$

Доказательство. Действительно, из предыдущей леммы следует, что при $\alpha > 1$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{\alpha-1} < \zeta(\alpha) < \frac{1}{\alpha-1} + 1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

После логарифмирования получим соотношение (11). □

Положим при $\sigma \geqslant 1$

$$\theta_1(\alpha) = \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{n\alpha}}.$$

Лемма 12. *При $\sigma \geqslant 1$ функция $\theta_1(\alpha)$ — непрерывная функция, заданная абсолютно, равномерно сходящемся рядом.*

При $\sigma \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$|\theta_1(\alpha)| < \frac{1}{2^\sigma - 1} - \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma - 1} < 1.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $|\theta_1(\alpha)| \leqslant \theta_1(\sigma)$, $(\sigma \geqslant 1)$. Далее имеем:

$$\theta_1(\sigma) = \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{n\sigma}} < \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^{n\sigma}} = \sum_p \frac{1}{p^\sigma(p^\sigma - 1)} =$$
$$= \sum_p \left(\frac{1}{p^\sigma - 1} - \frac{1}{p^\sigma} \right) < \frac{1}{2^\sigma - 1} - \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma - 1},$$
$$\lim_{\sigma\to\infty} \theta_1(\alpha) = 0, \quad 0 < \theta_1(\sigma) < 1 \quad (\sigma \geqslant 1).$$

□

Лемма 13. *При $\alpha > 1$ справедливы соотношения*

$$\ln\zeta(\alpha) = \sum_p \frac{1}{p^\alpha} + \theta_1(\alpha), \quad 0 < \theta_1(\alpha) < 1, \tag{12}$$

$$-\ln(\alpha-1) - 1 < \sum_p \frac{1}{p^\alpha} < \begin{cases} -\ln(\alpha-1)+\ln(\alpha), & \text{при } 1<\alpha<2, \\ \ln 2, & \text{при } \alpha \geqslant 2. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Действительно, при $\alpha > 1$ выполняются неравенства

$$0 < \frac{1}{p^\alpha} < \frac{1}{2}.$$

Поэтому абсолютно и равномерно сходятся при $\alpha \geqslant 1$ следующие ряды для логарифмов:

$$\ln\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\cdot p^{\alpha\nu}}$$

и

$$\ln P(\alpha) = \ln\left(\prod_p\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}\right) = \sum_p\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\cdot p^{\alpha\nu}}.$$

Отсюда следует, что при $\alpha > 1$ справедливы оценки

$$0 < \ln P(\alpha) - \sum_p\frac{1}{p^\alpha} = \sum_p\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu\cdot p^{\alpha\nu}} < \sum_p\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{p^\nu} = \sum_p\frac{1}{p(p-1)} < 1.$$

Таким образом,

$$\ln\zeta(\alpha) - 1 < \sum_p\frac{1}{p^\alpha} < \ln\zeta(\alpha).$$

□

Хорошо известна формула для главного значения логарифма дзета-функции (см. [13], стр. 8):

$$(\ln\zeta(\alpha)) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda_1(n)}{n^\alpha} \quad (\sigma > 1), \quad \Lambda_1(n) = \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \tag{14}$$

и $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{при } n = p^m,\\ 0, & \text{при } \nu(n) > 1 \text{ или } \nu(n) = 0.\end{cases}$$

Формулу для главного значения логарифма дзета-функции можно переписать в следующем виде:

$$(\ln\zeta(\alpha)) = \sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{m\alpha}} = L(\alpha) + \theta_1(\alpha) \quad (\sigma > 1),$$

$$L(\alpha) = \sum_p\frac{1}{p^\alpha}, \quad \theta_1(\alpha) = \sum_p\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{np^{n\alpha}}.$$

В силу леммы 13 при $\alpha > 1$ справедливы неравенства

$$-\ln(\alpha-1) - 1 < L(\alpha) < \begin{cases} -\ln(\alpha-1)+\ln(\alpha), & \text{при } 1<\alpha<2,\\ \ln 2, & \text{при } \alpha \geqslant 2.\end{cases}$$

Формула (14) требует уточнения, которое дается с помощью следующих лемм.

Лемма 14. *Для произвольного $T > 1$, $\sigma_0 > 1$ и $\varepsilon > 0$ найдётся $\tau > T$ такое что во всей полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ выполняются неравенства*

$$|L(\alpha+i\tau) - iL(\alpha)| < \varepsilon, \quad |L(\alpha-i\tau) + iL(\alpha)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $P = P(\varepsilon, \sigma_0)$ такое, что

$$\sum_{p>P} \frac{1}{|p^\alpha|} < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\sigma \geqslant \sigma_0 > 1),$$

тогда

$$\left| \sum_{p>P}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha} - \sum_{p>P}^{\infty} \frac{1}{p^{\alpha+i\tau}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу равномерной, абсолютной сходимости ряда, задающего $L(\alpha)$, в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ это возможно.

Так как величины $\ln 2, \ldots, \ln P$ линейно независимые действительные числа, то по теореме Кронекера (см. [13], стр. 180) найдётся такое $\tau > T$, что найдутся целые k_p такие, что выполнены условия

$$\left| \tau \frac{\ln p}{2\pi} - k_p + \frac{1}{4} \right| < \delta, \text{ при } p \leqslant P$$

которые можно переписать следующим образом

$$\tau \ln p - k_p 2\pi + \frac{\pi}{2} = \delta_p, \quad |\delta_p| < 2\pi\delta, \text{ при } p \leqslant P.$$

Отсюда следует, что для любого $p \leqslant P$ имеем

$$p^{-i\tau} = e^{-i\tau \ln p}, \quad i = e^{\frac{i\pi}{2}},$$

$$p^{-i\tau} = e^{\frac{i\pi}{2} - i\delta_p} = ie^{-i\delta_p},$$

$$\left|p^{i\tau} + i\right| = \left|p^{-i\tau} - i\right| = \left|e^{-i\delta_p} - 1\right| = |\cos(\delta_p) - 1 - i\sin(\delta_p)| =$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos(\delta_p)} = 2\left|\sin\frac{\delta_p}{2}\right| \leqslant |\delta_p| < 2\pi\delta.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \sum_{p \leqslant P} \frac{i}{p^\alpha} - \sum_{p \leqslant P} \frac{1}{p^{\alpha+i\tau}} \right| < 2\pi\delta\zeta(\sigma_0), \quad \left| \sum_{p \leqslant P} \frac{-i}{p^\alpha} - \sum_{p \leqslant P} \frac{1}{p^{\alpha-i\tau}} \right| < 2\pi\delta\zeta(\sigma_0).$$

Полагая $\delta = \frac{\varepsilon}{4\pi\zeta(\sigma_0)}$, получим

$$|L(\alpha + i\tau) - iL(\alpha)| < \varepsilon, \quad |L(\alpha - i\tau) + iL(\alpha)| < \varepsilon$$

и лемма полностью доказана. □

Лемма 15. *Для любого натурального N существует τ_N, такое что на отрезке*

$$\left[1 + e^{-2(N+1)\pi + \frac{5}{2}} + i\tau_N; 2 + i\tau_N\right]$$

найдутся точки $\alpha_k = \sigma_k + i\tau_N$, выражение для логарифма дзета-функции

$$\ln\zeta(\alpha) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m\alpha}},$$

в которых принимает значения для k-ой ветви $\ln_k \zeta(\alpha)$, а на отрезке

$$\left[1 + e^{-2(N+1)\pi + \frac{5}{2}} - i\tau_N; 2 - i\tau_N\right]$$

найдутся точки $\alpha_{-k} = \sigma_{-k} - i\tau_N$ выражение для логарифма дзета-функции, в которых принимает значения для $-k$-ой ветви $\ln_{-k} \zeta(\alpha)$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$.

Доказательство. Во-первых, для любого вещественного t имеем

$$|\ln\zeta(2+it)| = |L(2+it)+\theta_1(2+it)| \leqslant \ln\zeta(2) = \ln\frac{\pi^2}{6} = 0.498.. < \frac{\pi}{6},$$

поэтому для любого вещественного t значение

$$\ln\zeta(2+it) = \sum_p \sum_{m=1}^{2} \frac{1}{mp^{m(2+it)}}$$

— главное значение логарифма.

Возьмём в лемме 14 $\sigma_0 = 1 + e^{-2(N+2)\pi+\frac{5}{2}}$ и $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда найдётся τ_N такое, что

$$|L(\sigma)i - L(\sigma+i\tau_n)| < \frac{1}{2}, \quad |-L(\sigma)i - L(\sigma-i\tau_n)| < \frac{1}{2}$$

для любого $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Действительная функция $L(\sigma)$ монотонно убывает. При $\sigma = \sigma_0$ имеем

$$L(\sigma_0) > -\ln(\sigma_0 - 1) - 1 = 2(N+2)\pi - \frac{5}{2} - 1.$$

Поэтому $L(\sigma_0+i\tau_n) + \theta_1(\sigma_0+i\tau_n) = a + bi$ и

$$b = L(\sigma_0) + \delta, \quad |\delta| < \frac{3}{2}, \quad b > 2(N+1)\pi - \frac{5}{2} - 1 - \frac{3}{2} = 2(N+1)\pi - 5.$$

Но это означает, что величина $L(\sigma_0+i\tau_n) + \theta_1(\sigma_0+i\tau_n) = a + bi$ принадлежит k-ой ветви логарифма, где

$$k = -\left[-\frac{b}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] \geqslant -\left[-\frac{2(N+1)\pi - 5}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] = N.$$

Отсюда следует, что непрерывная функция

$$\ln\zeta(\sigma+i\tau_N) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m(\sigma+i\tau_N)}}$$

при изменении σ от σ_0 до 2 последовательно движется по ветвям $\ln_k$ от $k = N$ до $k = 0$.

Аналогично доказывается второе утверждение леммы в силу сопряженности значения логарифма. □

Теорема 1. *Для любого натурального N существует τ_N, такое что на отрезке*

$$\left[1 + e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}} + i\tau_N; 2 + i\tau_N\right]$$

найдутся точки $\alpha_k = \sigma_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — отрицательное число ($k = = 1, \ldots, N$);

— $\alpha_k = \lambda_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — положительное число ($k = 1, \ldots, N$);

— $\alpha_k = \delta_k + i\tau_N$ такие, что $\zeta(\alpha_k)$ — чисто мнимое число ($k = 1, \ldots, N$).

Доказательство. Действительно, в силу предыдущей леммы на отрезке

$$\left[1 + e^{-2(N+1)\pi+\frac{5}{2}} + i\tau_N; 2 + i\tau_N\right]$$

функция $\ln\zeta(\sigma+i\tau_N)$ принимает последовательно значения из различных ветвей логарифмической функции. При переходе от одной ветви к другой логарифмируемая функция проходит через отрицательное значение. Так как таких переходов не менее N, то первое утверждение теоремы доказано.

Два вторых утверждения следуют из лемм 6. □

3.5. Ветви логарифма одной обобщённой L-функции с Эйлеровым произведением

Рассмотрим мультипликативную функцию $h(n) = i^{\sum_{p|n}\alpha_p}$ при $n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}$ и ряд Дирихле $M(\alpha, h)$, заданный равенством

$$M(\alpha, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^{\alpha}} = \prod_{p} \left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Следующая лемма показывает, что почленное логарифмирование Эйлерова произведения для $M(\alpha, h)$ не дает главного значения логарифма $M(\alpha, h)$.

Лемма 16. *Существует $\delta > 0$ такое, что при $1 < \sigma < 1 + \delta$ справедливо неравенство*

$$(\ln M(\alpha, h)) \neq \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{np^{n\alpha}}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при $\sigma > 1$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{i}{p^{\alpha}}\right| < \frac{1}{2},$$

поэтому абсолютно и равномерно сходятся при $\sigma \geqslant 1$ следующие ряды для логарифмов:

$$\ln\left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu}}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}}, \quad \ln\left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right)^{-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu}}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}},$$

которые в силу леммы 7 задают главные значения логарифмов. Таким образом

$$\left(\ln\left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right)\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu}}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}}, \quad \left(\ln\left(1 - \frac{i}{p^{\alpha}}\right)^{-1}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{\nu}}{\nu \cdot p^{\alpha\nu}}.$$

Рассмотрим значение $\ln M(\alpha, h)$, заданное рядом

$$\ln M(\alpha, h) = \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{np^{n\alpha}} = iL(\alpha) + R_h(\alpha), \qquad R_h(\alpha) = \sum_{p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{np^{n\alpha}}.$$

который получен почленным логарифмированием Эйлерова произведения.

Нетрудно видеть, что $|R_h(\alpha)| \leqslant R(\sigma) < 1$, $(\sigma > 1)$. □

4. Экспоненциальная последовательность простых чисел

Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечную последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ будем называть экспоненциальной, если выполняются соотношения $q \leqslant p_1 < q^2$, $q^{\nu} < p_{\nu} < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 2)$.

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым, (см. [14]) для любого $q \geqslant 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел.

Теорема 2. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ дзета ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.*

Доказательство. Так как $M(PE)$ — моноид с однозначным разложением на простые множители, то в области абсолютной сходимости дзет-функция $\zeta(M(PE))$ имеет эйлерово произведение

$$P(M(PE)|\alpha) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_\nu^\alpha}\right)^{-1}.$$

Для логарифма эйлерова произведения с помощью почленного логарифмирования получаем равномерно, абсолютно сходящийся ряд

$$\ln\zeta(M(PE))|\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu p_\nu^{\alpha\mu}},$$

так как для него при $\sigma \geqslant \sigma_0$, $\sigma_0 > 0$ имеется мажорирующий ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu q^{\sigma_0\mu\nu}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{n(\lambda)}{q^{\lambda\sigma_0}},$$

где

$$n(\lambda) = \sum_{\mu|\lambda}\frac{1}{\mu} < 1 + \ln\lambda$$

и мажорирующий ряд равномерно сходится. Это доказывает утверждение теоремы. □

Из существования эйлерова произведения вытекает, что для любой экспоненциальной последовательности простых чисел в правой полуплоскости $\sigma > 0$ дзета-функция $\zeta(M(PE))|\alpha)$ не имеет нулей.

5. Заключение

Данная тема исследований возникла в связи с изучением гиперболической дзета-функции решёток (см. [5, 6, 7], [17]). Другими источниками этих исследований были работы [2, 3, 4], [8, 10, 13, 15, 16].

В следующих работах мы планируем рассмотреть естественно возникающие в данной области проблемы, а именно:

- аналитическое продолжение для дзета-функции произвольного моноида натуральных чисел;
- получение функционального уравнения;
- обратные ряды для дзета-функции моноида натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители.

Важным классом моноидов натуральных чисел без однозначного разложения на простые множители на наш взгляд являются моноиды соответствующие подгруппам мультипликативной группы классов вычетов по произвольному модулю.

В заключении автор выражает свою глубокую признательность профессорам В. И. Иванову и В. Н. Чубарикову за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. Айгнер Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982. 558 с.

2. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.

3. С. М. Воронин Избранные труды: Математика / Под ред. А. А. Карацубы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. — 480 с.

4. С. М. Воронин, А. А. Карацуба Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

5. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13. Вып. 4(44). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 4–107.

6. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Доклады академии наук 2007. Т. 412, № 3. С. 302–304.

7. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

8. Г. Дэвенпорт Мультипликативная теория чисел. — М.: Наука, 1971. — 200 с.

9. А. Гурвиц, Р. Курант Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

10. Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем. — М.: Мир, 1967. 511 с.

11. И. И. Привалов Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1977. — 444 с.

12. Р. Стенли Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990. — 440 с.

13. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.

14. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.

15. Чандрасекхаран К. Арифметические функции, пер. с англ. — М.: Наука, 1975. 272 с.

16. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.

17. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Ajgner M., 1982, *Kombinatornaja teorija*, Izd-vo Mir, Moskva, 558 p.

2. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, "Around the Davenport–Heilbronn function", *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.

3. Voronin S. M., 2006, *Izbrannye trudy: Matematika. Pod red. A. A. Karacuby*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moskva, 480 p.

4. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

5. Dobrovol'skaja L. P., Dobrovol'skij M. N., Dobrovol'skij N. M., Dobrovol'skij N. N., 2012, "Giperbolicheskie dzeta-funkcii setok i reshjotok i vychislenie optimal'nyh kojefficientov" *Chebyshevskii Sbornik* vol 13, №4(44) pp. 4–107.

6. Dobrovol'skij M. N., 2007, "Funkcional'noe uravnenie dlja giperbolicheskoj dzeta-funkcii celochislennyh reshetok" , *Doklady akademii nauk*, vol 412, № 3, pp. 302–304.

7. Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Dobrovol'skaya L. P., Bocharova O. E., 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 17, № 3 pp. 72–105.

8. Davenport H., 1971, *Mul'tiplikativnaja teorija chisel*, Izd-vo Nauka, Moskva, 200 p.

9. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.

10. Prahar K., 1967, *Raspredelenie prostyh chisel, per. s nem*, Izd-vo Mir, Moskva, 511 p.

11. Privalov I. I., 1977, *Vvedenie v teoriju funkcij kompleksnogo peremennogo*, Izd-vo Nauka, Moskva, 444 p.

12. Stenli R., 1990, *Perechislitel'naja kombinatorika*, Izd-vo Mir, Moskva, 440 p.

13. Titchmarsh E. K., 1952, *Teorija dzeta-funkcii Rimana* Izd-vo I-L, Moskva, 407 p.

14. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

15. Chandrasekharan K., 1975, *Arifmeticheskie funkcii, per. s angl*, Izd-vo Nauka, Moskva, 272 p.

16. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series" , *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

17. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Тульский государственный университет
Получено 25.10.2017
Принято в печать 14.12.2017