М. И. Кратко, О существовании нерекурсивных базисов конечных автоматов, *Алгебра и логика. Семинар*, 1964, том 3, номер 2, 33–44

А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

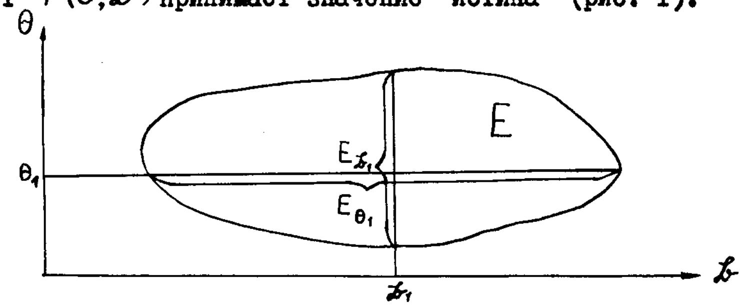
Том III
Выпуск 2 Руководитель А.И.Мальцев 1964 г.

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕРЕКУРСИВНЫХ БАЗИСОВ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

М.И.Кратко

Б а з и с о м будем называть любой набор конечных автоматов, у которых входной алфавит один и тот же и выходной алфавит является подалфавитом входного. Будем говорить, что в базисе $\mathfrak{b}$ ограниченно-детерминированный оператор (о-д оператор) Θ реализуем, если существует такая логическая сеть над базисом $\mathfrak{b}$, в которой реализуется оператор Θ. (Определения понятий "о-д оператор" и "логическая сеть" см. [I])

Пусть $P(\Theta,\mathfrak{b})$ – двуместный предикат, определенный на множестве пар вида "о-д оператор–базис", принимающий значения: "истина", если оператор Θ реализуем в базисе $\mathfrak{b}$, и "ложь" – в противном случае. Обозначим через E множество пар, на которых предикат $P(\Theta,\mathfrak{b})$ принимает значение "истина" (рис. I).



Р и с. I.

Зафиксируем о-д оператор Θ_1. Из множества E мы тем самым выделим подмножество E_{Θ_1}. В [2] показано, что произвольное такое подмножество E_{θ_1} является нерекурсивным.

Зафиксировав некоторый базис $\mathcal{B}_1$, мы также из множества E выделим подмножество $E_{\mathcal{B}_1}$. Известно, что имеются такие базисы, для которых множество $E_{\mathcal{B}}$ рекурсивно (например, любой полный базис). Вместе с тем известно, что существуют такие плоские множества, что все подмножества, высеченные из них по горизонтали, нерекурсивны, а все подмножества, высеченные по вертикали, рекурсивны.

Возникает вопрос, существуют ли такие базисы, что для них множества $E_{\mathcal{B}}$ нерекурсивны (такие базисы также будем называть нерекурсивными). В настоящей работе доказывается существование нерекурсивных базисов. Построен конкретный пример такого базиса C.

При построении нерекурсивного базиса C использована алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания выводимости слов в нормальном исчислении Поста $\mathcal{L}_4$ (см. [3] стр. 202).

Зафиксируем алфавиты $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,\ell,m,n\}$ и $\bar{A}=A\cup\{\mu,\delta\}$. Пусть T – произвольное слово длины $\lambda(T)$ в алфавите A. Каждому слову T поставим в соответствие константный о-д оператор $\theta(T)$, вырабатывающий следующую последовательность $\underbrace{\delta\mu\mu\mu\ldots\mu}_{(2\cdot\lambda(T)-2)\text{ раз}}T\mu\mu\mu\ldots$.

Базис C построен таким образом, что он обладает следующими свойствами: 1. По выводу любого слова T в $\mathcal{L}_4$ можно эффективно построить логическую сеть над C, реализующую о-д оператор $\theta(T)$. 2. По структуре любой логической сети над C, реализующей некоторый константный о-д оператор $\theta(T)$, можно в $\mathcal{L}_4$ восстановить вывод слова T из слова $feam$. Этим устанавливается нерекурсивность базиса C.

§ 1. Свойства базиса C

Базис C состоит из элементов четырех типов (рис. 2 а, б, в, г):

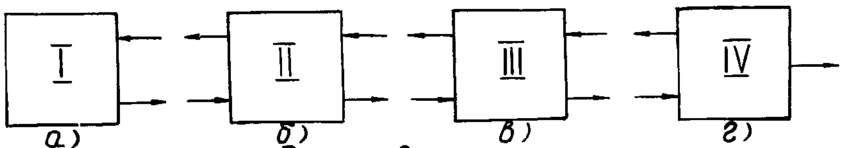


Рис. 2

Будем различать у них главные и вспомогательные каналы. Главные каналы будем обозначать стрелками, направленными слева направо, а вспомогательные – стрелками, направленными справа налево.

Исходному слову исчисления $\mathcal{L}_4$ – $feam$ – ставится в соответствие элемент типа I. Каждому правилу непосредственной выводимости исчисления $\mathcal{L}_4$ ставится в соответствие один элемент типа $\overline{II}$. Элемент, сопоставленный i-ому правилу непосредственной выводимости ($1 \leqslant i \leqslant 88$), будем обозначать через $\overline{II}_i$.

Каждой букве алфавита A ставятся в соответствие два элемента: один элемент типа $\overline{III}$ и один элемент типа $\overline{IV}$. Элементы типа $\overline{III}$ и $\overline{IV}$, поставленные в соответствие букве $x \in A$, будем соответственно обозначать $\overline{III}_x$ и $\overline{IV}_x$.

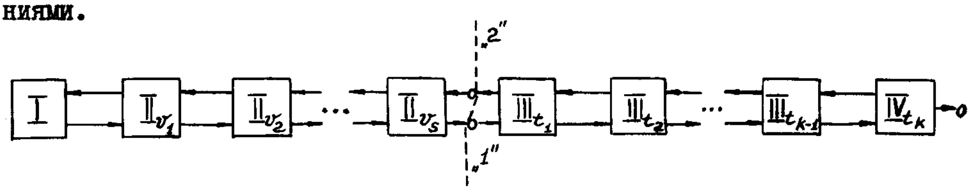
Таким образом, базис C содержит всего 117 элементов. Из них 1 элемент типа $\overline{I}$, 88 элементов типа $\overline{II}$, 14 элементов типа $\overline{III}$ и 14 элементов типа $\overline{IV}$.

Каждой букве $x \in A$ поставим в соответствие две буквы x^1 и x^2. Все буквы алфавита A, помеченные индексом 1, составляют алфавит A_1, помеченные индексом 2 – алфавит A_2. Внешним алфавитом базиса C является следующий алфавит:

$$\tilde{A} = \bar{A} \cup A_1 \cup A_2 \cup \{\alpha, \beta, \mu^1, \mu^2, \mu^3, \mu^4, \omega\} .$$

Прежде чем перейти к полному описанию работы элементов типа $\overline{I}$ – $\overline{IV}$, изложим те соображения, которыми мы руководствовались при их выборе.

Пусть $T = t_1 t_2 \ldots t_k$ – слово, выводимое в исчислении $\mathcal{L}_4$ и пусть правила непосредственной выводимости исчисления $\mathcal{L}_4$ применяются при выводе слова T из слова $feam$ в следующем порядке: v_1, v_2, $v_3, \ldots, v_s$. Мы хотим, чтобы о-д оператор $\Theta(T)$ был реализуем в базисе C, причем только в такой логической сети, которая имеет вид, показанный на рис. 3, или в таких логических сетях, которые могут быть приведены к этому виду некоторыми простыми преобразованиями.



Р и с. 3

Логические сети такого вида состоят из двух частей, которые в дальнейшем мы будем называть проверяющей и задающей частями.

Проверяющая часть однозначно строится по выводу слова T в исчислении $\mathcal{L}_4$ и состоит из элемента $\overline{I}$ и соответствующих элементов типа $\overline{II}$. На рис. 3 она отделена от задающей части полюсами "1" и "2". На проверяющую часть возложена задача в некотором смысле промоделировать процесс вывода слова T из слова $feam$.

Задающая часть однозначно строится по слову T и состоит из соответствующих элементов типа $\overline{III}$ и $\overline{IV}$. На нее возложены следующие функции. Она должна:

а) "хранить" слово T и начинать его выдачу по главному каналу элемента $\overline{IV}_{t_k}$ (полюс „z"), начиная с такта $2k$ (напоминаем, что k - длина слова T);

б) "запустить" в нужное время проверяющую часть;

в) сравнить слово, выработанное проверяющей частью со словом T.

Работа логической сети, изображенной на рис. 3, происходит следующим образом. В первый так времени элемент $\overline{IV}_{t_k}$ по своему вспомогательному каналу выдает букву α, которая такт за тактом "проходит" по вспомогательным каналам элементов и последовательно переводит их в состояние "возбуждения".

Через k тактов "возбудится" элемент $\overline{III}_{t_1}$; но на этот раз, благодаря тому, что слева к нему присоединен элемент типа $\overline{II}$, он по своему главному выходному каналу выдаст букву t_1. Элемент $\overline{III}_{t_2}$ "пропустит" букву t_1 по главному каналу и следом за ней выдаст букву t_2 и т.д. Таким образом, через $2k$ тактов элемент $\overline{IV}_{t_k}$ по главному выходному каналу начинает выдачу слова $t_1 t_2 \ldots t_k$.

Через $k+s$ тактов буква α дойдет до элемента $\overline{I}$ и "возбудит" его. Возбудившись, он выдаст слово $feam$ и перейдет в состояние "покоя". Элемент $\overline{II}_{v_1}$, получив на главный входной канал слово $feam$, выдаст по главному выходному каналу слово, которое получается, если к $feam$ применить правило непосредственной выводимости v_1. Выдав это слово, он также перейдет в состояние "покоя". Это слово поступает на главный входной канал элемента $\overline{II}_{v_2}$; этот элемент по своему главному выходному каналу выдает слово, которое получается, если к входному слову применить правило непосредственной выводимости v_2 и т.д. Когда дойдет очередь до элемента $\overline{II}_{v_s}$, то он по своему главному выходному каналу выдаст последовательно слово $t_1 t_2 \ldots t_k$ и перейдет в состояние "покоя".

Элемент $\overline{III}_{t_1}$ "перерабатывает" это слово в слово $\mu\, t_2 t_3 \ldots t_k$ и переходит в состояние "покоя". Элемент $\overline{III}_{t_2}$ "перерабатывает" слово $\mu\, t_2 t_3 \ldots t_k$ в слово $\mu\mu\, t_3 \ldots t_k$ и переходит в состояние "покоя" .и т.д.

Таким образом, слово T, "выработанное" проверяющей частью, переведет в состояние "покоя" все элементы задающей части. Когда все элементы логической сети перешли в состояние покоя, на выходном полюсе z вырабатывается последовательность $\mu\mu\mu \ldots$.

Сравнительно нетрудно построить такие элементы типа $\overline{I}$ - $\overline{IV}$, чтобы по выводу любого слова T в исчислении α_4 можно было построить логическую сеть имеющую вид, изображенный на рис. 3, в которой был бы реализован константный о-д оператор $\Theta(T)$. Эти элементы могут быть построены многими разными способами.

Однако, чтобы ни в какой логической сети, существенно отличной от сети, изображенной на рис. 3, нельзя было реализовать никакой константный о-д оператор $\Theta(T)$, следует принять меры предосторожности. В построенных ниже элементах типа $\overline{I}-\overline{IV}$ такие меры предосторожности приняты.

Прежде чем перейти к полному описанию работы элементов типа $\overline{I}-\overline{IV}$, отметим некоторые их свойства, которые играют важную роль при доказательстве теоремы.

СВОЙСТВО I. У каждого элемента во множестве внутренних состояний имеется состояние q_ω ("поломка"). Любой элемент, находясь в состоянии q_ω:

а) по своим выходным каналам выдает букву ω,

б) из состояния q_ω не может перейти ни в какое другое внутреннее состояние.

В каком бы внутреннем состоянии ни находился элемент, он перейдет в состояние q_ω, если

в) хотя бы на один его входной канал поступит буква ω,

г) на главный входной канал поступит одна из букв алфавита $\bar{A} \cup \{\alpha, \beta\}$,

д) на вспомогательный входной канал поступит одна из букв алфавита $\bar{A} \cup A_1 \cup A_2 \cup \{\mu^1, \mu^2, \mu^3, \mu^4\}$.

В связи с этим свойством определим понятия "правильная работа" и "правильная логическая сеть".

Пусть на входные каналы элемента поступает некоторая входная последовательность. Будем говорить, что элемент работает правильно, если в процессе переработки этой последовательности он не переходит в состояние q_ω. Очевидно, что работа элемента зависит от входной последовательности: при одних входных последовательностях элемент работает правильно, при других – нет. При правильной работе на главном выходном канале элементов типа $\overline{I}-\overline{IV}$ могут появляться следующие буквы:

а) элементов типа $\overline{I}$ и $\overline{II}$ – буквы алфавита $A_1 \cup \{\mu^1, \mu^2\}$,

б) элемента типа $\overline{III}$ – буквы алфавита $A_2 \cup \{\mu^3, \mu^4\}$,

в) элемента типа $\overline{IV}$ – буквы алфавита A.

На вспомогательном канале любого элемента типа $\overline{I}-\overline{IV}$ – буква α или β.

Аналогично определяется понятие правильной работы для логических сетей. Логическая сеть работает правильно, если в процессе работы ни один элемент, из которого достижим выходной полюс сети, не переходит в состояние q_ω.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку элементы логической сети, из которых не достижим ни один выходной полюс этой сети, никак не влияют на значения выходных букв, то их можно совсем не принимать во внимание. В дальнейшем будем рассматривать только такие логические сети, в которых из каждого элемента достижим хотя бы один выходной полюс сети.

П р а в и л ь н о й назовем такую логическую сеть, которая при любой входной последовательности работает правильно. Очевидно, что в правильной логической сети ни из одного входного полюса не достижим ни один выходной полюс, то есть любая правильная логическая сеть реализует некоторый константный о-д оператор. Обратное, разумеется, неверно. Не всякая логическая сеть, реализующая константный о-д оператор, является правильной. В дальнейшем нас будут интересовать только правильные логические сети, ибо константные о-д операторы $\Theta(T)$ реализуются только в таких логических сетях.

СЛЕДСТВИЯ ИЗ СВОЙСТВА I.

а) В п р а в и л ь н ы х л о г и ч е с к и х с е т я х г л а в н ы е к а н а л ы э л е м е н т о в м о г у т б ы т ь с о е д и н е н ы т о л ь к о с г л а в н ы м и, а в с п о м о г а т е л ь н ы е т о л ь к о с о в с п о м о г а т е л ь н ы м и.

б) Л ю б а я л о г и ч е с к а я с е т ь, р е а л и з у ю щ а я н е к о т о р ы й о - д о п е р а т о р $\Theta(T)$, с о д е р ж и т т о л ь к о о д и н э л е м е н т т и п а $\overline{IV}$, п р и ч е м о н я в л я е т с я в ы х о д н ы м э л е м е н т о м э т о й с е т и.

СВОЙСТВО 2. У каждого элемента во множестве внутренних состояний имеется состояние q_0 ("ведущее"), из которого достижимы все внутренние состояния.

Множества всех входных последовательностей (пар последовательностей) для каждого элемента разделим на два класса последовательностей: п р а в и л ь н ы х и н е п р а в и л ь н ы х. Правильными назовем такие последовательности (пары последовательностей), которые не переводят данный элемент из состояния q_0 в состояние q_ω. Все остальные входные последовательности назовем неправильными.

СВОЙСТВО 3. Пусть на входные каналы некоторого элемента, находящегося в состоянии q_0, поступает неправильная последовательность (пара последовательностей) и пусть к такту τ поступило слово (пара слов) $x(1)x(2)\dots x(\tau)$. Если это слово (пару слов) нельзя продолжить ни в какую правильную последовательность (пару последовательностей), то в $\tau+1$ такт данный элемент переходит в состояние q_ω.

СЛЕДСТВИЕ ИЗ СВОЙСТВА I-3. Д л я т о г о ч т о б ы о п р е д е л и т ь р а б о т у л ю б о г о э л е м е н т а т и п а $\overline{I}-\overline{IV}$, н а д о у к а з а т ь, к а к и м о б р а з о м о н п е р е р а б а т ы в а е т в с е п р а в и л ьные последовательности.

Именно так и будут определены в § 2 элементы типа I–IV.

СВОЙСТВО 4. В каком бы внутреннем состоянии не находился элемент типа II, он перейдет в состояние g_ω, если на его главный входной канал поступит буква алфавита $A_2 \cup \{\mu^3, \mu^4\}$.

СВОЙСТВО 5. Для того чтобы элементы типа I–III работали правильно, необходимо, чтобы в последовательности, поступающей на их вспомогательный канал, буква α встречалась не больше одного раза.

СВОЙСТВО 6. Пусть в некоторой логической сети L имеются произвольные элементы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, соединенные так, как показано на рис. 4,

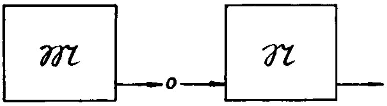


Рис. 4

и пусть в такт τ элемент $\mathfrak{N}$ по своему вспомогательному каналу выдает букву α. Для того чтобы сеть L работала правильно, необходимо, чтобы в тот же такт τ буква α поступила на вспомогательный канал элемента $\mathfrak{M}$ (в противном случае, в такт $\tau+1$ элемент $\mathfrak{N}$ перейдет в состояние g_ω).

Нетрудно проверить, что элементы типа I–IV, определенные в § 2, обладают свойствами I–6 (см. табл. I–6).

§ 2. Элементы типа I–IV

ЭЛЕМЕНТ ТИПА I. Правильной входной последовательностью элемента типа I является любая такая последовательность букв α и β, в которой буква α встречается не больше одного раза.

Работа элемента типа I показана на таблице I.

Таблица I.

Вход	β	β	β	...	β	β	α	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	β	...
Выход	μ^2	μ^2	μ^2	...	μ^2	μ^2	μ^2	μ^2	μ^1	f^1	e^1	a^1	m^1	μ^1	μ^2	μ^2	μ^2	μ^2	...
Внутрен. сост.	g_0	g_0	g_0	...	g_0	g_0	g_0								g_1	g_1	g_1	g_1	...

ЭЛЕМЕНТ ТИПА 2. Как уже было отмечено выше, каждому правилу непосредственной выводимости исчисления $\mathcal{L}_4$ ставится в соответствие один элемент типа II.

Пусть правило непосредственной выводимости имеет вид $p_1p_2\dots p_mR\vdash Rq_1\dots q_n$ (m –длина левой части, n –длина правой части). Правильной парой последовательностей для соответствующего элемента типа $\overline{II}$ является следующая пара последовательностей:

1) Последовательность, поступающая на вспомогательный канал, состоит из букв α и β, причем буква α встречается в ней не больше одного раза. (Пусть она встречается в позиции τ.)

2) Последовательность, поступающая на главный канал, имеет следующую структуру. Первые ее $\tau+1$ букв – буквы μ^2. Дальше, одна или больше (произвольное количество) букв – μ^1. Потом – любое слово в алфавите A_1, начинающееся частью $p_1^1p_2^1\dots p_m^1$. После этого – последовательность $\mu^1\mu^2\mu^2\dots$

Работа элемента типа $\overline{II}$ показана в табл. 2. Для удобства обозрения эта таблица разделена на четыре части, соответствующие четырем фазам работы элемента. Первая фаза ("выжидание") длится до поступления на вспомогательный канал буквы α. С этого такта начинается вторая фаза ("возбуждение"), которая длится до первого поступления на главный канал буквы алфавита A_1. Третья фаза ("работа") длится до тех пор, пока на главный входной канал не поступит слово алфавита A_1, и еще $n+1$ такт (n – длина правой части правила непосредственной выводимости).

В этой фазе элемент выполняет соответствующее ему правило непосредственной выводимости. Четвертая фаза "покой ; в ней элемент находится все последующие такты.

Т а б л и ц а 2.

Гл.вход	μ^2	μ^2	...	μ^2	μ^2	μ^2	μ^2	μ^1	μ^1	...	μ^1	p_1^1	p_2^2	...	p_m^1	r_1^1	r_2^1	r_3^1	...	r_s^1	μ^1	μ^2	μ^2	μ^2	...	μ^2	μ^2	μ^2	μ^2	μ^2	...
Всп.вход	β	β	...	β	β	α	β	β	β	...	β	β	β	...	β	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...
Гл.выход	μ^2	μ^2	...	μ^2	μ^2	μ^2	μ^2	μ^1	μ^1	...	μ^1	μ^1	μ^1	...	μ^1	μ^1	r_1^1	r_2^1	...	r_{s-1}^1	r_s^1	q_1^1	q_2^2	q_3^2	...	q_n^2	μ^1	μ^2	μ^2	μ^2	...
Всп. выход	β	β	...	β	β	β	α	β	β	...	β	β	β	...	β	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...
Внут. сост.	q_0	q_0	...	q_0	q_0	q_0																						q_1	q_1	q_1	...
Примечание	1-я фаза „Выжидание"					2-я фаза „Возбуждение"						3-я фаза „Работа"																4-я фаза „Покой"			

Здесь r_i^1 – произвольная буква алфавита A_1 $(1\leqslant i\leqslant S)$; S – произвольное натуральное число.

Из табл. 2 видно, что при переработке правильной пары последовательностей элемент $\overline{II}$ не обязательно должен проходить все четыре фазы. Например, если последовательность, поступающая на главный канал, имеет вид $\mu^2\mu^2\mu^2\ldots$, а последовательность, поступающая на вспомогательный канал, - вид $\beta\beta\beta\ldots$, то такая пара последовательностей является правильной и элемент при этом находится только в первой фазе. Переход элементов из одной фазы в другую осуществляется последовательно, то есть элемент не может перейти с первой фазы сразу в третью, минуя вторую.

ЭЛЕМЕНТ ТИПА $\overline{III}$ имеет правильные пары последовательностей двух видов. Пусть y - некоторая буква алфавита A. Вид правильных последовательностей и переработка их элементом $\overline{III}_y$ показаны в табл. 3 и 4. Для удобства обозрения эти таблицы разбиты на части.

Таблица 3.

Главный вход	μ^4	μ^4	...	μ^4	μ^4	μ^4	μ^4	μ^3	...	μ^3	u_1^2	u_2^2	...	u_n^2	μ^3	μ^3	μ^3	μ^3	...	μ^3	y^2	v_1^2	v_2^2	...	v_m^2	μ^4	μ^4	μ^4	μ^4	...
Вспом. вход	β	β	...	β	β	α	β	β	...	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...	β	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...
Главный выход	μ^4	μ^4	...	μ^4	μ^4	μ^4	μ^3	μ^3	...	μ^3	μ^3	u_1^2	...	u_{n-1}^2	u_n^2	y^2	μ^3	μ^3	...	μ^3	μ^3	μ^3	v_1^2	...	v_{m-1}^2	v_m^2	μ^4	μ^4	μ^4	...
Вспом. выход	β	β	...	β	β	β	α	β	...	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...	β	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...
Внут. сост.	g_0	g_0	...	g_0	g_0	g_0											g_1	g_1	...	g_1	g_1						g_2	g_2	g_2	...
Примечание	1-я фаза					2-я фаза					3-я фаза						4-я фаза				5-я фаза						6-я фаза			

Здесь u_i^2 и v_j^2 - произвольные буквы алфавита A_2 $(1\leqslant i\leqslant n)$, $(1\leqslant j\leqslant m)$; m и n - произвольные натуральные числа.

Таблица 4.

Главный вход	μ^2	μ^2	...	μ^2	μ^2	μ^2	μ^2	μ^1	μ^1	μ^1	μ^1	...	μ^1	y^1	z_1^1	z_2^1	z_3^1	...	z_r^1	μ^1	μ^2	μ^2	μ^2	...
Вспомог. вход	β	β	...	β	β	α	β	β	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...
Главный выход	μ^4	μ^4	...	μ^4	μ^4	μ^4	μ^3	y^2	μ^3	μ^3	μ^3	...	μ^3	μ^3	μ^3	z_1^2	z_2^2	...	z_{r-1}^2	z_r^2	μ^4	μ^4	μ^4	...
Вспомог. выход	β	β	...	β	β	β	α	β	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...
Внут. сост.	g_0	g_0	...	g_0	g_0	g_0			g_3	g_3	g_3	...	g_3	g_3							g_4	g_4	g_4	...
Примечание	7-я фаза					8-я фаза			9-я фаза						10-я фаза						11-я фаза			

Здесь z_i^1 - произвольная буква алфавита A_1 $(1\leqslant i\leqslant r)$; r - произвольное натуральное число.

ЭЛЕМЕНТ ТИПА $\overline{IV}$ также имеет пары правильных последова -

тельностей двух видов. Пусть y - некоторая буква алфавита A. Вид правильных пар последовательностей и переработка их элементом $\overline{IV}_y$ показаны в табл. 5 и 6. Для удобства обозрения эти таблицы также разделены на части.

Таблица 5.

Главный вход	μ^4	μ^3	μ^3	...	μ^3	x_1^2	x_2^2	x_3^2	...	x_h^2	μ^3	μ^3	μ^3	μ^3	...	μ^3	y^2	μ^4	μ^4	μ^4	...
Главный выход	δ	μ	μ	...	μ	μ	x_1	x_2	...	x_{h-1}	x_h	y	μ	μ	...	μ	μ	μ	μ	μ	...
Вспомог. выход	α	β	β	...	β	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...	β	β	β	β	β	...
Внут. сост.	g_0																	g_1	g_1	g_1	...

Здесь x_i - произвольная буква алфавита $A (1 \leq i \leq h)$; h - произвольное натуральное число.

Таблица 6

Главный вход	μ^2	μ^1	μ^1	μ^1	...	μ^1	y^1	μ^1	μ^2	μ^2	μ^2	...
Главный выход	δ	y	μ	μ	...	μ	μ	μ	μ	μ	μ	...
Вспомог. выход	α	β	β	β	...	β	β	β	β	β	β	...
Внут. сост.	g_0								g_2	g_2	g_2	...

Нетрудно видеть, что построенные таким образом элементы типа $\overline{I}$ - $\overline{IV}$ являются конечными автоматами.

§ 3. Доказательство нерекурсивности базиса C

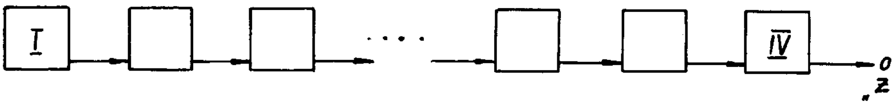
ТЕОРЕМА. Пусть T - произвольное слово в алфавите A. Константный о-д оператор $\Theta(T)$ может быть реализован в базисе C тогда и только тогда, когда слово T выводимо в исчислении $\mathcal{L}_4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность устанавливается легко. Действительно, если слово T выводимо в исчислении $\mathcal{L}_4$, то логическая сеть, имеющая вид, изображенный на рис. 3, реализует о-д оператор $\Theta(T)$. Начальным состоянием всех элементов этой сети является состояние q_0 .

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\Theta(T)$ реализуем в некоторой логической сети L над базисом C . Если сеть L имеет вид, изображенный на рис. 3, то выводимость слова T очевидна (его вывод восстанавливается по проверяющей части).

Для завершения доказательства остается показать, что если некоторый константный о-д оператор $\Theta(T)$ реализуем в базисе C , то он реализуем в логической сети, имеющей вид, изображенный на рис. 3.

Пусть L - некоторая логическая сеть над базисом C , реализующая о-д оператор $\Theta(T)$. Согласно свойству I (§I), сеть L является автономной и правильной. Выделяем в сети L путь K , двигаясь с выходного полюса этой сети по главным каналам элементов против направления стрелок (рис. 5)



Р и с. 5.

Согласно следствию б) из свойства I выходным элементом сети является элемент типа IV . Причем, так как первая буква выходной последовательности - δ , то начальным состоянием этого элемента является состояние q_0 . Значит, в первый такт этот элемент выдает по своему вспомогательному каналу букву α .

Согласно свойствам 5 и 6, путь K не содержит циклов. В самом деле, при правильной работе любой элемент типа II и III , получив на вспомогательный входной канал в такт τ букву α , выдаст по вспомогательному выходному каналу в такт $\tau+1$ букву α . Если бы путь K содержал цикл, то согласно свойству 6 на вспомогательные входные каналы элементов, лежащих на этом цикле, буква α поступала бы бесконечно много раз. А это противоречит свойству 5.

Таким образом, путь K может оканчиваться только элементом типа I (это вытекает из следствия а) свойства I и замечания , что сеть L - автономная).

Согласно свойству 6 работа логической сети L не изменяется, если вспомогательные каналы элементов, лежащих на пути K , соединить так, как показано на рис. 3.

Согласно свойствам I и 4 полученную таким образом сеть можно однозначно разделить на две непустые части - задающую и проверяющую - так, что в левой части (проверяющей) расположены только элементы типа $\bar{I}$ и $\bar{II}$, а в правой части (задающей) элементы типа $\overline{III}$ и $\overline{IV}$. Эта сеть имеет вид, изображенный на рис. 3, и по ее проверяющей части можно восстановить вывод слова T в исчислении $\mathcal{L}_4$.

Теорема доказана.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Б.А. Трахтенброту за постановку задачи и внимание к настоящей работе.

Поступила в редакцию
20.Ш.1964 г.

Литература

1. Кобринский Н.Е., Трахтенброт Б.А. Введение в теорию конечных автоматов, Физматгиз, 1962.

2. Кратко М.И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов. ДАН т. 155, 1 (1964)

3. Марков А.А. Теория алгорифмов. Труды матем.инст. имени В.А.Стеклова, т. 42, (1954).