А.Ф.Галимянов

О ПОЛИГОНАЛЬНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим линейное интегральное уравнение вида

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)\ln^m\frac{\tau-t}{c}} = y(t) \ , \qquad (1)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $y(t)$ - известные функции, γ - единичная окружность с центром в начале координат, $c>2$, $0<m\le 1$. Уравнение (I) является в определенном смысле промежуточным между уравнением с ядром Коши и уравнением со слабо полярным ядром. Оператор K был изучен в работах Н.В.Василевского [1], [2].

Данная работа посвящена исследованию полигональных методов решения уравнения (I). Исследование проводится операторным методом, предложенным Б.Г.Габдулхаевым [3]. Обоснование сходимости производится в обобщенных пространствах Гельдера [4].

I. Обозначения и предварительные сведения. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-z)\ln^m\frac{\tau-z}{c}} \quad , z\,\bar{\in}\,\gamma \ .$$

Пусть $t_0 = e^{i\alpha_0}$, где $\alpha_0=\sqrt{2}\pi$. Точку t_0 соединим с бесконечно удаленной точкой гладкой кривой Γ . Будем считать, что функция $\ln\frac{\tau-z}{c}$ переменной τ есть главная ветвь логарифма, непрерывная на γ всюду, кроме точки t_0 .

Введем функцию

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\ln\left\{1+2\pi i\Big/\ln\left(\frac{t_0-t}{c}\right)\right\}, & m=1 \ , \\ \left[\left[\ln\frac{t_0-t}{c}+2\pi i\right]^{1-m}-\ln\frac{t_0-t}{c}\right]\Big/2\pi i(1-m), & 0<m<1, \end{cases} \qquad (2)$$

и операторы

$$Nx \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)\ln^m\frac{\tau-t}{c}} \ ,$$
$$Vx \equiv (a-b\lambda)x - bNx \ . \qquad (3)$$

Модуль непрерывности определим обычным способом:

$$\omega(x,\delta) = \sup_{s(t,\tau)\le\delta;\ t,\tau\in\gamma}|x(t)-x(\tau)| ,$$ где $s(t,\tau)$ - наименьшая длина дуги, стягивающая точки t и τ . Обоснование сходимости будем проводить в обобщенном пространстве Гельдера $H\varphi$ [4], где

норма определена следующим способом:

$$\|x\|_{H_\varphi} = \|x\|_C + \sup_\delta \frac{\omega(x,\delta)}{\varphi(\delta)},$$

$\varphi \in \Phi$, а множество Φ определено в [4], [5].

Справедливы следующие утверждения.

Лемма I. Пусть $g(t)=\int_\gamma \frac{x(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)\ln^m \frac{\tau-t}{c}}$, $x \in C(\gamma)$. Тогда, если существует интеграл $\int_\gamma \frac{\omega(x,\tau)}{\tau \ln^m \frac{c}{\tau}}\,d\tau$, то для любого δ, $0<\delta<1$, справедливы оценки

$$\omega(g,\delta) \leq d_1 \left\{ \int_0^\delta \frac{\omega(x,\tau)}{\tau \ln^m \frac{c}{\tau}}\,d\tau + \delta \int_\delta^1 \frac{\omega(x,\tau)}{\tau^2 \ln^m \frac{c}{\tau}}\,d\tau + \delta \|x\|_C \right\}, \tag{4}$$

$$\|g\|_C \leq d_2 \left\{ \int_0^1 \frac{\omega(x,\tau)\,d\tau}{\tau \ln^m \frac{c}{\tau}} + \|x\|_C \right\}.$$

Лемма I доказана в [5] для $m=1$. На случай $0<m<1$ доказательство распространяется с незначительными изменениями.

Лемма 2. Пусть $\psi(t)=\int_\gamma \frac{b(t)-b(\tau)}{(\tau-t)\ln^m \frac{\tau-t}{c}} x(\tau)\,d\tau$, $b \in C(\gamma)$. Тогда для любого δ, $0 \leq \delta < 1$, справедлива оценка

$$\omega(\psi,\delta) \leq d_3 \|x\|_C \left\{ \int_0^\delta \frac{\omega(b,\tau)\,d\tau}{\tau \ln^m \frac{c}{\tau}} + \omega(b,\delta)\ell(\delta) + \right.$$

$$\left. + \delta \int_\delta^1 \frac{\omega(b,\tau)\,d\tau}{\tau^2 \ln^m \frac{c}{\tau}} \right\}, \tag{5}$$

где $\ell(\delta) = \begin{cases} \ln^{1-m} \frac{c}{\delta}, & 0<m<1, \\ \ln\left|\ln \frac{c}{\delta}\right|, & m=1. \end{cases}$

Доказательство. Пусть γ_δ – дуга, содержащая точки t_1 и t_2, а $T(t,\tau)=\frac{b(t)-b(\tau)}{(\tau-t)\ln^m \frac{\tau-t}{c}}$. Тогда имеем

$$\psi(t_1)-\psi(t_2) = \int_{\gamma_\delta} T(t_1,\tau)\,x(\tau)\,d\tau - \int_{\gamma_\delta} T(t_2,\tau)\,x(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_{\gamma-\gamma_\delta} \frac{b(t_2)-b(t_1)}{(\tau-t_1)\ln^m \frac{\tau-t_1}{c}}\, x(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_{\gamma-\gamma_\delta} (b(\tau)-b(t_2)) \frac{(\tau-t_2)\ln^m \frac{\tau-t_2}{c} - (\tau-t_2)\ln^m \frac{\tau-t_1}{c}}{(\tau-t_1)\ln^m \frac{\tau-t_1}{c}\,(\tau-t_2)\ln^m \frac{\tau-t_2}{c}}\, x(\tau)\,d\tau = \sum_{k=1}^4 J_k.$$

Оценим последовательно каждый интеграл:

$$|J_1| \leq d_4 \|x\|_C \int_0^\delta \frac{\omega(b,\tau)}{\tau \ln^m \frac{c}{\tau}}\, d\tau \quad ;$$

$|J_2|$ оценивается аналогично;

$$|J_3| \leq d_5 \omega(b,\delta) \|x\|_C \int_\delta^1 \frac{d\tau}{\tau \ln^m \frac{c}{\tau}} \leq d_5' \omega(b,\delta)\|x\|_C\, \ell(\delta)\, ;$$

$$|J_4| \leq \left| \int_{\gamma-\gamma_\delta} [b(\tau)-b(t_2)] \frac{\ln^m \frac{\tau-t_2}{c} - \ln^m \frac{\tau-t_1}{c}}{\ln^m \frac{\tau-t_1}{c}(\tau-t_2)\ln^m \frac{\tau-t_2}{c}}\, x(\tau)d\tau \right| +$$

$$+\left| \int_{\gamma-\gamma_\delta} [b(\tau)-b(t_2)] \frac{(t_1-t_2)\, x(\tau) d\tau}{(\tau-t_1)\ln^m \frac{\tau-t_1}{c}(\tau-t_2)} \right| = |J_4'| + |J_4''| \quad ,$$

где

$$\ell(\delta) = \begin{cases} \ln^{1-m} \frac{c}{\delta}\, , & 0 < m < 1 \\ \ln\left|\ln \frac{c}{\delta}\right|\, , & m = 1 \end{cases}\, , \quad |J_4'| \leq d_6 \|x\|_C \int_\delta^1 \frac{\omega(b,\tau)}{\tau \ln^m \frac{c}{\tau}} d\tau,$$

$$|J_4''| \leq d_7 \delta \int_\delta^1 \frac{\omega(b,\tau)\, d\tau}{\tau^2 \ln^m \frac{c}{\tau}} \cdot \|x\|_C \qquad \text{в силу } \left|\frac{\tau-t_2}{\tau-t_1}\right| < const\, .$$

Из этих оценок получим требуемое утверждение.

Л е м м а 3. Справедливы соотношения

$$KVx = a(a-bx)+b(Nax-aNx)-bN(bNx-Nbx)\, , \qquad (6)$$
$$VKx = a(a-bx)+b(aNx-Nax)-b(b\lambda Nx-Nb\lambda x)-$$
$$-bN(bNx-Nbx)\, .$$

Доказательство следует из результатов [I].

2. Схемы методов. На окружности γ выберем узлы

$$t_k = exp(is_k)\, , \quad s_k = 2k\pi/n \quad , \quad k=\overline{0,n}\, . \qquad (7)$$

Пусть $P = P_n$ – оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $x \in H\varphi$ его полигон $\tilde{x}$ по способу $Px = \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k)S_k(t)$,

$$s_k(t) = \begin{cases} \dfrac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}\, , & t \in (t_{k-1}, t_k)\, , \\ \dfrac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k}\, , & t \in (t_k\, , t_{k+1})\, , \\ 0\, , & t \notin (t_{k-1}, t_{k+1})\, . \end{cases}$$

В первом методе приближенное решение уравнения (I) будем искать в виде

$$x_n(t)=\sum_{k=0}^{n-1} c_k s_k(t) \quad . \tag{8}$$

Неизвестные коэффициенты $\{c_k\}_{k=0}^{n-1}$ будем искать из системы линейных алгебраических уравнений

$$(Kx_n)(t_j)=y(t_j) \quad , \; j=\overline{0,n-1} \quad , \tag{9}$$

где $\{t_j\}_{j=0}^{n-1}$ – узлы (7).

Во втором методе приближенное решение ищется в виде

$$x_n(t)=\sum_{k=0}^{n-1} c_k \, Vs_k(t) \quad , \tag{10}$$

а неизвестные коэффициенты $\{c_k\}_{k=0}^{n-1}$ находятся из системы (9).

3. Обоснование методов. Для метода (8) – (9) справедлива

Т е о р е м а I. Пусть уравнение (I) однозначно разрешимо для любой правой части, $a(t)\neq 0$, $a(t), b(t), y(t)\in H_\alpha$. Тогда, начиная с $n\geqslant n_0$, система (9) имеет единственное решение и приближенные решения x_n^*, найденные по формуле (8), сходятся к точному решению уравнения (I) x^* со скоростью

$$\| x^* - x_n^* \|_{H_\varphi} = O\left(\frac{1}{\ln^m n}\right) \quad ,$$

где $\varphi(t)=t^\beta \ln^m \frac{c}{\tau}$, $\beta<\alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $a(t)\neq 0$, то уравнение (I) эквивалентно уравнению

$$K'x \equiv x(t)+\frac{b(t)}{a(t)\cdot 2\pi i}\int_\gamma \frac{x(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)\ln^m \frac{\tau-t}{c}} = y(t) \quad , \tag{I'}$$

а система (9) эквивалентна операторному уравнению

$$K_n' x_n \equiv x_n + P_n\left(\frac{b}{a} N x_n\right) = P_n y \quad . \tag{9'}$$

Применим теорему 7 главы I [3]. Имеем

$$\| K'x_n - K_n' x_n \|_{H_\varphi} \leqslant d_7 (1+\| P_n \|_{H_\varphi \to H_\varphi}) \frac{\omega(K'x_n, \frac{1}{n})}{\varphi(\frac{1}{n})} \quad .$$

Следуя результатам [6], можно доказать, что $\| P_n \|_{H_\varphi\to H_\varphi}\leqslant 3$. Для оценки $\omega(K'x_n, \frac{1}{n})$ используем лемму I. После элементарных вычислений получим

$$\omega(K'x_n, \frac{1}{n}) \le d_8 \| x_n \|_{H_\varphi} \cdot n^{-\beta}$$

(константы $\{d_i\}$ не зависят от n). Значит,

$$\varepsilon^{(n)} = O\left(\frac{1}{\ln^m n}\right),$$

$$\delta^{(n)} = \| y - P_n y \|_{H_\varphi} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-\beta} \ln^m n}\right).$$

Объединяя эти оценки, получим утверждение теоремы. Как видно из теоремы I, скорость сходимости приближенного решения к точному является медленной. Второй метод дает несколько лучший порядок сходимости.

Т е о р е м а 2. Пусть коэффициенты уравнения (I) удовлетворяют условиям

$$a(t)(a(t)-b(t)\lambda(t)) \ne 0; \; a(t), b(t), b(t)\lambda(t), y(t) \in H_\alpha .$$

Тогда, начиная с некоторого $n > n_0$, система (9) имеет единственное решение и приближенные решения, найденные по формуле (IO), сходятся к точному со скоростью

$$\| x^* - x_n^* \|_{H_\beta} = O\left(\frac{\ell(n)}{n^{\alpha-\beta}}\right),$$

$$\text{где } \ell(n) = \begin{cases} \ln \ln n & \text{при } m = 1, \\ \ln^{1-m} n & \text{при } 0 < m < 1. \end{cases}$$

Доказательство проводится на основе теоремы 7 главы I [3] с использованием леммы 2 и леммы 3, а также некоторых результатов [4].

Л и т е р а т у р а

I. В а с и л е в с к и й Н. Л. Теория Нетера одного класса линейных операторов типа потенциала // Изв. вузов. Матем.- 1974.- С.I2 - 2I.

2. В а с и л е в с к и й Н. Л. Об одном классе сингулярных интегральных операторов с ядрами полярно-логарифмического типа// Изв. АН СССР. Серия матем. - 1976. - Т.40. - № I.

3. Г а б д у л х а е в Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во КГУ. – 1980. – 232 с.

4. Г у с е й н о в А. И., М у х т а р о в Х. Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. – М. : Наука, 1980. – 414 с.

5. Р а д ж а б о в Б. Х., С а л а е в В. В. О полной непрерывности одного сингулярного оператора // ДАН Тадж. ССР. – 1973. – Т.16. – № 12.

6. Г а б д у л х а е в Б. Г. Об одном прямом методе решения интегральных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1965.– № 3.– С.51 – 60.

7. Г а б д у л х а е в Б. Г. К численному решению полных сингулярных интегральных уравнений // Краевые задачи и их приложения / Чуваш. ун-т. – Чебоксары, 1988. – С.139 – 146.

Ф.Ф.Султанбеков

ЗАРЯДЫ И АВТОМОРФИЗМЫ ОДНОГО КЛАССА КОНЕЧНЫХ ЛОГИК МНОЖЕСТВ

Пусть k , m – натуральные числа, $X=\{x_1, x_2, \dots, x_{km}\}$ – конечное множество. Через $X(km, k)$ обозначается логика множеств (σ-класс) на X , состоящая из всех подмножеств X , число элементов которых кратно k . В работе [1] показано, что любая мера на логике $X(km,k)$ имеет единственное продолжение до заряда на алгебре всех подмножеств X . Доказательство этого опирается на интересную комбинаторную лемму, утверждающую, что в качестве образующих логики $X(km, k)$ можно выбрать $km-1$ некоторых k – элементных подмножеств X.

В настоящей работе мы приводим новое прямое доказательство упомянутого выше результата. Затем описываются крайние точки пространства состояний логики $X(km, k)$ и автоморфизмы этой логики. Более подробно с тематикой σ -классов и мер на них можно познакомиться в работах [2], [3].