В. Г. Яхно, Устойчивость решения одномерных обратных задач упругости, *Докл. АН СССР*, 1986, том 286, номер 6, 1369–1372

сионным соотношением для внутренних волн в слое стратифицированной жидкости с постоянной частотой Вяйсяля–Брента.

Использованный метод анализа стационарных волн можно применить к некоторым уравнениям с нелинейностью, не сводящейся к квадратичной.

6. В настоящей работе показано, что в отличие от стационарных решений уравнений КдФ, Бенджамина–Оно, Джозефа и других, часто используемых в теории одномерных нелинейных волн в дисперсных средах, амплитуда и скорость стационарных волн Уизема ограничена. Вероятно, это есть следствие ограниченности оператора V. Было бы целесообразно доказать сделанное предположение и изучить решение уравнения Уизема для произвольного V.

Автор выражает глубокую благодарность Э.И. Карабашевой за помощь в работе, А.С. Монину и М.А. Евграфову за полезные замечания.

Атлантическое отделение Института океанологии
им. П.П. Ширшова Академии наук СССР
Калининград

Поступило
10 IV 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Korteweg D.J., de Vries G.* – Phil. Mag., 1895, vol. 39, № 5, p. 422–443. 2. *Benjamin T.B.* – J. Fluid Mech., 1967, vol. 29, part 3, p. 559–592. 3. *Joseph R.J.* – J. Phys., 1977, vol. 10A, № 12, p. 225–227. 4. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.

УДК 517.946

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В.Г. ЯХНО

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ УПРУГОСТИ

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 1 IV 1985)

В настоящей работе рассмотрены задачи определения плотности и модулей упругости, входящих в систему дифференциальных уравнений упругости анизотропных сред специальной структуры, задаваемой тремя независимыми модулями c_{11}, c_{12}, c_{44}. При этом случай $c_{44} = (c_{11} - c_{12})/2$ отвечает изотропной упругой среде, которая может быть описана также с помощью независимых параметров Ламе λ и μ: $c_{11} = \lambda + 2\mu$, $c_{12} = \lambda$, $c_{44} = \mu$. Предполагается, что плотность и модули упругости зависят от одной пространственной переменной x_3. Задаваемые граничные условия могут быть трех типов. Первое соответствует шнуровому источнику, расположенному по оси x_1, второе – мгновенной направленной силе, сосредоточенной в одной фиксированной точке границы $x_3 = 0$, третье – площадному источнику, действующему на границе $x_3 = 0$. Для каждого из этих типов источников указана информация для решения задачи определения модулей упругости и плотности.

Ранее в работах А.С. Алексеева [1, 2] исследован вопрос об однозначном решении одномерной обратной задачи, заключающейся в определении параметров Ламе $\mu(x_3)$, $\lambda(x_3)$ и плотности $\rho(x_3)$. При этом функции $\mu(x_3)$, $\rho(x_3)$ отыскиваются по SH-волнам, а функция $\lambda(x_3)$ – по измерениям смещения границы $x_3 = 0$ при воздействии на нее мгновенной направленной силы, сосредоточенной в одной фиксированной точке. В цитируемых работах А.С. Алексеев указал практическую значимость таких задач для сейсмической разведки. В работах А.С. Благовещенского [3], В.Г. Романова [4] изучен вопрос о единственности восстановления функций $\mu(x_3)$, $\rho(x_3)$, $\lambda(x_3)$ по измерениям границы $x_3 = 0$ при воздействии на нее мгновенной точечной направленной силой. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи, аналогичной задачам В.Г. Романова и А.С. Благовещенского, сформулированы в работе автора [5].

Основными результатами настоящей работы является теорема об оценке непрерывной зависимости изменения рассматриваемых обратных задач от изменения информации.

Пусть $x = (x_1\ x_2, x_3) \in R^3$, $t \in R$. Рассмотрим при $x_3 > 0$ систему дифференциальных уравнений теории упругости анизотропных сред

$$(1)\qquad \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_{ijkl}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$$

с условиями

$$(2)\qquad u_i\big|_{t<0} = 0,$$

$$\sum_{k,l=1}^{3} c_{3ikl}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\Bigg|_{x_3=+0} = f_i(x_1, x_2, t),$$

где $i = 1, 2, 3$; $\mathbf{u}(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ – вектор смещения; c_{ijkl}, $i, j, k, l = 1, 2, 3$, – модули упругости, причем $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$; ρ – плотность. Соотношения симметрии сводят число независимых модулей упругости с 81 до 21. Если принять, что $c_{\alpha\beta} = c_{ijkl}$, где $\alpha = (ij)$ и $\beta = (kl)$ в соответствии со следующими переобозначениями

$$(11) \to 1,\quad (22) \to 2,\quad (33) \to 3,\quad (23) = (32) \to 4,\quad (31) = (13) \to 5,$$
$$(12) = (21) \to 6,$$

то таблице независимых модулей упругости можно придать вид симметричной матрицы порядка 6×6. В настоящей работе будем предполагать, что упругая анизотропная среда имеет такую симметричную матрицу независимых модулей упругости, в которой

$$c_{11} = c_{jj},\quad j = 2, 3;\quad c_{44} = c_{kk},\quad k = 5, 6;\quad c_{12} = c_{13} = c_{23};$$
$$c_{lm} = 0,\quad l = 1, 2, 3;\quad m = 4, 5, 6;\quad c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0.$$

При этом случай $c_{44} = (c_{11} - c_{12})/2$ соответствует обычной изотропной упругой среде.

Модули упругости c_{11}, c_{12}, c_{44} и плотность ρ считаем функциями только переменной x_3 и предполагаем, что

$$(c_{12}, c_{11}, c_{44}, \rho) \in \Lambda = \{(c_{12}, c_{11}, c_{44}, \rho) \mid c_{11}, c_{44}, \rho \in C^2(R_+),$$
$$c_{12} \in C(R_+),\ c_{11} > -2c_{12},\ c_{11} > c_{12},\ c_{44} > 0,\ \rho > 0\},$$
$$R_+ = [0, \infty).$$

При этих предположениях система дифференциальных уравнений (1) будет гиперболической в $R^2 \times R_+ \times R$.

Обозначим через $\mathbf{u}(x, t)$, $\mathbf{u}^\delta(x, t)$, $\mathbf{u}^s(x, t)$ решения задач (1)–(3) при $\mathbf{f} = -\mathbf{e}\delta(x_2)\,\delta(t)$, $\mathbf{f} = -\mathbf{e}\delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(t)$, $\mathbf{f} = -\mathbf{e}x_2^s\,\delta(t)$ соответственно. Здесь $\mathbf{e} = (1/2, 1/2, 1/2)$; $\delta(\cdot)$ – обобщенная дельта-функция Дирака; $s = 0, 1, 2$.

Замечание 1. Если $\rho(x_3)$, $c_{11}(x_3)$, $c_{12}(x_3)$, $c_{44}(x_3)$ суть заданные функции с вышеуказанными свойствами, то можно показать, что существуют единственные решения задач (1)–(3):

$$\mathbf{u}(x,t)\in\mathcal{U},\quad \mathbf{u}^{\delta}(x,t)\in\mathcal{U}_1,\quad \mathbf{u}^{s}(x,t)\in\mathcal{U}_2,\quad s=0,1,2;$$

$$\mathcal{U}=\{\mathbf{u}(x,t)\mid \mathbf{u}(x,t)=\partial^2/\partial t^2\,\mathbf{w}(x,t),\quad \mathbf{w}|_{t<0}=0,$$

$$\mathbf{w}\in C^{\infty,\ 1,1}_{x_1,\ t,x_3}(R^2\times R_+;\ \mathcal{E}'(R)),\quad \mathbf{w}(x,+0)=\mathbf{w}_t(x,+0)=0\},$$

$$\mathcal{U}_1=\{\mathbf{u}(x,t)\mid \mathbf{u}(x,t)=\partial^2/\partial t^2\,\mathbf{w}(x,t),\quad \mathbf{w}|_{t<0}=0,$$

$$\mathbf{w}\in C^{1,1}_{t,x_3}(R\times R_+;\ \mathcal{E}'(R^2)),\quad \mathbf{w}(x,+0)=\mathbf{w}_t(x,+0)=0\},$$

$$\mathcal{U}_2=\{\mathbf{u}(x,t)\mid \mathbf{u}(x,t)=\partial^2/\partial t^2\,\mathbf{w}(x,t),\quad \mathbf{w}|_{t<0}=0,$$

$$\mathbf{w}\in C^1_t(R;\ C^{\infty\ \ ;1}_{x_1,x_2;x_3}(R^2\times R_+)),\quad \mathbf{w}(x,+0)=\mathbf{w}_t(x,+0)=0\};$$

$\mathcal{E}'(R^n)$ – пространство обобщенных функций с компактным носителем, т.е. пространство, сопряженное с $C^{\infty}(R^n)$ [6]; $C^{\infty,1,1}_{x_1,t,x_3}(R^2\times R_+;\ \mathcal{E}'(R))$ – класс непрерывных вместе со своими производными $\partial^{k_1+k_2+k_3}/\partial x_1^{k_1}\,\partial t^{k_2}\,\partial x_3^{k_3}$ ($k_1=0,1,2,\ldots$, $k_2=0,1$, $k_3=0,1$) отображений из $R^2\times R_+$ в $\mathcal{E}'(R)$. Классы $C^{1,1}_{t,x_3}(R\times R_+;\ \mathcal{E}'(R^2))$, $C^1_t(R;\ C^{\infty\ ;\ 1}_{x_1,x_2;\ x_3}(R^2\times R_+))$ определяются аналогично. К функциям из класса $\mathcal{U}$ при фиксированных $(x_1,t)\in R^2$, $x_3\in R_+$ применимо преобразование Фурье по $x_2\in R$, а к функциям из $\mathcal{U}_1$ – преобразование Фурье по $(x_1,x_2)\in R^2$.

Предметом исследования являются следующие задачи. Определить такую вектор-функцию $(c_{12}(x_3),\ c_{11}(x_3),\ c_{44}(x_3),\ \rho(x_3))\in\Lambda$, компоненты которой входят в систему дифференциальных уравнений в качестве коэффициентов.

Обратная задача 1. Решение $\mathbf{u}(x,t)\in\mathcal{U}$ задачи (1)–(3) удовлетворяет равенствам

$$F_{x_2}[u_1]|_{x_3=+0,\,x_1=\nu=0}=h_1(t),\quad F_{x_2}[u_1]|_{x_3=+0,\,x_1=0,\,\nu=\nu_0}=h_2(t),$$

$$F_{x_2}[u_3]|_{x_3=+0,\,x_1=\nu=0}=h_3(t),\quad \frac{\partial}{\partial\nu}F_{x_2}[u_2]|_{x_3=+0,\,x_1=\nu=0}=h_4(t).$$

Обратная задача 2. Решение $\mathbf{u}^{\delta}(x,t)\in\mathcal{U}_1$ задачи (1)–(3) удовлетворяет равенствам

$$F_{x_1,x_2}[u_1^{\delta}]|_{x_3=+0,\,\nu_1=\nu_2=0}=h_1(t),\quad F_{x_1,x_2}[u_1^{\delta}]|_{x_3=+0,\,\nu_1=0,\,\nu_2=\nu_0}=h_2(t),$$

$$F_{x_1,x_2}[u_3^{\delta}]|_{x_3=+0,\,\nu_1=\nu_2=0}=h_3(t),\quad \frac{\partial}{\partial\nu_2}F_{x_1,x_2}[u_2^{\delta}]|_{x_3=+0,\,\nu_1=\nu_2=0}=h_4(t).$$

Обратная задача 3. Решения $\mathbf{u}^{s}(x,t)\in\mathcal{U}_2$, $s=0,1,2$, задач (1)–(3) удовлетворяют равенствам

$$u_1^0|_{x_3=+0,\,x_1=x_2=0}=h_1(t),\quad u_1^2|_{x_3=+0,\,x_1=x_2=0}=h_2(t),$$

$$u_3^0|_{x_3=+0,\,x_1=x_2=0}=h_3(t),\quad u_2^1|_{x_3=+0,\,x_1=x_2=0}=h_4(t),$$

F_{x_2} – оператор преобразования Фурье по $x_2\in R$, F_{x_1,x_2} – оператор преобразования Фурье $(x_1,x_2)\in R^2$; ν – параметр преобразования F_{x_1}; ν_1,ν_2 – параметры преобразования F_{x_1,x_2}; ν_0 – фиксированное число, отличное от нуля; $h_k(t)$, $k=1,2$, – известные при $t\in[0,T]$, а $h_j(t)$, $j=3,4$, – при $t\in[0,T_1]$ функции.

Для положительных $m, M, X, m \leqslant M,$ полагаем

$$\Lambda_1(m, M, X) = \{c(x_3) \in C^2[0, X] \mid c(x_3) \geqslant m, \ \|c\|_2(X) \leqslant M\},$$

$$\Lambda_0(m, M, X) = \{(c_{12}, c_{11}, c_{44}, \rho) \in \Lambda \mid c_{11}(x_3), c_{44}(x_3),$$

$$\rho(x_3) \in \Lambda_1(m, M, X), \ c_{12}(x_3) \in C[0, X], \ \|c_{12}\|(X) \leqslant M\},$$

$$\|\cdot\|_s(X) = \|\cdot\|_{C^s[0,X]}, \quad \|\cdot\|(X) = \|\cdot\|_{C[0,X]}.$$

Теорема. *Пусть m, M, T – фиксированные положительные числа; $m \leqslant M$; $X_0 = \sqrt{m/M}(T/2)$; $X = \sqrt{M/m}(T/2)$, $T_1 = (M/m)T$; наборы функций $c_{12}(x_3)$, $c_{11}(x_3)$, $c_{44}(x_3)$, $\rho(x_3)$ и $c_{12}^*(x_3)$, $c_{11}^*(x_3)$, $c_{44}^*(x_3)$, $\rho^*(x_3)$ являются решениями одной из обратных задач 1–3, отвечающими, соответственно, информации*

$$h_k(t), \ h_k^*(t), \ k = 1, 2, \ t \in [0, T], \ h_j(t), \ h_j^*(t), \ j = 3, 4, \ t \in [0, T_1]$$

и такими, что $(c_{12}, c_{11}, c_{44}, \rho)$, $(c_{12}^*, c_{11}^*, c_{44}^*, \rho^*) \in \Lambda_0(m, M, X)$.

Тогда имеет место следующая оценка:

$$\|\rho - \rho^*\|(X_0) + \|c_{11} - c_{11}^*\|(X_0) + \|c_{44} - c_{44}^*\|(X_0) + \tag{4}$$
$$+ \|c_{12} - c_{12}^*\|(X_0) \leqslant C[\|h_1 - h_1^*\|_2(T) + \|h_3 - h_3^*\|_2(T_1) +$$
$$+ \|h_4 - h_4^*\|(T_1) + (1/\nu_0^2)\sum_{k=1}^{2}\|h_k - h_k^*\|_2(T)],$$

где C – некоторая константа, зависящая от m, M, T; ν_0 – число, заданное при постановке обратных задач 1, 2; для обратной задачи 3 в указанной оценке считаем $\nu_0 = 1$.

Замечание 2. Для случая изотропной среды $(c_{12} = c_{11} - 2c_{44})$ в постановках обратных задач определяемыми функциями считаем $c_{11}(x_3)$, $c_{44}(x_3)$, $\rho(x_3)$. При этом информацию с функциями $h_4(t)$ опускаем, так как она является лишней. В этом случае имеет место аналогичная теорема с оценкой, которая формально получается из неравенства (4), если в левой части опускать слагаемое $\|c_{12} - c_{12}^*\|(X_0)$, а в правой – $\|h_4 - h_4^*\|(T_1)$.

Вычислительный центр Сибирского отделения
Академии наук СССР, Новосибирск

Поступило
22 IV 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев А.С.* – Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1962, № 11, с. 1514–1531. 2. *Алексеев А.С.* В кн.: Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1967, с. 9–84. 3. *Благовещенский А.С.* В кн.: Проблемы математической физики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. Вып. I, с. 68–81. 4. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 5. *Яхно В.Г.* В кн.: Методы решения обратных задач. Новосибирск, 1983, с. 131–148. 6. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.