М. А. Расулова, О периодических мерах Гиббса для модели Поттса–SOS на дереве Кэли, *ТМФ*, 2019, том 199, номер 1, 134–141

DOI: 10.4213/tmf9588

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 199, № 1
апрель, 2019

 М. А. Расулова*

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕРАХ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА–SOS НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Дано описание периодических мер Гиббса для модели Поттса–SOS на дереве Кэли порядка $k \geqslant 1$, а именно определены такие меры относительно любой нормальной подгруппы конечного индекса в групповом представлении дерева Кэли.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, модель Поттса–SOS, периодическая мера Гиббса.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9588

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из центральных проблем теории мер Гиббса (МГ) является описание МГ в бесконечном объеме (или ограниченных МГ), соответствующих заданному гамильтониану. Существование таких мер для широкого класса гамильтонианов было установлено в основополагающей работе Добрушина (о работах Добрушина см., например, в монографии [1]). Однако полный анализ множества предельных МГ для конкретного гамильтониана зачастую является сложной задачей.

В настоящей работе рассматриваются модели со взаимодействием ближайших соседей на дереве Кэли. Модели на дереве Кэли обсуждались в [2]–[5]. Классическим примером такой модели является модель Изинга с двумя значениями спина [1]. Она рассматривалась в [4]–[8] и стала предметом активных исследований в первой половине 90-х годов XX века и позже (см., например, работы [8]–[14]). В статье [15] было дано описание всех трансляционно-инвариантных МГ для модели Поттса. В работах [16], [17] изучались периодические МГ, а работе [18] – слабо периодические МГ для модели Поттса. Трансляционно-инвариантные и периодические МГ для модели SOS (solid-on-solid) рассматривались в [19], [20].

Модель Поттса–SOS, которой посвящена настоящая статья, является обобщением моделей Поттса и SOS. Для данной модели на дереве Кэли трансляционно-инвариантные МГ изучались в статье [21], однако периодические МГ до сих пор не рассматривались. Мы изучаем такие меры в настоящей статье.

---

*Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан.
E-mail: m_rasulova_a@rambler.ru

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Дерево Кэли. Дерево Кэли Γ^k порядка $k \geqslant 1$ (см. книгу [8]) – это бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер. Пусть $\Gamma^k = (V, L, i)$, где V – множество вершин дерева, L – множество его ребер, i – функция инцидентности, которая сопоставляет каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями*, при этом ребро обозначается как $l = \langle x, y\rangle$.

Расстояние $d(x, y)$ для $x, y \in V$ на дереве Кэли определяется как минимальное значение d, при котором существуют вершины $x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y$, соединенные ребрами $\langle x_0, x_1\rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d\rangle$.

Для фиксированного $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \qquad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leqslant n\},$$
$$L_n = \{l = \langle x, y\rangle \in L \mid x, y \in V_n\}. \tag{1}$$

Известно [8], что существует взаимно однозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geqslant 1$ и группой G_k, которая представляет собой свободное произведение $k+1$ циклических групп $\{e, a_i\}$, $i = 1, \dots, k+1$, второго порядка ($a_i^2 = e$, $a_i^{-1} = a_i$) с генераторами $a_1, \dots, a_{k+1}$.

Обозначим через $S(x)$ множество "прямых потомков" вершины $x \in G_k$, а через $S_1(x)$ – множество всех вершин, являющихся ближайшими соседями вершины $x \in G_k$, т. е. $S_1(x) = \{y \in G_k \colon \text{существует } \langle x, y\rangle\}$.

Модель и система векторнозначных функциональных уравнений. Приведем основные определения и понятия для рассматриваемой модели. Пусть спины принимают значения из множества $\Phi = \{0, 1, \dots, m\}$, $m \geqslant 1$. Для $A \subseteq V$ спиновая *конфигурация* σ_A на A определяется как функция $A \ni x \to \sigma_A(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega_A = \Phi^A$. Положим $\Omega_V = \Omega$ и $\sigma_V = \sigma$.

Будем говорить, что конфигурация $\sigma \in \Omega$ является *периодической*, если она инвариантна относительно действия подгруппы сдвигов $K \subset G_k$ конечного индекса. Более аккуратно, конфигурация $\sigma \in \Omega$ называется K-периодической, если $\sigma(yx) = \sigma(x)$ для любых $x \in G_k$ и $y \in K$. Для заданной периодической конфигурации индекс подгруппы называется *периодом конфигурации*. Если конфигурация инвариантна относительно любых сдвигов, то она называется *трансляционно-инвариантной*.

Гамильтониан модели Поттса–SOS со взаимодействием ближайших соседей имеет следующий вид:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| - J_{\mathrm{p}} \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{2}$$

где $J, J_{\mathrm{p}} \in \mathbb{R}$ суть ненулевые константы связи.

Пусть $h \colon x \mapsto h_x = (h_{0,x}, h_{1,x}, \dots, h_{m,x}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ есть вещественная векторнозначная функция переменной $x \in V \setminus \{x^0\}$. Введем распределение вероятностей $\mu^{(n)}$ на Φ^{V_n} для заданного $n = 1, 2, \dots$ как (здесь и далее $\beta = 1/T$ – обратная температура)

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\biggl(-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\biggr), \qquad \sigma_n \in \Phi^{V_n}, \tag{3}$$

где статистическая сумма Z_n записывается как

$$Z_n = \sum_{\tilde\sigma_n \in \Phi^{V_n}} \exp\biggl(-\beta H_n(\tilde\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\tilde\sigma(x),x}\biggr). \tag{4}$$

Говорят, что последовательность вероятностных распределений $\mu^{(n)}$ является согласованной, если для всех $n \geqslant 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}), \tag{5}$$

где $(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \in \Phi^{V_n}$ обозначает объединение конфигураций σ_{n-1} и ω_n. Если для распределения $\mu^{(n)}$ на Φ^{V_n} выполнено условие (5), то существует единственная мера μ на Φ^V, такая что для любого n и всех $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$ имеет место равенство $\mu(\sigma|V_n = \sigma_n) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$.

Определение 1. Мера μ, удовлетворяющая сформулированному выше условию, называется *расщепленной мерой Гиббса*, отвечающей гамильтониану H и функции $h\colon x \mapsto h_x$, где $x \neq x^0$.

Следующее утверждение [21] описывает условие на функции h, обеспечивающее согласованность распределений $\mu^{(n)}(\sigma_n)$.

Теорема 1. *Вероятностные распределения $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, заданные формулой (3), являются согласованными тогда и только тогда, когда для любого $x \in V\setminus\{x^0\}$ имеет место следующее равенство*:

$$h^*_x = \sum_{y\in S(x)} F(h^*_y, m, \theta, r), \tag{6}$$

где $\theta = e^{J\beta}$, $r = e^{J_{\mathrm p}\beta}$, $h^*_x = (h_{0,x} - h_{m,x}, h_{1,x} - h_{m,x}, \dots, h_{m-1,x} - h_{m,x})$, а вектор-функция $F(\,\cdot\,, m, \theta, r)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ определяется формулой

$$F(h, m, \theta, r) = \bigl(F_0(h, m, \theta, r), F_1(h, m, \theta, r), \dots, F_{m-1}(h, m, \theta, r)\bigr), \tag{7}$$

в которой $h = (h_0, h_1, \dots, h_{m-1})$ и

$$F_i = \ln \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{|i-j|} r^{\delta_{ij}} e^{h_j} + \theta^{m-i} r^{\delta_{mi}}}{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{m-j} r^{\delta_{mj}} e^{h_j} + r}, \qquad i = 0, 1, \dots, m-1. \tag{8}$$

Мы имеем, что для любой совокупности функций, удовлетворяющих функциональному уравнению (6), существует единственная расщепленная мера Гиббса, и наоборот (соответствие взаимно однозначно).

Пусть K – подгруппа в G_k.

Определение 2. Совокупность векторов $h = \{h_x \in \mathbb{R}^m \colon x \in G_k\}$ называется *K-периодической*, если $h_{yx} = h_x$ для всех $x \in G_k$ и $y \in K$, при этом G_k-периодические векторы называются *трансляционно-инвариантными*.

Определение 3. МГ называется *K-периодической* (*трансляционно-инвариантной*), если она отвечает K-периодической (соответственно трансляционно-инвариантной) совокупности векторов h.

Предложение 1. *Расщепленная МГ μ является трансляционно-инвариантной, если и только если $h_{j,x}$ не зависит от x: $h_{j,x} \equiv h_j$ для $x \in V$, $j \in \Phi$.*

Доказательство получается непосредственно.

Предложение 2. *Любая крайняя МГ является расщепленной МГ.*

Доказательство см. в монографии [2], теорема 12.6.

Трансляционо-инвариантные расщепленные МГ изучались в работе [22].

Периодические расщепленные МГ. Изучим периодические решения функциональных уравнений (6), т. е. периодические расщепленные МГ. Мы описываем такие меры, определяя их по отношению к произвольной нормальной подгруппе конечного индекса в группе G_k.

Для удобства читателя напомним некоторые обозначения. Пусть K – подгруппа индекса r' в группе G_k и $G_k/K = \{K_0, K_1, \dots, K_{r'-1}\}$ – факторгруппа с классом смежности $K_0 = K$. Пусть для $x \in G_k$

$$q_i(x) = |S_1(x) \cap K_i|, \quad i = 0, 1, \dots, r'-1, \qquad N(x) = |\{j\colon q_j(x) \neq 0\}|,$$

где $|\cdot|$ обозначает количество элементов множества. Положим

$$Q(x) = (q_0(x), q_1(x), \dots, q_{r'-1}(x)).$$

Заметим (см. также работу [22]), что для любого $x \in G_k$ существует перестановка π_x координат вектора $Q(e)$ (здесь e – единица группы G_k), такая что

$$\pi_x Q(e) = Q(x). \tag{9}$$

Каждая K-периодическая совокупность векторов задается как

$$\{h_x = h_i,\ x \in K_i,\ i = 0, 1, \dots, r'-1\}.$$

По теореме 1 (при $m = 2$) и в силу равенства (9) векторы h_n, $n = 0, 1, \dots, r'-1$, удовлетворяют системе уравнений

$$h_n = \sum_{j=1}^{N(e)} q_{i_j}(e) F(h_{\pi_n(i_j)}; \theta, r) - F(h_{\pi_n(i_{j_0})}; \theta, r), \qquad j_0 = 1, \dots, N(e), \tag{10}$$

а функция $h \mapsto F(h, m, \theta, r)$ из теоремы 1 в данном случае имеет вид

$$h \mapsto F(h) = (F_0(h, \theta, r), F_1(h, \theta, r)),$$

где

$$F_0(h, \theta, r) = \ln \frac{re^{h_0} + \theta e^{h_1} + \theta^2}{\theta^2 e^{h_0} + \theta e^{h_1} + r}, \qquad F_1(h, \theta, r) = \ln \frac{\theta e^{h_0} + re^{h_1} + \theta}{\theta^2 e^{h_0} + \theta e^{h_1} + r}. \tag{11}$$

Предложение 3. *Если $\theta \neq 1$, то $F(h) = F(l)$, если и только если $h = l$.*

Доказательство. *Необходимость.* Из условия $F(h)=F(l)$ получаем систему уравнений

$$\frac{re^{h_0}+\theta e^{h_1}+\theta^2}{\theta^2 e^{h_0}+\theta e^{h_1}+r}=\frac{re^{l_0}+\theta e^{l_1}+\theta^2}{\theta^2 e^{l_0}+\theta e^{l_1}+r},\qquad \frac{\theta e^{h_0}+re^{h_1}+\theta}{\theta^2 e^{h_0}+\theta e^{h_1}+r}=\frac{\theta e^{l_0}+re^{l_1}+\theta}{\theta^2 e^{l_0}+\theta e^{l_1}+r}, \tag{12}$$

где $h=(h_0,h_1)$, $l=(l_0,l_1)$. Преобразуя эти уравнения, получаем

$$\begin{aligned}
&(r-\theta^2)(\theta(e^{h_0+l_1}-e^{h_1+l_0})+\theta(e^{h_1}-e^{l_1})+(r+\theta^2)(e^{h_0}-e^{l_0}))=0,\\
&\theta^2(r-1)(e^{h_1+l_0}-e^{h_0+l_1})+\theta(r-\theta^2)(e^{h_0}-e^{l_0})+(r^2-\theta^2)(e^{h_1}-e^{l_1})=0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Используя равенство $e^{h_0+l_1}-e^{h_1+l_0}=e^{l_1}(e^{h_0}-e^{l_0})-e^{l_0}(e^{h_1}-e^{l_1})$, выводим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&(r-\theta^2)(\theta e^{l_1}+\theta^2+r)(e^{h_0}-e^{l_0})+\theta(1-e^{l_0})(e^{h_1}-e^{l_1})=0,\\
&\theta(r-\theta^2-\theta e^{l_1}(r-1))(e^{h_0}-e^{l_0})+(r^2-\theta^2+e^{l_0}\theta^2(r-1))(e^{h_1}-e^{l_1})=0.
\end{aligned} \tag{14}$$

При $\theta\neq 1$ из данной системы следует, что $h_0=l_0$, $h_1=l_1$.

Достаточность получается непосредственно. Предложение доказано.

Пусть $G_k^{(2)}$ – подгруппа в G_k, состоящая из слов четной длины. Очевидно, $G_k^{(2)}$ является подгруппой индекса 2.

Теорема 2. *Пусть K – нормальная подгруппа конечного индекса в G_k. Каждая K-периодическая МГ для модели Поттса–SOS является либо трансляционно-инвариантной, либо $G_k^{(2)}$-периодической.*

Доказательство. Учитывая уравнения (10), мы видим, что

$$F(h_{\pi_n(i_1)})=\cdots=F(h_{\pi_n(i_{N(e)})}).$$

Следовательно, из предложения 1 имеем $h_{\pi_n(i_1)}=\cdots=h_{\pi_n(i_{N(e)})}$. Отсюда

$$h_x=\begin{cases} h_y=h, & \text{если } x,y\in S_1(z),\ z\in K,\\ h_y=l, & \text{если } x,y\in S_1(z),\ z\in G_k\backslash K.\end{cases}$$

Таким образом, МГ являются трансляционно-инвариантными (если $h=l$) или $G_k^{(2)}$-периодическими (если $h\neq l$). Это завершает доказательство теоремы.

Пусть K – нормальная подгруппа конечного индекса в G_k. Какое условие на K гарантирует, что каждая K-периодическая МГ трансляционно-инвариантна? Положим $I(K)=K\cap\{a_1,\dots,a_{k+1}\}$, где a_i, $i=1,\dots,k+1$, суть генераторы группы G_k.

Теорема 3. *Если $I(K)\neq\varnothing$, то каждая K-периодическая МГ для модели Поттса–SOS трансляционно-инвариантна.*

Доказательство. Возьмем $x\in K$. Заметим, что $xa_i\in K$, если и только если $a_i\in K$. Поскольку $I(K)\neq\varnothing$, существует элемент $a_i\in K$. Следовательно, K содержит подмножество вида $Ka_i=\{xa_i\colon x\in K\}$. По теореме 2 мы имеем $h_x=h$ и $h_{xa_i}=l$. Элементы x и xa_i принадлежат K, поэтому $h_x=h_{xa_i}=h=l$. Таким образом, каждая K-периодическая МГ для модели Поттса–SOS трансляционно-инвариантна.

Теоремы 2 и 3 позволяют свести проблему описания K-периодических МГ при $I(K) \neq \varnothing$ к описанию неподвижных точек функции $kF(h,\theta,r)$, которым отвечают трансляционно-инвариантные МГ. Если $I(K)=\varnothing$, то указанная проблема сводится к решению системы уравнений

$$h = kF(l,\theta,r), \qquad l = kF(h,\theta,r). \tag{15}$$

Введем обозначения $z_i = e^{h_i}$, $t_i = e^{l_i}$, $i=0,1$. Тогда из (15) получаем

$$\begin{aligned} z_0 &= \left(\frac{rt_0+\theta t_1+\theta^2}{\theta^2 t_0+\theta t_1+r}\right)^k, \qquad & z_1 &= \left(\frac{\theta t_0+rt_1+\theta}{\theta^2 t_0+\theta t_1+r}\right)^k, \\ t_0 &= \left(\frac{rz_0+\theta z_1+\theta^2}{\theta^2 z_0+\theta z_1+r}\right)^k, \qquad & t_1 &= \left(\frac{\theta z_0+rz_1+\theta}{\theta^2 z_0+\theta z_1+r}\right)^k. \end{aligned} \tag{16}$$

Первое и третье уравнение в (16) дают

$$z_0^{1/k}-1 = \frac{(z_0-1)(r-\theta^2)}{\theta^2 t_0+\theta t_1+r}, \qquad t_0^{1/k}-1 = \frac{(t_0-1)(r-\theta^2)}{\theta^2 z_0+\theta z_1+r}. \tag{17}$$

Отсюда мы заключаем, что $(z_0;t_0)=(1;1)$ является решением системы (17) для любых θ, r, z_1 и t_1. При этом из второго и четвертого уравнений в (16) мы получаем следующую систему:

$$z_1 = \left(\frac{2\theta+rt_1}{\theta^2+\theta t_1+r}\right)^k, \qquad t_1 = \left(\frac{2\theta+rz_1}{\theta^2+\theta z_1+r}\right)^k. \tag{18}$$

Пусть

$$f(z_1) = \left(\frac{2\theta+rz_1}{\theta^2+\theta z_1+r}\right)^k,$$

тогда уравнения (18) могут быть записаны как

$$f(f(z_1)) - z_1 = 0. \tag{19}$$

Очевидно, значения z_1 такие, что $f(z_1)=z_1$, удовлетворяют уравнению (19), поэтому мы исключаем из рассмотрения такие решения уравнения (19), для которых $f(z_1)=z_1$. Оставшиеся решения отвечают $G_k^{(2)}$-периодической МГ, не являющейся трансляционно-инвариантной. В случае $k=2$ после упрощения из уравнения (19) получим следующее квадратное уравнение:

$$\begin{aligned} &(\theta^6+2\theta^4 r+\theta^2 r^2+r^4+2\theta r^3+2\theta^3 r^2)z_1^2+ \\ &\quad+(2\theta^7+6\theta^5 r+6\theta^3 r^2+6\theta r^3-4\theta^4+\theta^4 r^2+8\theta^2 r^2+2\theta^2 r^3+8\theta^4 r+r^4)z_1+ \\ &\quad+4\theta^2 r^2+4\theta^6 r+r^4+6\theta^4 r^2+4\theta^2 r^3+\theta^8+4\theta^5 r+8\theta^3 r^2+4\theta r^3=0. \end{aligned}$$

Чтобы это уравнение имело два положительных корня, должны быть выполнены условия $D>0$, $b<0$, где

$$\begin{aligned} D &= (2\theta^7+6\theta^5 r+6\theta^3 r^2+6\theta r^3-4\theta^4+\theta^4 r^2+8\theta^2 r^2+2\theta^2 r^3+8\theta^4 r+r^4)^2- \\ &\quad-(\theta^6+2\theta^4 r+\theta^2 r^2+r^4+2\theta r^3+2\theta^3 r^2)\times \\ &\qquad\times(4\theta^2 r^2+4\theta^6 r+r^4+6\theta^4 r^2+4\theta^2 r^3+\theta^8+4\theta^5 r+8\theta^3 r^2+4\theta r^3), \\ b &= 2\theta^7+6\theta^5 r+6\theta^3 r^2+6\theta r^3-4\theta^4+\theta^4 r^2+8\theta^2 r^2+2\theta^2 r^3+8\theta^4 r+r^4. \end{aligned}$$

В результате мы имеем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $k = 2$. Если $D > 0$, $b < 0$, то для модели Поттса–SOS существуют по меньшей мере две $G_k^{(2)}$-периодические МГ, не являющиеся трансляционно-инвариантными. Если $D = 0$, $b < 0$, то существует хотя бы одна такая МГ.*

Покажем, что множество $\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \colon D \geqslant 0,\ b < 0\}$ непусто. Пусть $r = \theta^2$. Тогда

$$D = -16\theta^8(\theta^2-1)^2(3\theta^4+10\theta^3+6\theta^2-1), \qquad b = 4\theta^4(\theta^4+5\theta^3+4\theta^2-1).$$

Если $\theta < \theta_D$ (где $\theta_D \approx 0.32359$), то $D > 0$, $b < 0$, и мы можем сказать, что существуют по меньшей мере две $G_k^{(2)}$-периодические МГ, не являющиеся трансляционно-инвариантными. Если $\theta = \theta_D$, то, очевидно, $D = 0$, $b < 0$, и это означает, что для модели Поттса–SOS существует хотя бы одна $G_k^{(2)}$-периодическая МГ, не являющаяся трансляционно-инвариантной.

Замечание. Для модели Поттса при $k = 2$ не существует периодических МГ [16], а для модели Поттса–SOS, как показывает теорема 4, при некоторых условиях такие меры существуют.

Благодарности. Автор благодарит профессора У. А. Розикова и профессора М. М. Рахматуллаева за полезные обсуждения и ценные замечания.

Список литературы

[1] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.

[2] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.

[3] S. Zachary, “Countable state space Markov random fields and Markov chains on trees”, *Ann. Probab.*, **11**:4 (1983), 894–903.

[4] К. Престон, *Гиббсовские состояния на счетных множествах*, Мир, М., 1977.

[5] S. Zachary, “Bounded, attractive and repulsive Markov specifications on trees and on the one-dimensional lattice”, *Stochastic Process. Appl.*, **20**:2 (1985), 247–256.

[6] М. М. Рахматуллаев, “О новых слабо периодических гиббсовских мерах модели Изинга на дереве Кэли”, *Изв. вузов. Матем.*, 2015, № 11, 54–63.

[7] М. М. Рахматуллаев, “Новые гиббсовские меры модели Изинга на дереве Кэли”, *Узб. матем. журн.*, **2** (2009), 144–152.

[8] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.

[9] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, “О чистых фазах модели Изинга на решетках Бете”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **35**:2 (1990), 220–230.

[10] P. M. Bleher, “Extremity of the disordered phase in the Ising model on the Bethe lattice”, *Commun. Math. Phys.*, **128**:2 (1990), 411–419.

[11] P. M. Bleher, J. Ruiz, V. A. Zagrebnov, “On the purity of the limiting Gibbs state for the Ising model on the Bethe lattice”, *J. Stat. Phys.*, **79**:1–2 (1995), 473–482; “On the phase diagram of the random field Ising model on the Bethe lattice”, **93**:1–2 (1998), 33–78.

[12] D. Ioffe, “On the extremality of the disordered state for the Ising model on the Bethe lattice”, *Lett. Math. Phys.*, **3**:2 (1996), 137–143.

[13] D. Ioffe, “Extremality of the disordered state for the Ising model on general trees”, *Trees* (Versailles, June 14–16, 1995), Progress in Probability, **40**, eds. B. Chauvin, S. Cohen, A. Rouault, Birkhäuser, Basel, 1996, 3–14.

[14] P. M. Bleher, J. Ruiz, R. H. Schonmann, S. B. Shlosman, V. A. Zagrebnov, “Rigidity of the critical phases on a Cayley tree”, *Mosc. Math. J.*, **1**:3 (2001), 345–363.

[15] C. Külske, U. A. Rozikov, R. M. Khakimov, “Description of all translation-invariant splitting Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree”, *J. Stat. Phys.*, **156**:1 (2014), 189–200, arXiv: 1310.6220.

[16] У. А. Розиков, Р. М. Хакимов, "Периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли", *ТМФ*, **175**:2 (2013), 300–312.

[17] Р. М. Хакимов, "О существовании периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли", *Узб. матем. журн.*, **3** (2014), 134–142.

[18] М. М. Рахматуллаев, "Существование слабо периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли", *ТМФ*, **180**:3 (2014), 307–317.

[19] U. A. Rozikov, Y. M. Suhov, "Gibbs measures of SOS models on a Cayley tree", *Infin. Dimen. Anal. Quant. Probab. Relat. Top.*, **9**:3 (2006), 471–488.

[20] C. Kulske, U. A. Rozikov, "Extremality of translation-invariant phases for a three-state SOS-model on the binary tree", *J. Stat. Phys.*, **160**:3 (2015), 659–680.

[21] H. Saygili, "Gibbs measures for the Potts–SOS model with three states of spin values", *Asian J. Current Res.*, **1**:3 (2017), 114–121.

[22] У. А. Розиков, "Структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса и их применения для описания периодических распределений Гиббса", *ТМФ*, **112**:1 (1997), 170–175.

Поступила в редакцию 5.05.2018,
после доработки 5.05.2018,
принята к публикации 22.10.2018