

С.С. ВИНОГРАДОВ, Ю.А. ТУЧКИН, академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ

**ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАССЕЯНИЯ ВОЛН,
ИЗЛУЧАЕМЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ,
НА НЕЗАМКНУТЫХ ЭКРАНАХ С МАЛЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ**

Изучим некоторые физические закономерности, присущие задаче волнового рассеяния на незамкнутых экранах с малыми отверстиями. Основное внимание уделим возбуждению открытых резонаторов точечным источником волн и поведению рассеянного поля при исчезающе малых размерах отверстия. Анализ проведем на примере жесткого сферического сегмента с малым отверстием, возбуждаемого точечным акустическим монополем (рис. 1а) в диапазоне частот резонатора Гельмгольца.

1. При постановке краевых задач теории дифракции на незамкнутых экранах в соответствии с методом частичных областей различают "внутреннее" или "внешнее" возбуждение сосредоточенным источником в зависимости от того, находится ли он во внутренней или во внешней области экрана. Полное поле представляется в виде суммы рассеянного и падающего полей в той области, где находится источник, и в виде рассеянного поля в дополнительной области. Такая форма решения не позволяет, однако, рассмотреть "предельный" случай расположения источника на границе внутренней и внешней областей — на "поверхности" отверстия. Формальное затруднение состоит в том, что требование непрерывности поля при переходе через отверстие приводит в этом случае к функциональным уравнениям, содержащим в своей правой части функцию, сингулярную в точке расположения сосредоточенного источника, что находится в противоречии с условиями, налагаемыми на рассеянное поле.

Вместе с тем ясно, что наличие отверстия в экране делает весьма условным разбиение пространства на внутреннюю и внешнюю области. В то же время перемещение сосредоточенного источника через отверстие является физически корректной процедурой. Указанное выше затруднение связано с постановкой задачи — идеализацией источника как точечного (и, следовательно, сингулярного).

Решение этого вопроса заключается в "симметризации" формы представления решения — полное поле во всем пространстве ищется как суперпозиция падающего и рассеянного полей. При сшивании полей на границах частичных областей игнорируется разрывность поля сосредоточенного источника в точке его расположения и требуется непрерывность только рассеянного поля.

2. Рассмотрим следующую задачу. Пусть идеально жесткая сфера радиуса $r = a$ с круговым отверстием $\theta = \alpha$ возбуждается акустическим монополем, расположенным в произвольной точке $r = d$ на оси OZ . Считаем, что монополь находится выше начала координат (рис. 1а). В этом случае потенциал скоростей монополя U^0 описывается функцией

$$(1) \quad U^0 = \exp(ikR)/R, \quad R = (r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta)^{1/2}.$$

Решение U , удовлетворяющее уравнению Гельмгольца и условию излучения на бесконечности, ищется в виде

$$(2) \quad U(r, \theta) = U^0(r, \theta) + U^s(r, \theta);$$

$$(3) \quad U^s = ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)b_n \left\{ \begin{array}{ll} j_n(kr), & r < a \\ h_n(kr)j'_n(ka)/h'_n(ka), & r > a \end{array} \right\} P_n(\cos \theta),$$

где $j_n(z) = (\pi/2z)^{1/2} J_{n+1/2}(z)$, $h_n(z) = (\pi/2z)^{1/2} H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ — сферические функции Бессе-

ля, $P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ — искомые неизвестные, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Представление U^s в виде (3) обеспечивает непрерывность нормальной производной U^s на поверхности $r = a$. Используя известные граничные условия, после ряда преобразований [1] получим функциональные уравнения вида

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n P_n(\cos \theta) = 0, \quad \theta \in (0, \alpha);$$

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x_n(1-\epsilon_n)P_n(\cos \theta) = -i4(ka)^3 G(\theta), \quad \theta \in (\alpha, \pi),$$

где

$$x_n = (2n+1)b_n/h'_n(ka);$$

$$\epsilon_n = 1 + i4(ka)^3(2n+1)^{-1}j'_n(ka)h'_n(ka) = O(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$(6) \quad G(\theta) = h_1(kR_a)\cos \theta_a, \quad h_1(kR_a) = -\frac{\exp(ikR_a)}{kR_a} \left[1 + \frac{i}{kR_a} \right],$$

$$\cos \theta_a = (d \cos \theta - a)/R_a, \quad R_a = (a^2 + d^2 - 2da \cos \theta)^{1/2}.$$

Так как в уравнения (4), (5) входят значения функции $G(\theta)$ только на интервале (α, π) , то она может быть в (4), (5) заменена, например, функцией

$$(7) \quad G_\alpha(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \theta \in (0, \alpha), \\ G(\theta), & \theta \in (\alpha, \pi). \end{cases}$$

Как следует из (6), функция $G(\theta)$ имеет особенность при $\theta = 0$. В отличие от нее функция $G_\alpha(\theta)$ ограничена и кусочно-непрерывна, а значит, допускает на $[0, \pi]$ разложение в ряд Фурье по полиномам Лежандра:

$$(8) \quad G_\alpha(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)g_n^\alpha P_n(\cos \theta).$$

Подставив в (5) вместо $G(\theta)$ правую часть (8), получаем методом [1]–[3] эквивалентную (4), (5) систему линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором в l_2 :

$$(9) \quad (1 - \epsilon_s)x_s + \sum_{n=0}^{\infty} x_n \epsilon_n Q_{sn}(\alpha) = F_s(\alpha), \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$(10) \quad Q_{sn}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(s-n)\alpha}{s-n} + \frac{\sin(s+n+1)\alpha}{s+n+1} \right], \quad \left. \frac{\sin(s-n)\alpha}{s-n} \right|_{n=s} = \alpha;$$

$$F_s(\alpha) = -i4(ka)^3 \left\{ g_s - \sum_{n=0}^{\infty} g_n Q_{sn}(\alpha) \right\}.$$

3. Воспользуемся (9) для анализа влияния положения монополя на эффективность возбуждения резонансных колебаний резонатора Гельмгольца, которые реализуются при $\alpha \ll 1$, $ka \sim \alpha^{1/2}$. Вблизи частоты $(ka)_0$ моды Гельмгольца

$$(11) \quad (ka)_0^2 = \frac{3\alpha}{2\pi} \left(1 + \frac{9}{10} \frac{\alpha}{\pi} + O(\alpha^2) \right)$$

коэффициенты $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ обнаруживают, как это следует из (9), резонансное поведение

$$(12) \quad x_0 = -\frac{3}{4} \frac{F_0(\alpha)}{(ka)^2 - (ka)_0^2 + i\Gamma(ka)} [1 + O((ka)^2, (ka)_0^2)], \quad \Gamma(ka) = \frac{(ka)^5}{3},$$

$$x_n = -\frac{(n+1/2)^2}{n(n+1)} x_0 Q_{0n}(\alpha) [1 + O((ka)^2, (ka)_0^2)].$$

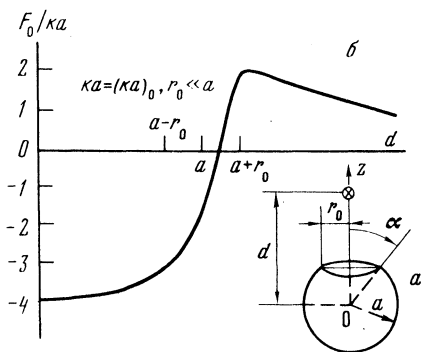


Рис. 1

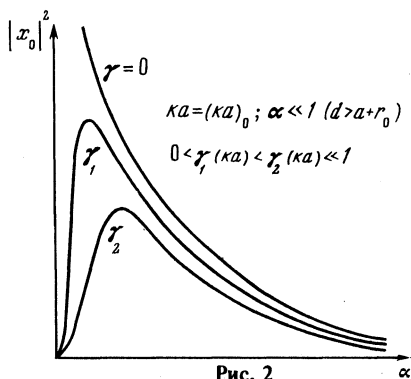


Рис. 2

Видно, что резонансный отклик экрана зависит от величины $F_0(\alpha)$.

Прежде чем анализировать поведение $F_0(\alpha)$, сделаем некоторые качественные выводы о поведении рассеянного поля при $\alpha \ll 1$. Как следует из (6), при $d = a$ функция $G(\theta)$ имеет особенность при $\theta = 0$, следовательно, функция $G_\alpha(\theta)$ (7) имеет большие значения в малой окрестности $\theta - \alpha \ll 1$, тем больше, чем меньше α . Поэтому естественно ожидать, что рассеянное поле будет в основном определяться при $d \approx a$ и $\alpha \ll 1$ значением $G_\alpha(\theta)$ в малой окрестности ребра, т.е. фактически величиной $G_\alpha(\alpha)$. Видно, что при $\theta = \alpha \ll 1$ величина $\cos \theta_\alpha$ (6) меняет знак при переходе от $d < a$ и $d > a$ в малой области $|d - a| \sim \alpha a$. Функция $G_\alpha(\alpha)$ как функция от d достигает одинаковых максимальных по модулю и противоположных по знаку значений примерно на концах этой области. Ее корень $d_0: G_\alpha(\alpha)|_{d=d_0} = 0$ равен согласно (6) $d_0 = a/\cos \alpha$, что соответствует случаю, когда монополю расположен в точке пересечения оси OZ с прямой, касательной к окружности $r = a$ в точке $\theta = \alpha$, т.е. когда эквипотенциали U^0 (окружности) ортогональны экрану в точке ребра. Таким образом, следует ожидать, что при малых размерах отверстия и изменении d от $d < a$ до $d > a$ в малой окрестности $|d - a| \sim r_0$, где r_0 — радиус отверстия, будет происходить "переворот фазы" рассеянного поля.

Точный анализ уравнений (9), (10) подтверждает этот качественный вывод. Можно показать, что зависимость $F_0(\alpha)$ от d при $ka = (ka)_0$ и $\alpha \ll 1$ имеет вид, изображенный на рис. 1. Из рис. 1б следует, что F_0 плавно изменяется вне области $|d - a| \gg r_0$, монотонно убывая при $d \rightarrow \infty$. В области же $|d - a| \lesssim r_0$ величина F_0 быстро изменяется, меняя свой знак на противоположный; значения $|F_0|$ совпадают по порядку величины на концах интервала $[a - r_0, a + r_0]$. Согласно (12) аналогичное поведение имеет рассеянное поле. Наличие корня у F_0 не означает, очевидно, равенства нулю рассеянного поля, так как в точке корня F_0 отличны от нуля $F_s, s > 0$. Это, однако, означает, что при таком расположении монополя (когда $F_0 = 0$) практически не возбуждается мода Гельмгольца и рассеянное поле качественно такое же, как и для замкнутой жесткой сферы.

Если области $d < a - r_0$ и $d > a + r_0$ можно считать соответственно областями внутреннего и внешнего возбуждения, то область $|d - a| < r_0$ можно назвать областью переходного возбуждения.

4. Из (11), (12) и рис. 1б следует, что при $d \neq a, ka = (ka)_0$ и $\alpha \rightarrow 0$ имеем $x_n \rightarrow \infty$. Выбрав определенную параметризацию (гладкую функцию) f вида $ka = f(\alpha)$, $f(0) = 0$, можно в зависимости от значения $f'(0)$ получить согласно (12) при $\alpha \rightarrow 0$

и $ka = f(\alpha)$ любое наперед заданное значение M :

$$(13) \lim_{\alpha \rightarrow 0} x_0 \Big|_{ka=f(\alpha)} = M, \quad 0 \leq M \leq \infty.$$

Такой результат является, разумеется, физически некорректным и связан с идеализацией в постановке задачи — пренебрежением тепловыми потерями. Наличие потерь на излучение из резонатора обуславливает в (12) член $\Gamma(ka)$, который стремится к нулю при $ka = (ka)_0$ и $\alpha \rightarrow 0$, — радиационные потери стремятся к нулю при уменьшении до нуля размеров отверстия связи с внешним пространством.

Учет тепловых потерь (неупругие потери в газе, на стенках и т.д.) приводит к появлению комплексной добавки к резонансной частоте. Ограничиваясь малыми потерями, можно считать, что вещественная часть резонансного значения частоты по-прежнему равна $(ka)_0$. В рассматриваемом приближении величина $\Gamma(ka)$ в (12) имеет вид $\Gamma(ka) = \frac{1}{3}(ka)^5 + \gamma(ka)$, где $0 < \gamma(ka) \ll 1$ описывает тепловые потери. Существенно, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma((ka)_0) = \gamma_0 > 0$. Поэтому учет тепловых потерь при-

водит к тому, что теперь $x_0(ka, \alpha)$ — непрерывная функция по совокупности переменных ka , α , и $x_0((ka)_0, \alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$ стремится к некоторому конечному пределу, равному нулю при внешнем возбуждении. При $\gamma(ka) \ll 1$ существует $\alpha > 0$ такое, что резонансный отклик $x_0((ka)_0, \alpha)$ достигает максимума. На рис. 2 приведены качественные зависимости $|x_0|^2$ от α в резонансе ($ka = (ka)_0$) при отсутствии ($\gamma \equiv 0$) и наличии ($\gamma > 0$) тепловых потерь для случая внешнего возбуждения.

5. При достаточно малых размерах отверстия и $ka = (ka)_s$ — соответствующем резонансном значении частоты — величина F_s , $s > 0$, так же как и F_0 на рис. 1б, быстро изменяет фазу на π в области $|d - a| < r_0$. Те же закономерности справедливы, например, для экранов, рассмотренных в [3].

Рассмотренные здесь физические закономерности носят общий характер и справедливы для широкого класса незамкнутых экранов.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР, Харьков

Поступило
28 I 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов С.С., Тучкин Ю.А., Шестопапов В.П. — ДАН, 1978, т. 242, № 1, с. 80–83.
2. Виноградов С.С., Тучкин Ю.А., Шестопапов В.П. — ДАН, 1980, т. 253, № 1, с. 318–321.
3. Виноградов С.С., Тучкин Ю.А., Шестопапов В.П. — ДАН, 1981, т. 256, № 6, с. 1346–1350.