П.Н.Брусов

ВЛИЯНИЕ СПИН-СПИНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В СВЕРХТЕКУЧЕМ He^3.

I. Спин-спиновое взаимодействие и функционал гидродинамического действия.

Спин-спиновое взаимодействие (ССВ), которое в He^3 является дипольным, несмотря на свою малость ($E_D \sim 10^{-7}\,^\circ K$) приводит к ряду интересных эффектов. Такие явления, как сдвиг частоты поперечного ядерного магнитного резонанса (ЯМР) в сверхтекучей A-фазе, продольный ЯМР в A - и B-фазах на частотах $\Omega_A \approx \Omega_B$, обусловлены дипольным взаимодействием. В B-фазе с этим взаимодействием связано также появление щели порядка Ω_B в спектре одной из голдстоуновских мод (продольных спиновых волн $E = \frac{c_F K}{\sqrt{5}}$), а также силы осцилляторов для нефононных спиновых мод (с $\Omega = \sqrt{8/5}\,\Delta$, см. [I]), которые стремятся к нулю при пренебрежении дипольным взаимодействием. Приведенных примеров достаточно, чтобы оценить важность дипольного взаимодействия. В настоящей работе модель сверхтекучего He^3, предложенная в [2] В.Алонсо и В.Н.Поповым, обобщена с учетом ССВ. Модель, как и в [2], описывается функционалом гидродинамического действия, в котором, однако, учтено дипольное взаимодействие.

Рассмотрим ферми-систему с действием

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \sum_s \bar{\psi}_s(\vec{x},\tau)\, \partial_\tau \psi_s(\vec{x},\tau) - \int_0^\beta H'(\tau)\, d\tau, \tag{I}$$

соответствующим гамильтониану

$$H'(\tau) = \int d^3x \sum_s \Big[\frac{1}{2m} \nabla \bar{\psi}_s(\vec{x},\tau) \nabla \psi_s(\vec{x},\tau) - (s\mu_0 H + \lambda)\, \bar{\psi}_s(\vec{x},\tau) \psi_s(\vec{x},\tau) + \frac{1}{2} \int d^3x\, d^3y\, u(\vec{x}-\vec{y}) \sum_{ss'} \bar{\psi}_s(\vec{x},\tau) \bar{\psi}_{s'}(\vec{y},\tau) \psi_{s'}(\vec{y},\tau) \psi_s(\vec{x},\tau) \Big]. \tag{2}$$

Проинтегрируем по быстрым ферми-полям $\bar{\psi}_1$, ψ_1, у которых $|k - k_F| > k_0$ или $|\omega| > \omega_0$.

$$\int \exp S\, d\bar{\psi}_1\, d\psi_1 = \exp \tilde{S}(\bar{\psi}_{0s}, \psi_{0s}), \tag{3}$$

где $\bar{\psi}_{0s}$, ψ_{0s} - "медленные" поля. Общий вид $\tilde{S}$ есть

$$\tilde{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{S}_{2n} . \tag{4}$$

Опуская несущественную постоянную $\tilde{S}_0$ и пренебрегая высшими функционалами $\tilde{S}_6$, $\tilde{S}_8, \ldots$, ограничимся рассмотрением функционалов $\tilde{S}_2$ и $\tilde{S}_4$, описывающих квазичастицы вблизи поверхности Ферми и их парное взаимодействие:

$$\tilde{S}_2 = \sum_{\vec{k}, \omega, s} \varepsilon_s(\vec{k},\omega)\, a_s^+(\vec{k},\omega)\, a_s(\vec{k},\omega),$$

$$\varepsilon_s(\vec{k},\omega) = Z^{-1}(i\omega - c_F(k-k_F) + s\mu H) ; \tag{5}$$

$$\tilde{S}_4 = -(\beta V)^{-1} \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} t_0(p_i) a_+^+(p_1) a_-^+(p_2) a_-(p_4) a_+(p_3) -$$

$$-(2\beta V)^{-1} \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} t_1(p_i) \Big[2a_+^+(p_1) a_-^+(p_2) a_-(p_4) a_+(p_3) +$$

$$+ a_+^+(p_1) a_+^+(p_2) a_+(p_4) a_+(p_3) + a_-^+(p_1) a_-^+(p_2) a_-(p_4) a_-(p_3) \Big] . \tag{6}$$

Учитывая, что t_0 и t_1 зависят только от двух инвариантов, запишем

$$t_0 = f((\vec{n}_1, \vec{n}_2);(\vec{n}_1 - \vec{n}_2, \vec{n}_3 - \vec{n}_4)),$$

$$t_1 = g((\vec{n}_1, \vec{n}_2),(\vec{n}_1 - \vec{n}_2, \vec{n}_3 - \vec{n}_4))(\vec{n}_1 - \vec{n}_2, \vec{n}_3 - \vec{n}_4), \tag{7}$$

где $\vec{n}_i = \vec{k}_i / k_i$.

Рассмотрим модельную систему с $f = 0$, $g = const < 0$, (8) соответствующую случаю p –спаривания. На этом этапе, обобщая [2], учтем ССВ между квазичастицами. При этом мы будем интересоваться следующими вопросами: появлением новых ветвей коллективных возбуждений, связанных с вводимым ниже $\vec{H}$ –полем, вопросом о конденсации $\vec{H}$ –поля (то есть о возможности перехода He^3 в ферромагнитное состояние за счет ССВ и, наконец, влиянием дипольного взаимодействия на коллективные возбуждения (на их скорость и устойчивость). Ясно, что эти вопросы можно рассмотреть в приближении (8) для гамильтониана(2) независимо от соотношения между величиной дипольного взаимодействия и поправкой к потенциалу, связанной с приближением (8).

Часть действия, связанная с ССВ, имеет вид

$$S_{cc}=-\frac{\mu^2}{2}\int d^3x\, d^3y\, d\tau\left[\left(\delta_{ij}-\frac{3r_ir_j}{r^2}\right)\cdot\frac{1}{r^3}-4\pi\,\delta_{ss'}\,\delta_{ij}\,\delta(\vec{x}-\vec{y})\right]\cdot$$

$$\cdot\overline{\psi}_{0s}(\vec{x},\tau)\frac{\sigma_i}{2}\psi_{0s}(\vec{x},\tau)\,\overline{\psi}_{0s'}(\vec{y},\tau)\frac{\sigma_j}{2}\psi_{0s'}(\vec{y},\tau)=$$

$$=-\frac{\mu^2}{2}\int d^3x\, d^3y\, d\tau\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)+4\pi\,\delta_{ss'}\,\delta_{ij}\,\delta(\vec{x}-\vec{y})\right]\cdot$$

$$\cdot\overline{\psi}_{0s}(\vec{x},\tau)\frac{\sigma_i}{2}\psi_{0s}(\vec{x},\tau)\cdot\overline{\psi}_{0s'}(\vec{y},\tau)\frac{\sigma_j}{2}\psi_{0s'}(\vec{y},\tau)\,, \tag{9}$$

где $r=|\vec{x}-\vec{y}|$, а второй член в квадратных скобках – так называемый "контактный" член.

Перейдем к описанию ССВ посредством магнитного поля, порождаемого магнитным моментом квазичастицы μ. С этой целью введем под знак интеграла по "медленным" ферми-полям $\overline{\psi}_{0s}$, ψ_{0s} континуальный интеграл по переменной $\vec{H}(\vec{x},\tau)$, имеющей смысл магнитного поля и удовлетворяющей уравнению $div\,\vec{H}=0$:

$$\int dH_1\,dH_2\,dH_3\,\delta(div\,H)\exp\left(-\frac{1}{8\pi}\int H^2(\vec{x},\tau)\,d^3x\,d\tau\right). \tag{10}$$

В результате получим

$$\int d\overline{\psi}_{0s}\,d\psi_{0s}\,d\vec{H}\,\delta(div\,\vec{H})\exp\left[\tilde{S}+S_{cc}-\int\frac{H^2(\vec{x},\tau)\,d^3x\,d\tau}{8\pi}\right]. \tag{11}$$

Сделаем в интеграле по $d\vec{H}$ сдвиг

$$\vec{H}(\vec{x},\tau) \Longrightarrow \vec{H}(\vec{x},\tau) - \mu \int d^3y\, \bar{\psi}_{0s}(\vec{y},\tau) \left\{ \frac{1}{r^3} \left[\frac{\vec{\sigma}}{2} - \frac{3\vec{r}(\vec{r}\frac{\vec{\sigma}}{2})}{r^2} \right] - \right.$$

$$\left. - 2\pi\vec{\sigma}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) \right\} \psi_{0s}(\vec{y},\tau), \tag{I2}$$

уничтожающий дипольное взаимодействие.

Тогда имеем покомпонентно:

$$H_k(\vec{x},\tau) \Longrightarrow H_k(\vec{x},\tau) + \mu \int d^3y\, \bar{\psi}_{0s}(\vec{y},\tau) \sum_i \frac{\sigma_i}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} \left(\frac{1}{r}\right) \psi_{0s}(\vec{y},\tau) +$$

$$+ 2\pi\mu\, \bar{\psi}_{0s}(\vec{x},\tau)\, \sigma_k\, \psi_{0s}(\vec{x},\tau).$$

Возводя это выражение в квадрат и суммируя по k, получим

$$-\frac{H^2(\vec{x},\tau)}{8\pi} \Longrightarrow -\frac{H^2(\vec{x},\tau)}{8\pi} - \frac{\mu^2}{2} \int d^3y \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} \left(\frac{1}{r}\right) \bar{\psi}_{0s}(\vec{y},\tau) \frac{\sigma_i}{2} \psi_{0s}(\vec{y},\tau) \cdot$$

$$\cdot \bar{\psi}_{0s}(\vec{x},\tau) \frac{\sigma_j}{2} \psi_{0s'}(\vec{x},\tau) - 2\pi\mu^2 \sum_k \left[\psi_{0s}(\vec{x},\tau) \frac{\sigma_k}{2} \psi_{0s}(\vec{x},\tau) \right]^2 -$$

$$- \vec{H}(\vec{x},\tau)\, \bar{\psi}_{0s}(\vec{x},\tau) \frac{\mu\vec{\sigma}}{2} \psi_{0s}(\vec{x},\tau). \tag{I3}$$

Подставляя (I3) в (II), получим

$$\int d\bar{\psi}_{0s}\, d\psi_{0s}\, d\vec{H}(\vec{x},\tau)\, \delta(\operatorname{div}\vec{H}) \exp\left\{ \tilde{S} - \int d^3x\, d\tau \left[\frac{H^2(\vec{x},\tau)}{8\pi} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \vec{H}(\vec{x},\tau)\, \bar{\psi}_{0s}(\vec{x},\tau) \frac{\mu\vec{\sigma}}{2} \psi_{0s}(\vec{x},\tau) \right] \right\}. \tag{I4}$$

Перейдем к импульсному представлению по формулам

$$\vec{H}(x)=\sum_p \vec{H}(p)e^{ipx} \quad ,$$

$$\psi_{0s}(x)=(\beta V)^{-1/2}\sum_p a_s(p)\,e^{ipx}\,, \tag{15}$$

где $p\equiv \vec{k},\omega$; $x\equiv \vec{x},\tau$.
Вместо (I4) получим

$$\int d\bar{\psi}_{0s}\,d\psi_{0s}\,d\vec{H}(p)\,\delta(\vec{k}\vec{H}(p))\,exp\Big[\tilde{S}-\frac{\beta V}{8\pi}\sum_p \vec{H}(p)\vec{H}(-p)-$$

$$-\sum_{p_1,p_2}\vec{H}(p_1-p_2)\,a_s^+(p_1)\frac{\mu\vec{\sigma}}{2}\,a_s(p_2)\Big]. \tag{16}$$

Далее перейдем от ферми- к бозе-полям, вводя в интеграл (I6) гауссов интеграл по бозе-полям $c_{ia}(p)$, описывающим куперовские пары квазичастиц

$$\int d\bar{c}_{ia}\,dc_{ia}\,exp\Big(\frac{1}{g}\sum_{p,i,a} c^+_{ia}(p)\,c_{ia}(p)\Big)\,. \tag{17}$$

Сделаем сдвиг бозе-полей, уничтожающий форму $\tilde{S}_4$:

$$c_{i1}(p)\to c_{i1}(p)+\frac{g}{2\sqrt{\beta V}}\sum_{p_1+p_2=p}(n_{1i}-n_{2i})\big[a_+(p_2)a_+(p_1)-a_-(p_2)a_-(p_1)\big],$$

$$c_{i2}(p)\to c_{i2}(p)+\frac{gi}{2\sqrt{\beta V}}\sum_{p_1+p_2=p}(n_{1i}-n_{2i})\big[a_+(p_2)a_+(p_1)+a_-(p_2)a_-(p_1)\big],$$

$$c_{i3}(p)\to c_{i3}(p)+\frac{g}{\sqrt{\beta V}}\sum_{p_1+p_2=p}(n_{1i}-n_{2i})\,a_-(p_2)\,a_+(p_1)\,. \tag{18}$$

Интеграл по медленным полям $a_s^+(p)$, $a_s(p)$ становится гауссовым. Вычислив его, получим интеграл по бозе-полям $\bar{c}_{ia}$, c_{ia} и $\vec{H}(p)$ от

$$exp\,S_h(\bar{c},c,\vec{H})\,,$$

где функционал гидродинамического действия S_h равен

$$S_h=\frac{1}{g}\sum_{p,i,a} c^+_{ia}(p)c_{ia}(p)-\frac{\beta V}{8\pi}\sum_{p}\vec{H}(p)\vec{H}(-p)+\frac{1}{2}\ln\det\frac{\hat{M}(\bar{c},c,\vec{H})}{\hat{M}(0,0,\vec{0})}, \quad (19)$$

а $\hat{M}$ – оператор:

$$\hat{M}=\begin{pmatrix} Z^{-1}(i\omega-\xi+\mu H\sigma_3)\delta_{p_1p_2}+Z^{-1}\vec{H}(p_1-p_2)\frac{\mu\vec{\sigma}}{2}; & (\beta V)^{-\frac{1}{2}}(n_{1i}-n_{2i})c_{ia}(p_1+p_2)\sigma_a \\ -(\beta V)^{-\frac{1}{2}}(n_{1i}-n_{2i})c^+_{ia}(p_1+p_2)\sigma_a; & Z^{-1}(-i\omega+\xi+\mu H\sigma_3)\delta_{p_1p_2}-Z^{-1}\vec{H}(p_2-p_1)\frac{\mu\vec{\sigma}}{2} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Функционал (19) определяет все физические свойства модельной системы. В частности, он описывает все явления, связанные с ЯМР, причем в отличие от обычно используемых для этих целей уравнений Леггетта и Такаги [3], он не основывается на феноменологических предположениях.

2. <u>Область Гинзбурга – Ландау</u>.

В области $T\sim T_c$ функционал $\ln\det$ можно разложить по степеням полей $\bar{c}_{ia}$, c_{ia} (поскольку c_{ia} играет роль параметра порядка) и H (которое мало в силу малости порождающего его дипольного взаимодействия)

$$\frac{1}{2}\ln\det\frac{\hat{M}(\bar{c},c,\vec{H})}{\hat{M}(0,0,\vec{0})}=-\frac{1}{4}Sp(\hat{G}\hat{u})^2-\frac{1}{8}Sp(\hat{G}\hat{u})^4-\dots, \quad (21)$$

где

$$G^{-1}=\hat{M}(0,0,\vec{0})=Z^{-1}\delta_{p_1p_2}\begin{pmatrix} i\omega-\xi & 0 \\ 0 & -i\omega+\xi \end{pmatrix},$$

$$u_{p_1p_2}=\begin{pmatrix} Z^{-1}\vec{H}(p_1-p_2)\frac{\mu\vec{\sigma}}{2}; & (\beta V)^{-\frac{1}{2}}(n_{1i}-n_{2i})c_{ia}(p_1+p_2)\sigma_a \\ -(\beta V)^{-\frac{1}{2}}(n_{1i}-n_{2i})c^+_{ia}(p_1+p_2)\sigma_a; & -Z^{-1}\vec{H}(p_2-p_1)\frac{\mu\vec{\sigma}}{2} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

3.3

Мы положили внешнее поле равным нулю.

$$Sp(\hat{G}\hat{u})^2=\sum_{p_1,p_2,p_3,p_4} tr\,\hat{G}_{p_1p_2}\hat{u}_{p_2p_3}\hat{G}_{p_3p_4}\hat{u}_{p_4p_1}=$$

$$=\sum_{p_1-p_2=p}\mu^2 Z^{-2} G(p_1)G(p_2)\vec{H}(p)\vec{H}(-p)-$$

$$-\frac{16}{\beta V}\sum_{p_1+p_2=p} G(p_1)G(p_2)\,n_i n_j\, c^+_{ia}(p)\,c_{jb}(p). \qquad (23)$$

Здесь $G=Z(i\omega-\xi)^{-1}$, а импульсы p - малы. При $T>T_c$

$$S_h=\frac{1}{g}\sum_{p,i,a}c^+_{ia}(p)c_{ia}(p)-\frac{\beta V}{8\pi}\sum_p H(p)H(-p)-\frac{1}{4}\mu^2\sum_{p_1-p_2=p}$$

$$\frac{\vec{H}(p)\vec{H}(-p)}{(i\omega_1-\xi_1)(i\omega_2-\xi_2)}+\frac{4}{\beta V}\sum_{p_1+p_2=p}\frac{Z^2}{(i\omega_1-\xi_1)(i\omega_2-\xi_2)}n_{1i}n_{1j}c^+_{ia}(p)c_{ja}(p)=$$

$$=\sum_p\left\{\frac{\delta_{ij}}{g}+\frac{4Z^2}{\beta V}\sum_{p_1+p_2=p}\frac{n_{1i}n_{1j}}{(i\omega_1-\xi_1)(i\omega_2-\xi_2)}\right\}c^+_{ia}(p)c_{ja}(p)-$$

$$-\sum_p\left\{\frac{\beta V}{8\pi}+\frac{\mu^2}{4}\sum_{p_1+p_2=p}\frac{1}{(-i\omega_1+\xi_1)(i\omega_2+\xi_2)}\right\}\vec{H}(p)\vec{H}(-p). \qquad (24)$$

Приравнивая нулю коэффициент при $H^2(0)$, получим уравнение для определения критической температуры $\vec{H}$ -полей T_H :

$$\frac{\beta V}{4}\left[\frac{1}{2\pi}+\frac{\mu^2}{\beta V}\sum_{p_1}\frac{1}{(i\omega_1-\xi_1)^2}\right]=0. \qquad (25)$$

Суммируя по ω_1 с помощью формулы

$$\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_1}\frac{1}{(i\omega_1-\xi_1)^2}=-\beta\frac{e^{\beta\xi}}{(e^{\beta\xi}+1)^2}$$

и интегрируя по импульсу, получим уравнение

$$\frac{\beta V}{8\pi}\left(1-\frac{\mu^2 K_F^2}{\pi c_F}\right)=0. \qquad (26)$$

Выражение $\left(1-\frac{\mu^2 k_F^2}{\pi c_F}\right)$ не равно нулю, так как $\frac{\mu^2 k_F^2}{\pi c_F} \ll 1$. Поэтому конденсации $\vec{H}$ -поля при конечных температурах не происходит, и система не может перейти в ферромагнитное состояние в результате ССВ.

Спектр коллективных возбуждений $\vec{H}$ -поля можно определить, приравнивая нулю коэффициент при $\vec{H}(p)\vec{H}(-p)$. Уравнение для спектра имеет вид:

$$\frac{\beta V}{2\pi} + \mu^2 \sum_{p_1+p_2=p} \frac{1}{(-i\omega_1+\xi_1)(i\omega_2+\xi_2)} = 0. \tag{27}$$

Вычисляя $\sum_{p_1}$, приходим к уравнению

$$\frac{\beta V}{2\pi}\left[1-\frac{\mu^2 k_F^2}{4\pi^2 c_F}\int d\Omega \, \frac{c_F^2(\vec{n}\vec{k})^2}{\omega^2+c_F^2(\vec{n}\vec{k})^2}\right] = 0. \tag{28}$$

Можно показать, что оно имеет только тривиальное решение $\omega=0$. Таким образом, магнитные возбуждения в системе при $T>T_c$ отсутствуют. При $T<T_c$ необходимо выделять конденсат $c_{ia}^{(0)}(p)$. Он различен для различных сверхтекучих фаз. Мы рассмотрим изотропную B -фазу в пределе низких температур $T \to 0$.

3. <u>Коллективные возбуждения в B -фазе при $T_c - T \sim T_c$.</u>

Конденсатная функция $c_{ia}^{(0)}(p)$ в B -фазе имеет вид [2]

$$c_{ia}^{(0)}(p) = (\beta V)^{\frac{1}{2}}\, c\, \delta_{p0}\, \delta_{ia}, \tag{29}$$

причем c находится из уравнения

$$\frac{3}{g} + \frac{4Z^2}{\beta V}\sum_p (\omega^2+g^2+4c^2Z^2)^{-1} = 0. \tag{30}$$

Сделав сдвиг $c_{ia}(p) \to c_{ia}^{(0)}(p) + c_{ia}(p)$, выделим в S_h квадратичную форму от новых переменных

$$S_h = \frac{1}{g}\sum_{p,i,a} c_{ia}^{+}(p)\, c_{ia}(p) - \frac{\beta V}{8\pi}\sum_p \vec{H}(p)\vec{H}(-p) - \frac{1}{4} Sp(\hat{G}\hat{u})^2, \tag{31}$$

где

$$\hat{u}_{p_1p_2}=\begin{pmatrix} Z^{-1}\vec{H}(p_1-p_2)\frac{\mu\vec{\sigma}}{2}; & (\beta V)^{-\frac{1}{2}}(n_{1i}-n_{2i})\,c_{ia}(p_1+p_2)\,\sigma_a \\ -(\beta V)^{-\frac{1}{2}}(n_{1i}-n_{2i})\,c^{+}_{ia}(p_1+p_2)\,\sigma_a; & -Z^{-1}\vec{H}(p_2-p_1)\frac{\mu\vec{\sigma}}{2} \end{pmatrix},$$

$$\hat{G}_{p_1p_2}=\frac{Z}{M}\begin{pmatrix} -(i\omega_1+\xi_1)\,\delta_{p_1p_2} & 2cZ(\vec{n}_1\vec{\sigma})\,\delta_{p_1+p_2} \\ -2\bar{c}Z(\vec{n}_1\vec{\sigma})\,\delta_{p_1+p_2} & (i\omega_1+\xi_1)\,\delta_{p_1p_2} \end{pmatrix},$$

$$M=\omega^2+\xi^2+4c^2Z^2. \tag{32}$$

Вычисляя

$$\frac{1}{4}\,Sp(\hat{G}\hat{u})^2=\frac{1}{4}\sum_{p_1,p_2,p_3,p_4} tr\,(\hat{G}_{p_1p_2}\hat{u}_{p_2p_3}\hat{G}_{p_3p_4}\hat{u}_{p_4p_1})$$, получим

для S_h выражение:

$$S_h=-\frac{Z^2}{4}\sum_p\Big\{\sum_{p_1+p_2=p}\frac{(-i\omega_1+\xi_1)(i\omega_2+\xi_2)}{(\omega_1^2+\varepsilon_1^2)(\omega_2^2+\varepsilon_2^2)}\,\frac{\mu^2}{Z^2}\vec{H}(p)\vec{H}(-p)+$$

$$+\sum_{p_1+p_2=p}\frac{4c^2Z^2}{(\omega_1^2+\varepsilon_1^2)(\omega_2^2+\varepsilon_2^2)}\Big[\vec{H}(p)\vec{H}(-p)-2(\vec{n}_1\vec{H}(p))(\vec{n}_1\vec{H}(-p))\Big]-$$

$$-\frac{8ic\mu}{\sqrt{\beta V}}\sum_{p_1+p_2=p}\frac{i\omega+(\xi_1+\xi_2)}{(\omega_1^2+\varepsilon_1^2)(\omega_2^2+\varepsilon_2^2)}\,n_{1i}\Big[\big[\vec{H}(p)\vec{n}_1\big]_a\,c^{+}_{ia}(p)+$$

$$+\big[\vec{H}(-p)\vec{n}_1\big]_a\,c_{ia}(p)\Big]\Big\}-\frac{\beta V}{8\pi}\sum_p\vec{H}(p)\vec{H}(-p)-$$

$$-\sum_p\Big\{c^{+}_{ia}(p)\,c_{ja}(p)\Big[-\frac{\delta_{ij}}{g}-\frac{4}{\beta V}\sum_{p_1+p_2=p}n_{1i}n_{1j}\frac{Z^2(i\omega_1+\xi_1)(i\omega_2+\xi_2)}{(\omega_1^2+\varepsilon_1^2)(\omega_2^2+\varepsilon_2^2)}\Big]-$$

$$-\frac{1}{2}\left(c_{ia}(p)c_{jb}(-p)+c^+_{ia}(p)c^+_{jb}(-p)\right)\frac{16c^2Z^2}{\beta V}\sum_{p_1+p_2=p}\frac{Z^2(2n_{1a}n_{1b}n_{1i}n_{1j}-\delta_{ab}n_{1i}n_{1j})}{(\omega_1^2+\varepsilon_1^2)(\omega_2^2+\varepsilon_2^2)} \qquad (33)$$

Эта квадратичная форма определяет бозе-спектр в B -фазе He^3 с учетом ССВ. Перепишем ее в виде:

$$S_h=\sum_p\Big\{A_{ij}(p)\,c^+_{ia}(p)c_{ia}(p)+\frac{1}{2}B_{ijab}(p)\big(c^+_{ia}(p)c^+_{jb}(-p)+$$
$$+c_{ia}(p)c_{jb}(-p)\big)+C_i(p)H_i(p)H_i(-p)+\mathcal{D}_{iak}(p)\big(c^+_{ia}(p)H_k(p)+$$
$$+c_{ia}(p)H_k(-p)\big)\Big\}. \qquad (34)$$

После замены $c_{ia}=u_{ia}+iv_{ia}$, $c^+_{ia}=u_{ia}-iv_{ia}$ квадратичная форма (34) распадается на две независимые формы от переменных u_{ia} и v_{ia} соответственно:

$$\text{I)}\ \sum_p\Big\{\frac{1}{2}C_i(p)H_i(p)H_i(-p)+\mathcal{D}_{iak}(p)\big(u_{ia}H_k(p)+u_{ia}H_k(-p)\big)-$$
$$-\big(A_{ij}(p)\,u_{ia}u_{ja}+B_{ijab}(p)\,u_{ia}u_{jb}\big)\Big\} \qquad (35)$$

$$2)\ \sum_p\Big\{\frac{1}{2}C_i(p)H_i(p)H_i(-p)-i\mathcal{D}_{iak}(p)\big(v_{ia}H_k(p)-v_{ia}H_k(-p)\big)-$$
$$-A_{ij}(p)\,v_{ia}v_{ja}+B_{ijab}(p)\,v_{ia}v_{jb}\Big\}. \qquad (36)$$

Рассмотрим первую форму.

Перейдем к "фононным" переменным по формулам

$$u_{12}=\frac{u+u_1}{2},\qquad u_{32}=\frac{v_1-v}{2},\qquad u_{11}=w'+w_1',$$
$$u_{21}=\frac{u_1-u}{2},\qquad u_{31}=\frac{t+t_1}{2},\qquad u_{22}=\frac{3w_2'-w_1'+2w'}{6},$$
$$u_{23}=\frac{v+v_1}{2},\qquad u_{13}=\frac{t_1-t}{2},\qquad u_{33}=-\frac{3w_2'+w_1'-2w'}{6}. \qquad (37)$$

Бозе-спектр определяется уравнением

$$\det Q = 0, \tag{38}$$

где Q - матрица квадратичной формы (35) в фононных переменных (37).

Вычисляя коэффициенты квадратичной формы и разлагая их по малым величинам ω^2, k^2, решим затем уравнение (38) и получим законы дисперсии поперечных спиновых волн с учетом дипольного взаимодействия. При вычислении закона дисперсии продольных спиновых волн, имеющего щель при $\vec{k} = 0$, а также поправок к частотам нефононных ветвей, следует считать малым только $\vec{k}$ и разлагать по степеням k^2 (ω остается конечным при $\vec{k} \to 0$).

Уравнение для спектра поперечных спиновых волн имеет вид:

$$5\left(\omega^2 + \frac{2c_F^2 k^2}{5}\right) - \frac{5}{2\Delta^2}\left(\frac{\omega^4}{3} + \frac{4\omega^2 c_F^2 k^2}{15} + \frac{c_F^4 k^4}{35} + \frac{3c_F^4 k^4}{28}\right) -$$

$$-60 x\omega^2\left(\frac{1}{3} - \frac{\omega^2}{18\Delta^2} - \frac{c_F^2 k^2}{45\Delta^2}\right)^2 = 0, \tag{39}$$

где $x \equiv \dfrac{\mu^2 k_F^2}{\pi c_F}$.

С точностью до членов $\sim \omega^2, k^2$ имеем

$$5\left(\omega^2 + \frac{2c_F^2 k^2}{5}\right) - \frac{20}{3} x\omega^2 = 0. \tag{40}$$

После аналитического продолжения $i\omega \to E$ получаем закон дисперсии

$$E = \sqrt{\frac{2}{5}}\, c_F k \Big/ \left(1 - \frac{2}{3}\frac{\mu^2 k_F^2}{\pi c_F}\right). \tag{41}$$

Скорость поперечных спиновых волн при учете дипольного взаимодействия несколько возрастает.

Учет членов 4-го порядка в уравнении (39) дает закон дисперсии

$$E = \sqrt{\frac{2}{5}}\,\frac{c_F k}{1 - \frac{2}{3}\frac{\mu^2 k_F^2}{\pi c_F}}\left(1 - \frac{173}{3360}\frac{c_F^2 k^2}{\Delta^2}\right). \tag{42}$$

Таким образом, в первом приближении дипольное взаимодействие не влияет на устойчивость поперечных спиновых волн (4), а лишь перенормирует скорость возбуждений.

Проведя аналогичные выкладки для квадратичной формы (36), получим, что ССВ не влияет на скорость и устойчивость звуковых волн $\frac{c_F k}{\sqrt{3}}$ [4].

Поправки к частотам нефононных ветвей и щель в спектре поперечных спиновых волн оказываются порядка частоты продольного ЯМР Ω_B .

4. Влияние внешнего магнитного поля на коллективные моды в сверхтекучих A- и B -фазах.

В [2] содержится утверждение, что A -фаза в рассматриваемой модели является метастабильной при $H=0$ и разрушается сколь угодно малым магнитным полем. Поскольку реально A -фаза стабильна в магнитном поле, может возникнуть представление, что предложенная в [2] модель не описывает A -фазу в магнитном поле и в этом смысле является недостаточной. Однако, как будет показано ниже, нестабильность A -фазы модели в магнитном поле является следствием не недостатков модели, а лишь неудачного выбора параметра порядка для A -фазы.

Рассмотрим в области Гинзбурга - Ландау часть действия, не зависящую от градиентов. Ее можно записать в виде $-\alpha\Pi$, где

$$\alpha = -\frac{20\, k_F^2 (\Delta T)^2 \beta V}{21\zeta(3)\, c_F},$$

$$\Pi = -\operatorname{tr} AA^+ + \nu \operatorname{tr} A^+AP + (\operatorname{tr} A^+A)^2 + \operatorname{tr} AA^+AA^+ +$$

$$+\operatorname{tr} AA^+A^*A^T - \operatorname{tr} AA^TA^*A^+ - \frac{1}{2}\operatorname{tr} AA^T \operatorname{tr} A^+A^* . \qquad (43)$$

Здесь $\nu = 7\zeta(3)\mu^2H^2/4\pi^2T_c\Delta T$, P - проектор на третью ось, вдоль которой направлено магнитное поле, элементы матрицы A пропорциональны бозе-полям $c_{ia}(p)$ [2].

Минимизируя Π , можно найти матрицу A , определяющую плотность бозе-конденсата. Уравнение $\delta\Pi = 0$ имеет вид

$$-A + \nu AP + 2(\operatorname{tr} A^+A)A + 2AA^+A + 2A^*A^TA -$$

$$-2AA^TA^* - A \operatorname{tr} AA^T = 0 . \qquad (44)$$

В [2] в качестве решения, ассоциированного с A -фазой, было выбрано

$$\overset{\circ}{A}{}'_{ia} = c'(\delta_{i1}\delta_{a3} + i\delta_{i2}\delta_{a3}) . \tag{45}$$

Однако уравнение (44) допускает и другие решения, отличающиеся от (45) иным значением спинового индекса (I либо 2), которые также можно сопоставить с A -фазой.

$$\overset{\circ}{A}_{ia} = c(\delta_{i1}\delta_{a1} + i\delta_{i2}\delta_{a1}) , \tag{46}$$

$$\overset{\circ}{A}{}''_{ia} = c''(\delta_{i1}\delta_{a2} + i\delta_{i2}\delta_{a2}) . \tag{47}$$

Ограничимся рассмотрением случая (46) и покажем, что A -фаза, описываемая таким параметром порядка, стабильна в произвольном магнитном поле по отношению к малым возмущениям.

Подставляя (46) в (44), получим

$$\delta\Pi = -A + 4|c|^2 A = 0 ,$$

откуда $|c|^2 = \frac{1}{4}$.

Таким образом,

$$\overset{\circ}{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{48}$$

При этом $\Pi = -\frac{1}{4}$ и в первом приближении не зависит от H .

Для решения вопроса о стабильности A -фазы в магнитном поле, исследуем вторую вариацию $\delta^2\Pi$ при $\nu \neq 0$ $(H \neq 0)$. Система стабильна, если форма $\delta^2\Pi$ неотрицательна. Имеем

$$\begin{aligned}\delta^2\Pi = & -\mathrm{tr}\,AA^+ + \nu\,\mathrm{tr}\,A^+AP + \mathrm{tr}\left[(A^+\overset{\circ}{A})^2 + (\overset{\circ}{A}{}^+A)^2 + \right.\\ & \left. + 2A^+A\overset{\circ}{A}{}^+\overset{\circ}{A} + 2A^+\overset{\circ}{A}\overset{\circ}{A}{}^+A\right] + \mathrm{tr}\left[2AA^+\overset{\circ}{A}\overset{\circ}{A}{}^+ + 2A^+A\overset{\circ}{A}{}^+\overset{\circ}{A} + \right.\\ & \left. + A\overset{\circ}{A}{}^+A\overset{\circ}{A}{}^+ + \overset{\circ}{A}{}^+\overset{\circ}{A}A^+\overset{\circ}{A}\right] + \mathrm{tr}\left[AA^+\overset{\circ}{A}{}^*\overset{\circ}{A}{}^T + A^+A^*\overset{\circ}{A}{}^T\overset{\circ}{A} + \right.\\ & \left. + A^*A^T\overset{\circ}{A}\overset{\circ}{A}{}^+ + A^T A\overset{\circ}{A}{}^+A^* + A\overset{\circ}{A}{}^+A^*\overset{\circ}{A}{}^T + A^T\overset{\circ}{A}A^+\overset{\circ}{A}{}^*\right] - \end{aligned} \tag{49}$$

$$-tr\left[A A^{\circ T}\mathring{A}^{*}\mathring{A}^{+}+A^{T}A^{*}\mathring{A}^{+}\mathring{A}+A^{*}A^{+}\mathring{A}\mathring{A}^{+}+A^{+}A\mathring{A}^{\circ T}\mathring{A}^{*}\right]-2\,|tr\,\mathring{A}^{\circ T}A|^{2},$$

где $\mathring{A}$ – матрица (48).

Подставляя вместо $\mathring{A}, \mathring{A}^{T}, \mathring{A}^{*}, \mathring{A}^{+}$ их значения, получим

$$\delta^2\Pi = 4\nu(u_{13}^2+u_{23}^2+u_{33}^2+v_{13}^2+v_{23}^2+v_{33}^2)+$$

$$+2\left[2(u_{11}+v_{21})^2+(u_{11}-v_{21})^2+(u_{12}-v_{22})^2+(u_{13}-v_{23})^2+\right.$$

$$+(u_{21}+v_{11})^2+2(u_{22}-v_{12})^2+(u_{22}+v_{12})^2+2(u_{23}-v_{13})^2+$$

$$\left.+(u_{23}+v_{13})^2\right]. \tag{50}$$

Здесь $u_{ia}=Re\,A_{ia}$, $v_{ia}=Im\,A_{ia}$. Квадратичная форма (50) неотрицательна при любых ν. Это означает, что A – фаза стабильна в произвольном магнитном поле в рамках предложенной в [2] модели.

Исследуем влияние магнитного поля на структуру бозе-спектра в A- и B -фазах He^3, в частности, на число голдстоуновских мод в них. Этот вопрос можно решить, анализируя симметрию лагранжиана и состояний, соответствующих данным фазам в магнитном поле. Мы, однако, рассмотрим его, изучая свойства формы $\delta^2\Pi$. В A -фазе $\delta^2\Pi$ имеет вид (50), в B -фазе [2] она равна

$$\delta^2\Pi=\frac{\nu+2}{5}\left[3u_{11}^2+3u_{22}^2+2u_{11}u_{22}+(u_{12}+u_{21})^2+u_{13}^2+u_{23}^2\right]+$$

$$+\frac{2(1-2\nu)}{5}(u_{31}^2+u_{32}^2+3u_{33}^2)+\frac{4}{5}\left[\frac{(1-2\nu)(2+\nu)}{2}\right]^{1/2}(u_{11}u_{33}+$$

$$+u_{22}u_{33}+u_{13}u_{31}+u_{23}u_{32})+\frac{4-3\nu}{5}(v_{11}^2+v_{22}^2)+\frac{8-\nu}{5}(v_{12}^2+v_{21}^2)+$$

$$+\frac{2(2+\nu)}{5}(v_{33}^2-v_{11}v_{22}-v_{12}v_{21})+\frac{8+9\nu}{5}(v_{13}^2+v_{23}^2)+$$

$$+\frac{8(1-2\nu)}{5}(v_{31}^2+v_{32}^2)-\frac{4}{5}\left[\frac{(1-2\nu)(2+\nu)}{2}\right]^{1/2}(v_{11}v_{33}+v_{22}v_{33}+$$

$$+v_{13}v_{31}+v_{32}v_{23}). \tag{51}$$

Квадратичная форма (5I) распадается на две независимые формы, зависящие от u_{ia} и v_{ia} соответственно.

Приведя их к каноническому виду, получим выражения для u -формы

$$\frac{\nu+2}{5}(u_{12}+u_{21})^2+\left(\sqrt{\frac{\nu+2}{5}}\,u_{13}+2\sqrt{\frac{1-2\nu}{10}}\,u_{31}\right)^2+$$

$$+\left(\sqrt{\frac{\nu+2}{5}}\,u_{23}+2\sqrt{\frac{1-2\nu}{10}}\,u_{32}\right)^2+$$

$$+\frac{5}{3(\nu+2)}\left[\frac{3(\nu+2)}{5}\,u_{11}+\frac{\nu+2}{5}\,u_{22}+\frac{2}{5}\sqrt{\frac{(1-2\nu)(2+\nu)}{2}}\,u_{33}\right]^2+$$

$$+\frac{15}{8(\nu+2)}\left[\frac{8(\nu+2)}{15}\,u_{22}+\frac{4}{15}\sqrt{\frac{(1-2\nu)(2+\nu)}{2}}\,u_{33}\right]^2+\frac{1-2\nu}{16}\,u_{33}^2 \qquad (52)$$

и v - формы

$$\frac{5}{4-3\nu}\left[\frac{4-3\nu}{5}\,v_{11}-\frac{2+\nu}{5}\,v_{22}-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{(1-2\nu)(2+\nu)}{2}}\,v_{33}\right]^2+$$

$$+\frac{4-3\nu}{(3-\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{(3-\nu)(1-2\nu)}{4-3\nu}\,v_{22}-\frac{3-\nu}{4-3\nu}\sqrt{\frac{(1-2\nu)(2+\nu)}{2}}\,v_{33}\right]^2+$$

$$+\frac{8-\nu}{5}\left(v_{12}-\frac{2+\nu}{8-\nu}\,v_{21}\right)^2+\frac{4(3-\nu)}{8-\nu}\,v_{21}^2+$$

$$+\frac{8+9\nu}{5}\left[v_{13}-\frac{4}{8+9\nu}\sqrt{\frac{(1-2\nu)(2+\nu)}{2}}\,v_{31}\right]^2-\frac{8}{5}(1+\nu)(1-2\nu)\,v_{31}^2+$$

$$+\frac{8+9\nu}{5}\left[v_{23}-\frac{4}{8+9\nu}\sqrt{\frac{(1-2\nu)(2+\nu)}{2}}\,v_{32}\right]^2-\frac{8}{5}(1+\nu)(1-2\nu)\,v_{32}^2. \qquad (53)$$

В u -форме при $\nu=0$ существует три фононных переменных $u_{12}-u_{21}$, $u_{23}-u_{32}$, $u_{31}-u_{13}$, которым соответствует три голдстоуновские моды бозе-спектра (спиновые волны).

В магнитном поле ($\nu\neq 0$) u -форма имеет те же три фононные переменные. v -форма при $\nu=0$ дает одну голдстоуновскую ветвь (звук), соответствующую фононной переменной $v_{11}+v_{22}+v_{33}$. Из (53) видно, что эта же переменная остается фононной и при включении поля.

Таким образом, исследование второй вариации $\delta^2\Pi$ в B -фазе показывает, что число голдстоуновских мод в ней не изменяется при включении магнитного поля.

Иная ситуация имеет место в A -фазе. Квадратичная форма (50) при $\nu=0$ имеет 9 фононных переменных

$$u_{12}+v_{22}\,,\; u_{13}+v_{23}\,,\; u_{21}-v_{11}\,,\; u_{31}\,,\; v_{31}\,,\; u_{32}\,,\; v_{32}\,,\; u_{33}\,,\; v_{33}\,. \tag{54}$$

При наличии поля форма (50) после приведения к каноническому виду равна

$$\begin{aligned}\delta^2\Pi = {} & 4\nu(u_{33}^2+v_{33}^2)+2(2\nu+1)\Big(u_{13}-\frac{1}{2\nu+1}v_{23}\Big)^2+\\ & +\frac{(\nu-\frac{1}{2})(\nu+\frac{3}{2})}{(\nu+\frac{1}{2})}v_{23}^2+2(3+2\nu)\Big(u_{23}-\frac{1}{3+2\nu}v_{13}\Big)^2+\\ & +\frac{(2+\nu)(3+4\nu)}{3+2\nu}v_{13}^2+4(u_{11}+v_{21})^2+2(u_{11}-v_{21})^2+\\ & +2(u_{12}-v_{22})^2+2(u_{21}+v_{11})^2+4(u_{22}-v_{12})^2+2(u_{22}+v_{12})^2.\end{aligned} \tag{55}$$

Видно, что при $\nu\neq 0$ переменные $u_{13}+v_{23}$, u_{33}, v_{33} становятся нефононными, а соответствующие им ветви коллективных возбуждений приобретают щель в спектре порядка μH.

Таким образом, в A -фазе включение магнитного поля уменьшает число голдстоуновских мод с 9 до 6.

Анализ форм (52), (53), (55) показывает, что в то время, как в B -фазе все нефононные моды в магнитном поле получают добавку к энергии $\sim\mu H$, в A -фазе лишь три моды, имеющие щель при $H=0$, получают аналогичную добавку, им соответствуют переменные $u_{13}-v_{23}$, $u_{23}+v_{13}$, $u_{23}-v_{13}$. На шесть других нефононных мод в A -фазе(переменные $u_{11}+v_{21}$, $u_{11}-v_{21}$, $u_{21}-v_{22}$, $u_{21}+v_{11}$, $u_{22}-v_{12}$, $u_{22}+v_{12}$) магнитное поле не влияет. В заключение сделаем замечание о фазовом переходе из B - в $2D$ -фазу, предсказанном в [2], с учетом полученной устойчивости A -фазы в магнитном поле. В [2] из-за нестабильности A -фазы был возможен переход из B -фазы только в $2D$ -фазу. При $H=H_c$ $(\nu=\frac{1}{2})$, когда возникала $2D$ -фаза и исчезала B -фаза, выполнялось условие равенства действий в обеих фазах: $\Pi_B=\Pi_{2D}=-\frac{1}{4}$, а параметр порядка B -фазы непрерывным образом переходил в параметр порядка $2D$ -фазы.

Теперь зависимость действия фаз от имеет вид, изображенный на рис.I.

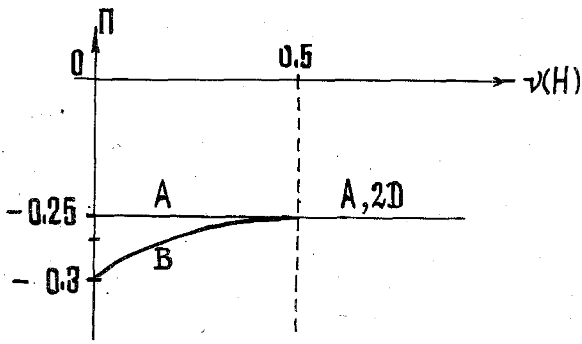

Рис.I

Видно, что при $\nu=\frac{1}{2}$ величина действия одинакова для всех трех фаз $A,B,2D$. Поэтому при $H=H_c$ $(\nu=\frac{1}{2})$ возможен как переход $B\to 2D$, так и переход $B\to A$. При этом в пользу перехода $B\to 2D$ существует дополнительный довод - совпадение параметров порядка у B- и $2D$-фаз в критической точке, в то время, как в A -фазе он имеет другой вид. Однако в принципе при $H=H_c$ возможна перестройка состояния системы, приводящая к изменению структуры параметра порядка.

<u>Заключение</u>. В данной работе модель He^3 в приближении слабой связи обобщена с учетом спин- спинового взаимодействия. Получен функционал гидродинамического действия, определяющий все физические свойства модельной системы и, в частности, полностью описывающий ЯМР. Показано, что магнитное поле, связанное с ди-

польным взаимодействием не конденсируется, и He^3 остается парамагнетиком при всех температурах. При этом магнитные возбуждения упомянутого поля отсутствуют. При исследовании изотропной B -фазы в области температур $T_c - T \sim T_c$ получена перенормированная скорость поперечных спиновых волн, а также поправки к нефононным ветвям и щель в спектре продольных спиновых волн порядка частоты продольного ЯМР. Показано, что дипольное взаимодействие не влияет на скорость и устойчивость звуковых волн.

Исследовано влияние внешнего поля на структуру бозе-спектра в A- и B -фазах. Показано, что при включении магнитного поля число голдстоуновских мод в B -фазе не изменяется, а энергия всех нефононных мод получает добавку $\sim \mu H$.

В A -фазе число голдстоуновских мод уменьшается в магнитном поле на три за счет появления в спектре щели $\sim \mu H$, а энергия трех нефононных мод приобретает добавку того же порядка.

Автор искренне признателен В.Н.Попову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Брусов П.Н., Попов В.Н. ЖЭТФ, 1980, 78, с.2419.
2. Алонсо В., Попов В.Н. ЖЭТФ, 1977, 73, с.1445.
3. Leggett A.J., Takagi S., Ann.Phys.,1977,106,p.79.
4. Брусов П.Н., Попов В.Н. ЖЭТФ, 1980, 78, с.234.