УДК 514.76+514.12

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИНВАРИАНТОВ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ОТРАЖЕНИЯМИ

В. Ф. Игнатенко

Настоящая статья является продолжением обзоров [42], [45]. В § 1 дано краткое описание работ, в которых изучаются алгебры инвариантов конечных групп симметрий вещественного пространства E^m; попутно приведены результаты по геометрии соответствующих многогранников. Геометрическая теория базисных инвариантов конечных унитарных групп, порожденных отражениями, освещена в § 2. В § 3 на языке теории поверхностей рассмотрены проблемы строения бесконечных групп симметрий E^m и их инвариантов.

§ 1. ИНВАРИАНТЫ ГРУПП СИММЕТРИЙ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ И МНОГОГРАННИКОВ ГОССЕТА

Пусть I^G есть алгебра всех инвариантов неприводимой конечной группы G, порожденной отражениями; n_i $(i=\overline{1, m})$ — ее характеристические степени. В прямоугольных координатах x_i все $(m-1)$-мерные плоскости, отражения относительно которых принадлежат G, зададим нормированными уравнениями $\eta_k(\vec{x})=0$, где $k=\overline{1, N}$, вектор $\vec{x}=(x_i)$. Многочлены $\theta_{2s}^G(\vec{x})=\sum\limits_k \eta_k^{2s}(\vec{x})$ определяют алгебру θ^G.

Различные вопросы теории групп симметрий, их инвариантов (или близкие к ним) рассматривались в книгах [1], [5], [19], [24], [71], [77], [86], [87], [89], [90] и статьях [6]—[10], [17], [18], [23], [25], [26], [35], [37], [47], [52], [66]—[70], [76], [78]—[82], [84], [85], [88], [91]—[94], [121]—[126], [129], [131]—[133], [138], [142]—[147], [154]—[161], [163]—[165], [170], [174]—[176], [178]—[181], [184]—[186], [190], [191], [193]—[201], [203], [205], [210]—[212], [215]—[217], [219]—[221], [223], [224], [226], [227]. Приведем здесь результаты, относящиеся преимущественно к геометрии многогранников, инвариантных относительно G, и теории алгебр θ^G.

1. Диэдральная группа $[N]$ ($m=2$) порождается отражениями относительно прямых, определяемых уравнениями $x_2=0$, $x_1 \sin\frac{\pi}{N} - x_2 \cos\frac{\pi}{N}=0$. При этом $\theta_{2s}^{[N]}=\rho_s(x_1^2+x_2^2)^s$, $1 \leqslant s < N$ [42], [48]. В. А. Терновский получил указанную формулу с использованием комбинаторных тождеств (см. [45; § 1, п. 1]).

Л. П. Банникова [3] установила необходимые и достаточные условия инвариантности кубической поверхности пространства E^3 относительно каждой из групп $[N \leqslant 3]$; метод нахождения условий тот же, что и в работе [41]. К. Р. Сафиулина [109] рассмотрела образы окружности в гиперболической инверсии (аналогично можно изучить образы произвольной симметричной кривой).

2. Д. Д. Токарев, А. Б. Семковский [120], Роос [206] предложили формулу объема m-симплекса непосредственно через коэффициенты уравнений $m+1$ плоскостей, проходящих через его грани. Олговер, Шмидт [126] дали два простых метода вычисления объема ограниченного многогранника в E^m, имеющего ориентированную границу с триангуляцией во множестве $(m-1)$-симплексов; в соответствующих формулах используются только координаты вершин многогранника. Винер [225], Тальбот [218] получили аналог теоремы Пифагора для m-симплекса.

Задача нахождения значений m, при которых существуют правильные m-симплексы с целочисленными вершинами, была решена Шенбергом в 1937 г. Этот результат представляет, в частности, интерес в связи с проблемой вписывания правильного m-симплекса в m-куб [45, § 1, п. 3]. Макдональд [187] результату Шенберга придает более компактную формулировку: такие m-симплексы существуют тогда и только тогда, когда $m+1$ есть сумма квадратов 1, 2, 4 или 8 нечетных чисел.

А. С. Лейбин, А. М. Гурин [80] доказали, что в пространстве E^4 не существует однородных звездчатых многогранников с группой A_4.

Группы и алгебры Ли типа A_m изучали Д. Н. Иванов [38], Гийоя Акихико [169], Бриттен [134] (в [134] рассматриваются базисные циклы алгебр Ли A_m, B_m, C_m и D_m). При $m \leqslant 5$ В. А. Терновский [116], [119] нашел степени образующих алгебр θ^{A_m}: 2, 6 ($m=2$); 2, 4, 6 ($m=3$); 2, 4, 6, 8, 10 ($m=4$); 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 30 ($m=5$)[1].

3. Госслер Маркус [167] обсудил комбинаторную схему m-куба. Ричардс Уинстон [204] показал, что расстояние от диагонали m-куба до $(m-2)$-грани, не проходящей ни через один из концов этой диагонали, равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$ независимо от m. Сечения m-куба изучали В. А. Давиденко [33] и Балл Кейс [130][1].

В [130] установлено, что $(k-1)$-мерные сечения единичного m-куба имеют объем, не превосходящий $\sqrt{2}$ (граница точная). Аналогичная задача для k-мерных сечений при $1<k<m-1$ остается открытой. Подробные доказательства утверждений, анонсированных в заметке С. С. Рышкова и Р. М. Эрдала [108], приведены в работах [208], [209]. Ими показано, что все 4-мерные корневые фигуры аффинно эквивалентны выпуклым оболочкам некоторых подмножеств множества вершин 4-куба; при этом перечислены все 19 попарно аффинно неэквивалентных невырожденных корневых фигур.

Новое доказательство предположения Хейслейна об алгебраической независимости многочленов $\sum\limits_{r=1}^{2^m}(\overrightarrow{OV}_r, \vec{x})^{n_i}$, где V_r — вершины m-куба, дано в [53]. Минимальное значение $m>2$, при котором $I^{B_m}\neq\theta^{B_m}$, равно 12 [43]. В. А. Терновский [114] нашел степени $2s$ ($s=\overline{13,\ 24}$, 27) образующих (не всех) алгебры $\theta^{B_{12}}$.

Чой, Лэм, Резник [140] изучали геометрию инварианта $\alpha\sum\limits_i x_i^6+\beta\sum\limits_{i\neq j}x_i^4x_j^2+\gamma\sum\limits_{i<j<k}x_i^2x_j^2x_k^2$ $(i,\ j,\ k=\overline{1,\ m})$ группы B_m. Классическая и современная теория симметрических функций освещена в обзорной статье Картье [137].

4. Представления групп типа D_m рассматривал Суровский [217]. Так как $\min\{m>3\mid I^{D_m}\neq\theta^{D_m}\}=4$ [43], то, как и в случае B_m, возникает задача нахождения образующих алгебры θ^{D_4} (прежде всего). Ее решил В. А. Терновский [114]; систему образующих θ^{D_4} составляют многочлены $\theta_{2s}^{D_4}$ ($s=1,\ \overline{3,\ 8}$, 10, 12).

5. С точностью до сопряженности в аффинной группе Мартинес Доминик [188] классифицировал квазикристаллографические группы икосаэдрального типа. Госелс и Зейдель [166] рассматривали некоторые приложения теории инвариантов группы H_3.

6. Фрейденталь [162] построил модель проективной плоскости над октавами (числами Кэли) и в рамках этой теории описал особую простую группу Ли F_4 (а также G_2 и E_6). Характеристические степени 2, 8, 12, 18, 24 алгебры θ^{F_4} нашел В. А. Терновский (см. [45; § 1, п. 6]); доказательство этого результата приведено в работе [112].

7. Элвис Лин [127] вычислил явно левые и двусторонние клетки Каждана-Люстига для группы H_4.

Правильный 120-гранник может быть использован для построения 4-мерного гиперболического многообразия (например, Ф. Л. Дамиан [34]).

8. Ко Ин-Гау, Патера, Руссо [182] вычислили коэффициенты Клебша-Гордана тензорного произведения двух экземпляров тождественного представления группы E_6 в базисах весовых векторов.

Для получения образующих нечетных степеней 5 и 9 алгебры I^{E_6} может быть применен дифференциальный оператор

$$\Delta=\sum u_p(v_q-v_r)\frac{\partial}{\partial v_p}+\frac{1}{6}\sum u_p(u_q-u_r)\frac{\partial}{\partial u_p}-$$
$$-\sum u_p v_q(v_q-v_r)\frac{\partial^2}{\partial v_p\partial v_q}-\frac{1}{2}\sum\left[v_p^2(u_q-u_r)-\right.$$
$$\left.-\frac{5}{2}u_p\left(v_q^2-v_r^2\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial v_p^2},$$

где $u_p=3x_\beta^2x_\alpha-x_\alpha^3$, $v_p=x_\alpha^2+x_\beta^2$; индексы p, q, r циклически принимают значения 1, 2, 3, причем $(\alpha\beta)=(12)$, (34), (56) соответственно $p=1$, 2, 3 [45; § 2, п. 1]. В. А. Терновский [115] установил следующую особенность Δ: каждая из образующих четных степеней алгебр I^{E_6} и θ^{E_6} не представима в виде Δf (инвариант $f\in I^{E_6}$).

9. Д. А. Гудков, Г. Ф. Небукина [27]—[30] продолжали изучать кривые четвертого порядка с точками перегиба и бикасательными (группа автоморфизмов 28 бикасательных такой кривой определяет E_7); в работах [31], [32] исследуются кривые с мнимыми особыми точками. Деризиотис [153] описал строение централизаторов полупростых элементов групп E_7 и E_8. В [51] рассмотрены связи между инвариантами групп F_4, E_6 и E_7. В. А. Терновский [118] использовал [51] для явного нахождения линейных преобразований, произведение которых произвольный инвариант E_8 отображает в некоторый инвариант E_7.

10. Капс [136] изложил алгоритм определения класса Вейля для алгебры E_8, в котором веса рассматриваются в базисе корней подалгебры D_8. В работе [49] приведено доказательство алгебраической независимости многочленов $\theta_{n_i}^{E_8}$ $(i=\overline{1,8})$ с помощью найденных А. Островским представлений симметрической формы через степенные суммы. Новым способом (на основании [118]) этот результат получил В. А. Терновский [117]. Он же [113] установил одно свойство специальных базисных инвариантов степеней 24 и 30 группы E_8, полученных в [43; п. 3].

§ 2. ИНВАРИАНТЫ УНИТАРНЫХ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ОТРАЖЕНИЯМИ

Пусть в m-мерном унитарном пространстве U^m задана координатная система с началом O и ортонормированным базисом $\vec{e}_i$ $(i=\overline{1,m})$, вектор $\vec{x}=(x_i)$; $\mathfrak{G}$ есть неприводимая конечная группа, порожденная отражениями относительно $(m-1)$-мерных плоскостей.

В работах [42], [45] на основе многочленов Погорелова θ_{2s}^{G} построена геометрическая теория инвариантов групп G в пространстве E^m. При этом естественно возникают задачи, связанные с перенесением результатов этой теории на случай пространства U^m. Одну из таких задач поставил В. Ф. Игнатенко (см. [64], [69]): применить в пространстве U^m многочлены вида θ_{2s}^{G} для нахождения образующих алгебр $I^{\mathfrak{G}}$ инвариантов групп $\mathfrak{G} \neq G$. Другими словами — найти все образующие алгебр $I^{\mathfrak{G}}$ вида

$$I_{2s}^{\mathfrak{G}}(\vec{x}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}} (\vec{x}, \sigma\vec{n})^{2s}, \tag{1}$$

где σ есть отражения относительно плоскостей симметрии, $\vec{n}$ — единичный вектор нормали (с началом O) одной из них; коллинеарные векторы не различаются. Эту задачу решил О. И. Рудницкий [96]—[106]; его результаты здесь будут приведены.

Введем следующие обозначения: N_α — число всех плоскостей, отражения порядка α относительно которых принадлежат $\mathfrak{G}$; число всех отражений равно $(\alpha-1)N_\alpha$; $N = \sum\limits_{\alpha} N_\alpha$, $H^{\mathfrak{G}} = \{|\mathfrak{G}|, N_\alpha, \ldots; n_1, \ldots, n_m\}$ (n_i есть степени базисных инвариантов $\mathfrak{G}$), $M^{\mathfrak{G}} = \{\sigma\vec{n} \mid \sigma \in \mathfrak{G}\}$; $C_\alpha^{\mathfrak{G}}$ — множество плоскостей симметрии, определяющих отражения порядка α (порождающие элементы $\mathfrak{G}$) $A_{2s}^{\mathfrak{G}}$, $B_{2s}^{\mathfrak{G}}$, $C_{2s}^{\mathfrak{G}}$ — многочлены вида (1), построенные соответственно на основе $\mathfrak{G}$-инвариантных подмножеств $\mathfrak{A}_\beta$, $\mathfrak{B}_\beta$, $\mathfrak{C}_\beta$ (индекс β зависит от $\mathfrak{G}$) множества плоскостей симметрии, т. е., например, $\mathfrak{A}_{2s}^{\mathfrak{G}}(\vec{x}) = \sum\limits_{\vec{n}_0 \in \mathfrak{A}_\beta} (\vec{x}, \vec{n}_0)^{2s}$.

1. Рассмотрим первоначально случай $m=2$. Существуют три типа групп $\mathfrak{G}$: тетраэдральные — T_N, октаэдральные — O_N, икосаэдральные — I_N (Шепард и Тодд [214]). Имеют место такие два утверждения (Кокстер [150]):

Предложение А. Если $\mathfrak{G}$ есть группа симметрий правильного комплексного многоугольника $p_1(q)p_2$, то $\mathfrak{G}$ порождена отражениями порядков p_1 и p_2 относительно осей симметрии с уравнениями $x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi = 0$ и $x_2 = 0$ соответственно, где

$$\cos 2\varphi = \frac{\cos\frac{\pi}{p_1}\cos\frac{\pi}{p_2} + \cos\frac{2\pi}{q}}{\sin\frac{\pi}{p_1}\sin\frac{\pi}{p_2}}.$$

Предложение В. Пусть комплексное число $\theta = \cos\frac{\pi}{p} + \varepsilon\sin\frac{\pi}{p}$ и кватернион $P = \cos\frac{\pi}{p} + (\alpha\varepsilon + \beta\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2)\sin\frac{\pi}{p}$

($\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, $\varepsilon^2=\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=-1$). Тогда преобразование $\theta x P$ ($x=x_1+\varepsilon_1 x_2$) задает на унитарной плоскости отражение порядка p относительно оси с уравнением $(\alpha+1)x_1+(\gamma+\beta\varepsilon)x_2=0$.

Тетраэдральные группы T_N состоят из групп симметрий правильных комплексных многоугольников 3(3)3, 3(4)3, 3(6)2 ($N=4$, 8, 10 соответственно) и группы T_{14}, порожденной тремя отражениями (Шепард и Тодд [214]).

1.1. Согласно предложению А, множество $C_3^{T_4}=\{x_2=0, \sqrt{2}\,x_1+x_2=0\}$; $H^{T_4}=\{24,\ N_3=N=4;\ 4,\ 6\}$ (Кокстер [150], Шепард и Тодд [214]), $M^{T_4}=\left\{\pm\omega^t\vec{e}_2,\ \pm\omega^t\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\vec{e}_1+\varepsilon\frac{\omega^h}{\sqrt{3}}\vec{e}_2\right)\right\}$, $h, t=1, 2, 3$; ω есть первообразный корень третьей степени из единицы. Базисные инварианты группы T_4 получил Пуанкаре [95]. Форма $I_4^{T_4}\equiv 0$, поскольку $\sum\limits_{t=1}^{3}\omega^{4t}=0$. Инвариант $I_6^{T_4}=x_1^6+x_2^6-5\sqrt{2}\,\varepsilon x_1^3x_2^3$.

Здесь $I_6^{T_4}$ и инварианты всех других групп $\mathfrak{G}$ задаются с точностью до постоянного множителя.

1.2. Множество $C_3^{T_8}=\{x_2=0,\ x_1+\sqrt{2}\,x_2=0\}$; $H^{T_8}=\{72,\ N_3=N=8;\ 6,\ 12\}$ (Кокстер [150], Шепард и Тодд [214]), $M^{T_8}=\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{B}_1$, где $\mathfrak{A}_1=M^{T_4}$ и $\mathfrak{B}_1=\left\{\pm\omega^t\vec{e}_1,\ \pm\omega^t\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\vec{e}_1+\omega^h\sqrt{\frac{2}{3}}\,\vec{e}_2\right)\right\}$. При этом $A_6^{T_8}=B_6^{T_8}=I_6^{T_4}$, $A_{12}^{T_8}=I_{12}^{T_4}=16x_1^{12}+61x_2^{12}-110\sqrt{2}\,\varepsilon x_1^3x_2^3(8x_1^6-x_2^6)-1848x_1^6x_2^6$, $B_{12}^{T_8}=61x_1^{12}+16x_2^{12}-110\sqrt{2}\,\varepsilon x_1^3x_2^3(x_1^6-8x_2^6)-1848x_1^6x_2^6$. Формы $I_6^{T_4}$ и $I_{12}^{T_4}$ являются образующими алгебры I^{T_8}; $B_{12}^{T_8}=77(I_6^{T_4})^2-I_{12}^{T_4}$.

1.3. Группа $T_{10}\supset T_4$; $C_2^{T_{10}}=\{x_2=0\}$, $C_3^{T_{10}}=\{\vartheta_1x_1+\vartheta_2x_2=0\}$, где ось $C_3^{T_{10}}$ определена нормированным уравнением, причем $\vartheta_1=\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$ и $\vartheta_2=\frac{\sqrt{3+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$ (Кокстер [150]); $H^{T_{10}}=\{48,\ N_2=6,\ N_3=4;\ 4,\ 12\}$ (Шепард и Тодд [214]). Множество $M^{T_{10}}=\mathfrak{A}_2\cup\mathfrak{B}_2$;

$$\mathfrak{A}_2=\left\{\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}}\,\varepsilon^h\vec{e}_\mu,\ \frac{\varepsilon^h}{\sqrt{2}}(\omega^\mu\vec{e}_1\pm\omega^\mu\varepsilon^{\mu+1}\vec{e}_2)\right\},$$

$$\mathfrak{B}_2=\left\{\omega^t\varepsilon^h\left(\vartheta_1\vec{e}_\mu\pm\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}}\,\vartheta_2\vec{e}_\nu\right)\right\},$$

$h=\overline{1,4}$, $t=1, 2, 3$ и $\mu, \nu=1, 2$ ($\mu\neq\nu$).

Векторы $\mathfrak{A}_2$ задают все 24 вершины многоугольника 3(6)2 (Кокстер [150]).

Инвариант $I_4^{T_{10}}=A_4^{T_{10}}=x_1^4+x_2^4+2\sqrt{3}\varepsilon x_1^2x_2^2$, $B_4^{T_{10}}\equiv 0$ (на основании $\left.\sum_{t=1}^{3}\omega^{4t}=0\right)$, $A_{12}^{T_{10}}=x_1^{12}+x_2^{12}-33x_1^4x_2^4(x_1^4+x_2^4)$, $B_{12}^{T_{10}}=$ $=5\sqrt{3}\,(x_1^{12}+x_2^{12})-154\varepsilon(x_1^{10}x_2^2+x_1^2x_2^{10})-165\sqrt{3}\,(x_1^8x_2^4+x_1^4x_2^8)+$ $+308\varepsilon x_1^6x_2^6$. Каждая из пар $A_4^{T_{10}}$, $B_{12}^{T_{10}}$ и $I_4^{T_{10}}$, $I_{12}^{T_{10}}=A_{12}^{T_{10}}+B_{12}^{T_{10}}$ образует систему базисных инвариантов T_{10}.

Формулы $x_1'=-\vartheta_2\varepsilon x_1+\vartheta_1x_2$, $x_2'=\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}}(\vartheta_1\varepsilon x_1+\vartheta_2x_2)$ определяют унитарное преобразование, которое M^{T_4} (п. 1.1) переводит в множество $M_0^{T_4}=\left\{\pm\omega^t\left(\vartheta_1\vec{e}_\mu+\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}}(-1)^\nu\vartheta_2\vec{e}_\nu\right),\ \pm\omega^t\varepsilon\left(\vartheta_1\vec{e}_\mu+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}}(-1)^\mu\vartheta_2\vec{e}_\nu\right)\right\}$, $\mu,\nu=1,2$ $(\mu\neq\nu)$, $t=1,2,3$; ср. с $\mathfrak{B}_2$. Так как $T_4\subset T_{10}$, то $A_4^{T_{10}}$ — образующая I^{T_4}. Форма $I_6^{T_4}=$ $=\sum_{\vec{n}_0\in M_0^{T_4}}(\vec{x},\vec{n}_0)^6=x_1x_2(x_1^4-x_2^4)$ — образующая I^{T_4} и относительный инвариант T_{10}. Далее, $I_6^{T_4}$ и $A_{12}^{T_{10}}$ — система базисных инвариантов T_8.

Другой способ нахождения базисных инвариантов групп симметрий правильных комплексных многоугольников привел Кокстер [150] (см. также [183], [214]); системы базисных инвариантов групп T_4, T_8, T_{10} образуют, соответственно, следующие пары форм: $\Phi=A_4^{T_{10}}$, $f=I_6^{T_4}$; f, Φ^3; Φ, f^2.

1.4. Множество $H^{T_{14}}=\{144, N_2=6, N_3=8;\ 12, 12\}$ (Шепард и Тодд [214]); $C_2^{T_{14}}=C_2^{T_{10}}=\{x_2=0\}$, $C_3^{T_{14}}=\left\{\vartheta_2x_1-\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2}}\varepsilon^l\vartheta_1x_2=0\right\}$, $l=1,4$. Пусть s_t $(t=1,2,3)$ есть отражения относительно осей $C_2^{T_{14}}$, $C_3^{T_{14}}$ соответственно. На основании предложения В их можно записать так: $\varepsilon x(-\varepsilon)$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon\right)x\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\right.$ $\left.\times\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}-\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{3}}+\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{3}}\right)\right)$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon\right)x\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}-\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{3}}-\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{3}}\right)\right)$. При этом s_2, s_3 порождают группу T_8, а любая из пар s_2, s_3 и s_1, s_3 — группу T_{10} (Крове [152]). Множество $M^{T_{14}}=\mathfrak{A}_3\cup\mathfrak{B}_3\cup\mathfrak{C}_3$, где $\mathfrak{A}_3=\omega^t\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_3=\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2}}\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_3=\left\{\omega^t\varepsilon^h\left(\vartheta_2\vec{e}_\mu\pm\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}}\vartheta_1\vec{e}_\nu\right)\right\}$ $(\mathfrak{C}_1=$ $=\mathfrak{C}_2=\varnothing)$; запись, скажем, $\omega^t\mathfrak{A}_2$ означает, что $\mathfrak{A}_3$ состоит из векторов $\mathfrak{A}_2$, умноженных на ω^t.

Имеют место следующие соотношения: $B_{12}^{T_{14}}=B_{12}^{T_{10}}$, $A_{12}^{T_{14}}=$ $=A_{12}^{T_{10}}$, $C_{12}^{T_{14}}=5\sqrt{3}\,(x_1^{12}+x_2^{12})+154\varepsilon(x_1^{10}x_2^2+x_1^2x_2^{10})-165\sqrt{3}\,\times$ $\times(x_1^8x_2^4+x_1^4x_2^8)-308\varepsilon x_1^6x_2^6$, $I_{12}^{T_{14}}=A_{12}^{T_{14}}+B_{12}^{T_{14}}+C_{12}^{T_{14}}$, $C_{12}^{T_{14}}=$

$=10\sqrt{3}A_{12}^{T_{14}}-B_{12}^{T_{14}}$. Любые две из форм $A_{12}^{T_{14}}$, $B_{12}^{T_{14}}$, $C_{12}^{T_{14}}$ являются образующими алгебры $I^{T_{14}}$.

Шепард и Тодд [214] нашли образующие $I^{T_{14}}$ вида Φ^3, f^2 (п. 1.3).

Перейдем к рассмотрению октаэдральных групп O_N. Они состоят из групп симметрий правильных комплексных многоугольников 4(3)4, 4(4)3, 4(6)2, 3(8)2 ($N=6$, 14, 18, 20 соответственно) и групп O_{12}, O_{26}, O'_{18}, O'_{26}, порожденных тремя отражениями (Шепард и Тодд [214]).

1.5. На основании предложения А множество $C_4^{O_6}=\{x_2=0,\ x_1+x_2=0\}$; $H^{O_6}=\{96,\ N_2=N_4=N=6;\ 8,\ 12\}$ (Шепард и Тодд [214]); $M^{O_6}=\left\{\varepsilon^h\eta\vec{e}_\mu,\ \frac{\varepsilon^h}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1\pm\varepsilon^\mu\vec{e}_2)\right\}$, $h=\overline{1,4}$ и $\mu=1,2$; η есть первообразный корень восьмой степени из единицы.

Инварианты $I_8^{O_6}=x_1^8+x_2^8+14x_1^4x_2^4$ и $I_{12}^{O_6}=A_{12}^{T_{10}}$ — образующие алгебры I^{O_6}. Кокстер [150] их нашел другим способом (его обозначения: $W=I_8^{O_6}$, $\chi=I_{12}^{O_6}$).

1.6. Множество $H^{O_{12}}=\{48,\ N_2=N=12;\ 6,\ 8\}$ (Шепард и Тодд [214]); $C_2^{O_{12}}=\{\rho_2x_1+\rho_1\varepsilon x_2=0,\ \rho_1x_1-\rho_2x_2=0,\ x_1-\bar{\eta}x_2=0\}$, где $\rho_1=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\rho_2=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Пусть s'_t ($t=1,2,3$) есть отражения относительно (соответственно) осей, составляющих $C_2^{O_{12}}$. Тогда каждая из пар s'_1, s'_2 и s'_1, s'_3 (пара s'_2, s'_3) порождает группу симметрий правильного треугольника (шестиугольника) (Крове [152]).

Унитарное преобразование ψ, определяемое формулами $x'_1=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(\bar{\tau}x_1+\tau x_2)$ и $x'_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\tau}x_1-\tau x_2)$, переводит множество $M^{O_{12}}$ в $\pm\tau M_0^{O_{12}}$ при $t=3$, где $M_0^{O_{12}}=\left\{\omega^t\vec{e}_\mu,\ \omega^t\left(\frac{1}{2}\vec{e}_\mu\pm\frac{1\pm\sqrt{2}\,\varepsilon}{2}\vec{e}_\nu\right),\ \frac{\omega^t\varepsilon}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1\pm\vec{e}_2)\right\}$, τ есть первообразный корень 16-й степени из единицы. Поэтому образующими алгебры $I^{O_{12}}$ будут формы $I_6^{O_{12}}=x_1^6+x_2^6-5(x_1^4x_2^2+x_1^2x_2^4)$ и $I_8^{O_{12}}=3(x_1^8+x_2^8)+28(x_1^6x_2^2+x_1^2x_2^6)-14x_1^4x_2^4$.

1.7. Группа O_{14} является группой симметрий многоугольника 3(4)4, двойственного 4(4)3 (Кокстер [150]). Множество $H^{O_{14}}=\{288,\ N_3=8,\ N_4=6;\ 12,\ 24\}$ (Шепард и Тодд [214]); $C_3^{O_{14}}=C_3^{T_{10}}$ (п. 1.3), $C_4^{O_{14}}=C_2^{T_{14}}=\{x_2=0\}$; $M^{O_{14}}=\mathfrak{A}_4\cup\mathfrak{B}_4$, где $\mathfrak{A}_4=\omega^hM^{O_6}$, $\mathfrak{B}_4=\eta\mathfrak{B}_2\cup\mathfrak{C}_3$.

Далее, $A_{12}^{O_{14}}=B_{12}^{O_{14}}=I_{12}^{O_6}=I_{12}^{O_{14}}$; $A_{24}^{O_{14}}=1025(x_1^{24}+x_2^{24})+10\,626(x_1^{20}x_2^4+x_1^4x_2^{20})+735\,471(x_1^{16}x_2^8+x_1^8x_2^{16})+2\,704\,156x_1^{12}x_2^{12}$, $B_{24}^{O_{14}}=193(x_1^{24}+x_2^{24})-147\,246(x_1^{20}x_2^4+x_1^4x_2^{20})+735\,471(x_1^{16}x_2^8+$

$+x_1^8x_2^{16})-386\,308x_1^{12}x_2^{12}$. Базисными инвариантами являются $I_{12}^{O_{14}}$ и любая из форм $A_{24}^{O_{14}}$, $B_{24}^{O_{14}}$.

1.8. Многоугольник 2(6)4, двойственный 4(6)2, инвариантен относительно группы O_{18} (Кокстер [150]); $\mathbf{C}_2^{O_{18}}=\{\rho_1x_1+\rho_2x_2=0\}$, $\mathbf{C}_4^{O_{18}}=\mathbf{C}_4^{O_{14}}=\{x_2=0\}$; $H^{O_{18}}=\{192,\ N_2=12,\ N_4=6;\ 8,\ 24\}$ (Шепард и Тодд [214]). Множество $M^{O_{18}}=\mathfrak{A}_5\cup\mathfrak{B}_5$; $\mathfrak{A}_5=\eta^lM^{O_6}$ $(l=\overline{1,8})$ (п. 1.5) и $\mathfrak{B}_5=\left\{\tau\frac{\eta^l}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\mu\pm\eta\vec{e}_\nu),\ \eta^l(\rho_2\vec{e}_\mu+\varepsilon^h\rho_1\vec{e}_\nu)\right\}$, $h=\overline{1,4}$, $\mu,\nu=1,2$ $(\mu\neq\nu)$.

Форма $A_8^{O_{18}}=B_8^{O_{18}}=I_8^{O_{18}}=I_8^{O_6}$, $A_{24}^{O_{18}}=A_{24}^{O_{14}}$, $B_{24}^{O_{18}}=593(x_1^{24}+x_2^{24})+$ $+196\,098(x_1^{20}x_2^4+x_1^4x_2^{20})-334\,305(x_1^{16}x_2^8+x_1^8x_2^{16})+2\,704\,156x_1^{12}x_2^{12}$. При этом $I_8^{O_{18}}$ и любая из форм $A_{24}^{O_{18}}$, $B_{24}^{O_{18}}$ — образующие алгебры $I^{O_{18}}$. Кокстер [150] привел образующие W и χ^2:

$$W=I_8^{O_{18}},\quad 14\,266\chi^2=19\,603\left(I_8^{O_{18}}\right)^3-9B_{24}^{O_{18}}.$$

1.9. Если s_t'' $(t=1,2,3)$ — отражения относительно (соответственно) осей, составляющих множество $\mathbf{C}_2^{O_{18}'}=\{\rho_2x_1+\rho_1\varepsilon x_2=0,\ \rho_1x_1-\rho_2x_2=0,\ x_1+\varepsilon x_2=0\}$, то s_1'', s_3'' порождают группу симметрий квадрата, а пары s_1'', s_2'' и s_2'', s_3'' — группы симметрий правильных треугольника и восьмиугольника (Крове [152]). Множество $H^{O_{18}'}=\{96,\ N_2=N=18;\ 8,\ 12\}$ (Шепард и Тодд [214]); $\psi\left(M^{O_{18}'}\right)=\pm\eta M_2^{O_{12}}$ (при $t=3$) $\cup\left\{\eta^l(\rho_2\vec{e}_\mu\pm\rho_1\vec{e}_\nu),\ \frac{\tau\eta^l}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1\pm\varepsilon\vec{e}_2)\right\}$.

Формы $I_8^{O_{18}'}=I_8^{O_{12}}$ и $I_{12}^{O_{18}'}=x_1^{12}+x_2^{12}-10(x_1^{10}x_2^2+x_1^2x_2^{10})+$ $+15(x_1^8x_2^4+x_1^4x_2^8)+52x_1^6x_2^6$ являются базисными инвариантами.

1.10. Множество $H^{O_{20}}=\{144,\ N_2=12,\ N_3=8;\ 6,\ 24\}$ (Кокстер 150], Шепард и Тодд [214]); $\mathbf{C}_2^{O_{20}}=\mathbf{C}_4^{O_{18}}=\{x_2=0\}$, $\mathbf{C}_3^{O_{20}}=$ $=\{\sigma_1x_1+\sigma_2x_2=0\}$, где $\sigma_1=\frac{\sqrt{3-\sqrt{6}}}{\sqrt{6}}$, $\sigma_2=\frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{6}}$. Далее, $M^{O_{20}}=\mathfrak{A}_6\cup\mathfrak{B}_6$; $\mathfrak{A}_6=\left\{\omega^t(\sigma_1\varepsilon\vec{e}_\mu\pm\sigma_2\vec{e}_\nu),\ \frac{\omega^t}{\sqrt{6}}(\rho\vec{e}_\mu\pm\bar{\rho}\vec{e}_\nu)\right\}$, $\rho=$ $=\frac{\sqrt{3-\sqrt{6}}+\sqrt{3+\sqrt{6}}\,\varepsilon}{\sqrt{2}}$ и $\mathfrak{B}_6=M_0^{O_{12}}$ (п. 1.6). Векторы $\mathfrak{B}_6$ определяют все 72 вершины многоугольника 3(8)2 (Кокстер [150]).

Запишем в развернутом виде следующие инварианты:

$$I_6^{O_{20}}=A_6^{O_{20}}=B_6^{O_{20}}=I_6^{O_{12}},\quad A_{24}^{O_{20}}=36\,627(x_1^{24}+x_2^{24})-$$
$$-922\,668(x_1^{22}x_2^2+x_1^2x_2^{22})+3\,760\,086(x_1^{20}x_2^4+x_1^4x_2^{20})-$$
$$-10\,633\,084(x_1^{18}x_2^6+x_1^6x_2^{18})-27\,212\,427(x_1^{16}x_2^8+x_1^8x_2^{16})+$$

$$+33\,341\,352\,(x_1^{14}x_2^{10}+x_1^{10}x_2^{14})+141\,002\,420x_1^{12}x_2^{12},$$

$$B_{24}^{O_{20}}=58\,809\,(x_1^{24}+x_2^{24})-407\,652\,(x_1^{22}x_2^2+x_1^2x_2^{22})+$$
$$+9\,523\,794\,(x_1^{20}x_2^4+x_1^4x_2^{20})+893\,228\,(x_1^{18}x_2^6+x_1^6x_2^{18})-$$
$$-43\,660\,233\,(x_1^{16}x_2^8+x_1^8x_2^{16})+98\,597\,688\,(x_1^{14}x_2^{10}+x_1^{10}x_8^{14})+$$
$$+110\,870\,396x_1^{12}x_2^{12}.$$

Образующими алгебры $I^{O_{20}}$ являются $I_6^{O_{20}}$ и $B_{24}^{O_{20}}$. Форма $593A_{24}^{O_{20}}=31\,290\,948\,(I_6^{O_{20}})^4-193B_{24}^{O_{20}}$.

1.11. Группа O_{26} порождается такими отражениями o_t $(t=1, 2,3)$: $\varepsilon x\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}-\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon\right)x\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}+\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{3}}+\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{3}}\right)\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$; o_2 и o_3, o_1 и o_3, o_1 и o_2 задают группы O_{14}, O_{18}, O_{20} соответственно (Крове [152]). Согласно предложению В, $C_2^{O_{26}}=\{\rho_2x_1-\rho_1\varepsilon x_2=0\}$, $C_3^{O_{26}}=\{\vartheta_2x_1+\bar{\eta}\vartheta_1x_2=0\}$, $C_4^{O_{26}}=\{x_1=0\}$; $H^{O_{26}}=\{576,\ N_2=12,\ N_3=8,\ N_4=6;\ 24,\ 24\}$ (Шепард и Тодд [214]). Множество $M^{O_{26}}=\mathfrak{A}_7\cup\mathfrak{B}_7\cup\mathfrak{C}_7$; $\mathfrak{A}_7=\eta^l\omega^tM^{O_6}$ $(l=\overline{1,8})$, $\mathfrak{B}_7=\omega^t\eta^l(\vartheta_1\vec{e}_\mu+\varepsilon^h\eta\vartheta_1\vec{e}_\nu)$, $\mathfrak{C}_7=\left\{\omega^t\eta^l\,(\rho_2\vec{e}_\mu+\varepsilon^h\rho_1\vec{e}_\nu),\ \eta^l\frac{\omega^t\tau}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\mu\pm\eta\vec{e}_\nu)\right\}$, $h=\overline{1,4}$ и $\mu,\nu=1,2$ $(\mu\neq\nu)$; $\mathfrak{C}_3=\ldots=\mathfrak{C}_6=\varnothing$.

При этом $A_{24}^{O_{26}}=A_{24}^{O_{18}}$, $B_{24}^{O_{26}}=B_{24}^{O_{14}}$, $C_{24}^{O_{26}}=B_{24}^{O_{18}}$, $I_{24}^{O_{26}}=A_{24}^{O_{26}}+B_{24}^{O_{26}}+C_{24}^{O_{26}}$. В качестве образующих алгебры $I^{O_{26}}$ можно взять любые две из форм $A_{24}^{O_{26}}$, $B_{24}^{O_{26}}$, $C_{24}^{O_{26}}$.

Шепард и Тодд [214] доказали, что образующие $I^{O_{26}}$ представимы в виде W^3 и χ^2 (п. 1.5).

1.12. Множество $H^{O'_{26}}=\{228,\ N_2=18,\ N_3=8;\ 12,\ 24\}$ (Шепард и Тодд [214]); $C_2^{O'_{26}}=\{\rho_2x_1+\rho_1\varepsilon x_2=0,\ x_2=0\}$, $C_3^{O'_{26}}=\{\vartheta_2x_1+\bar{\eta}\vartheta_1x_2=0\}$.

Пусть o'_t $(t=1,2,3)$ есть отражения относительно (соответственно) прямых, составляющих $C_2^{O'_{26}}$, $C_3^{O'_{26}}$. Тогда o'_1, o'_2 порождают группу симметрий правильного восьмиугольника, а o'_1, o'_3 и o'_2, o'_3 — группы симметрий многоугольников $3(8)2$ и $3(6)2$ (Крове [152]). С помощью преобразования ψ (п. 1.6) множество $M^{O'_{26}}$ можно представить как объединение $\mathfrak{A}_8=\bar{\tau}\varepsilon^h\mathfrak{A}_6$, $\mathfrak{B}_8=\varepsilon^h\mathfrak{B}_6$ и $\mathfrak{C}_8=\omega^t\left\{\psi\left(M^{O'_{18}}\right)\setminus\pm\eta M_0^{O_{12}}\,(t=3)\right\}$.

Имеем: $A_{12}^{O'_{26}}=B_{12}^{O'_{26}}=I_{12}^{O'_{26}}=I_{12}^{O_6}$, $C_{12}^{O'_{26}}\equiv 0$ $\left(\text{так как } \sum_{l=1}^{8}\eta^{12l}=0\right)$,

$$A_{24}^{O'_{26}} = A_{24}^{O_{20}}, \quad C_{24}^{O'_{26}} = B_{24}^{O_{20}},$$

$$B_{24}^{O'_{26}} = 19\,569\,(x_1^{24} + x_2^{24}) + 937\,020\,(x_1^{22}x_2^2 + x_1^2x_2^{22}) +$$
$$+ 5\,791\,170\,(x_1^{20}x_2^4 + x_1^4x_2^{20}) + 17\,632\,076\,(x_1^{18}x_2^6 + x_1^6x_2^{18}) -$$
$$- 1\,103\,2065\,(x_1^{16}x_2^8 + x_1^8x_2^{16}) + 68\,643\,960\,(x_1^{14}x_2^{10} + x_1^{10}x_2^{14}) -$$
$$- 83\,828\,836x_1^{12}x_2^{12},$$

$$593B_{24}^{O'_{26}} = 1\,025C_{24}^{O'_{26}} - 48\,674\,808\,(I_{12}^{O_8})^2.$$

Образующими алгебры $I^{O'_{26}}$ являются инварианты $I_{12}^{O_8}$ и $A_{24}^{O'_{26}}$.

Таким образом, по формуле (1) можно построить все образующие алгебр I^{T_N} $(N \neq 4,8)$, I^{O_N} и только образующие шестой степени алгебр I^{T_4}, I^{T_8} (О. И. Рудницкий [103]).

Кокстер [150], Шепард и Тодд [214] получили образующие алгебр $I^{\mathfrak{G}}$ $(\mathfrak{G} = O_{12}, O_{20}, O'_{18}, O'_{26})$ иным способом и в другой системе координат.

Пусть теперь $\mathfrak{G} = I_N$. Эти группы состоят из групп симметрий правильных комплексных многоугольников 5(3)5, 3(5)3, 5(4)3, 5(6)2, 3(10)2 ($N=12$, 20, 32, 42, 50 соответственно) и групп I_{30}, I_{62}, порожденных тремя отражениями (Шепард и Тодд [214]).

1.13. Многоугольник 5(3)5 имеет 120 вершин; $H^{I_{12}} = \{600,\ N_5 = N = 12;\ 20,\ 30\}$ (Кокстер [150], Шепард и Тодд [214]), $C_5^{I_{12}} = \{x_2 = 0,\ \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 = 0\}$, $\tau_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$, $\tau_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ (см. предложение А). Множество $M^{I_{12}} = \{\pm \eta_0^l \varepsilon \vec{e}_\mu,\ \pm \eta_0^l (\tau_1 \vec{e}_\mu + (-1)^\nu \eta_0^k \tau_2 \vec{e}_\nu\}$, $\mu, \nu = 1, 2$ $(\mu \neq \nu)$, $k, l = \overline{1, 5}$, η_0 — первообразный корень пятой степени из единицы. Поэтому

$$I_{20}^{I_{12}} = x_1^{20} + x_2^{20} - 228x_1^5x_2^5(x_1^{10} - x_2^{10}) + 494x_1^{10}x_2^{10},$$

$$I_{30}^{I_{12}} = x_1^{30} + x_2^{30} + 522x_1^5x_2^5(x_1^{20} - x_2^{20}) - 10\,005x_1^{10}x_2^{10}(x_1^{10} + x_2^{10}).$$

Указанные инварианты являются образующими алгебры $I^{I_{12}}$.

1.14. Множество $H^{I_{20}} = \{360,\ N_3 = N = 20;\ 12,\ 30\}$ (Шепард и Тодд [214]); $C_3^{I_{20}} = \{x_2 = 0,\ \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 = 0\}$, где $\eta_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}$, $\eta_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}$. Все 120 вершин многоугольника 3(5)3 определяются векторами $M^{I_{20}} = \{\pm \omega^t \varepsilon \vec{e}_\mu,\ \pm \omega^t (\eta_1 \vec{e}_\mu + (-1)^\nu \eta_2 \omega^h \vec{e}_\nu),\ \pm \omega^t \left(\frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{3}\varepsilon}{2\sqrt{3}} \vec{e}_\mu + \frac{(-1)^\mu}{\sqrt{3}} \omega^h \vec{e}_\nu\right)\}$, $h, t = 1, 2, 3$ (Кокстер [150]).

Формы $I_{12}^{I_{20}}$, $I_{30}^{I_{20}}$ — базисные инварианты. Они имеют следующий развернутый вид:

$$I_{12}^{I_{20}} = x_1^{12} + x_2^{12} - 11\sqrt{5}\,(x_1^9 x_2^3 - x_1^3 x_2^9) - 33 x_1^6 x_2^6,$$

$$I_{30}^{I_{20}} = 8\,(x_1^{30} + x_2^{30}) + 580\sqrt{5}\,(x_1^{27} x_2^3 - x_1^3 x_2^{27}) +$$
$$+ 3915\,(x_1^{24} x_2^6 + x_1^6 x_2^{24}) + 20\,010\sqrt{5}\,(x_1^{21} x_2^9 - x_1^9 x_2^{21}) -$$
$$- 190\,095\,(x_1^{18} x_2^{12} + x_1^{12} x_2^{18}).$$

1.15. Пусть o_t'' $(t=1, 2, 3)$ есть отражения относительно (соответственно) прямых множества $C_2^{I_{30}} = \left\{x_1 = 0,\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} x_1 + \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \gamma^\alpha x_2 = 0\right\}$, где $\alpha = \pm 1$ и $\gamma = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}} + \sqrt{5+\sqrt{5}}\,\varepsilon}{\sqrt{10}}$ (Кокстер [150]). Тогда любая из пар o_1'', o_2'' и o_1'', o_3'' (пара o_2'', o_3'') порождает группу симметрий правильного пятиугольника (шестиугольника) (Крове [152]). Множество $H^{I_{30}} = \{240,\ N_2 = N = 30;\ 12,\ 20\}$ (Шепард и Тодд [214]);

$$M^{I_{30}} = \left\{\varepsilon^h \vec{e}_\mu,\ \varepsilon^h \left(\frac{\sqrt{5}\pm 1}{4} \vec{e}_\mu + \frac{\sqrt{5\mp\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \beta\gamma^\alpha \vec{e}_\nu\right),\right.$$
$$\left.\frac{1-\varepsilon}{2} \varepsilon^h (\vec{e}_1 \pm \varepsilon^\mu \vec{e}_2),\ \varepsilon^h \left(\frac{1}{2} \vec{e}_\mu \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \theta^\alpha \vec{e}_\nu\right)\right\},$$

$$\theta = \frac{\sqrt{5}+1+(\sqrt{5}-1)\,\varepsilon}{2\sqrt{3}};\quad \mu, \nu = 1, 2\ (\mu \neq \nu),\quad h = \overline{1, 4},\quad \beta = \pm 1.$$

Инварианты $I_{12}^{I_{30}}$, $I_{20}^{I_{30}}$ образуют базис алгебры $I^{I_{30}}$. При этом

$$I_{12}^{I_{30}} = 5\,(x_1^{12} + x_2^{12}) - 22\sqrt{5}\,(x_1^{10} x_2^2 + x_1^2 x_2^{10}) -$$
$$- 165\,(x_1^8 x_2^4 + x_1^4 x_2^8) + 44\sqrt{5}\,x_1^6 x_2^6,$$

$$I_{20}^{I_{30}} = 3\,(x_1^{20} + x_2^{20}) + 38\sqrt{5}\,(x_1^{18} x_2^2 + x_1^2 x_2^{18}) - 57\,(x_1^{16} x_2^4 + x_1^4 x_2^{16}) +$$
$$+ 456\sqrt{5}\,(x_1^{14} x_2^6 + x_1^6 x_2^{14}) - 1482\,(x_1^{12} x_2^8 + x_1^8 x_2^{12}) - 988\sqrt{5}\,x_1^{10} x_2^{10}.$$

1.16. Группа I_{32} совпадает с группой симметрий многоугольника 3(4)5, двойственного 5(4)3; $C_3^{I_{32}} = \{a x_1 + b x_2 = 0\}$, где $a = \sqrt{\frac{\sqrt{15} - \sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{15}}}$, $b = \sqrt{\frac{\sqrt{15} + \sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{15}}}$, и $C_5^{I_{32}} = C_2^{O_{20}} = \{x_2 = 0\}$; $H^{I_{32}} = \{1800,\ N_3 = 20,\ N_5 = 12;\ 30,\ 60\}$ (Шепард и Тодд [214]).

Пусть ортогональное преобразование δ определяется формулами $x_1' = -b x_1 + a x_2$, $x_2' = a x_1 + b x_2$. Тогда $M^{I_{32}} = \mathfrak{A}_9 \cup \mathfrak{B}_9$; $\mathfrak{A}_9 = \omega^t M^{I_{12}}$ $(t = 1, 2, 3)$, $\mathfrak{B}_9 = \delta(M^{I_{20}})$. Далее, $I_{30}^{I_{32}} = A_{30}^{I_{32}} = I_{30}^{I_{12}}$,

$A_{60}^{I_{32}}=I_{60}^{I_{12}}$, $B_{60}^{I_{32}}=\delta\left(I_{60}^{I_{20}}\right)$, $I_{60}^{I_{32}}=A_{60}^{I_{32}}+B_{60}^{I_{32}}$. Инварианты $I_{30}^{I_{32}}$, $I_{60}^{I_{32}}$ порождают алгебру $I^{I_{32}}$.

1.17. Многоугольник 2(6)5, двойственный 5(6)2, инвариантен относительно группы I_{42}; $C_2^{I_{42}}=\{cx_1+dx_2=0\}$, где $c=\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}}}$, $d=\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}}}$, и $C_5^{I_{42}}=C_5^{I_{32}}=\{x_2=0\}$; $H^{I_{42}}=\{1200,\ N_2=30,\ N_5=12;\ 20,\ 60\}$ (Шепард и Тодд [214]). Множество $M^{I_{42}}=\mathfrak{A}_{10}\cup\mathfrak{B}_{10}$; $\mathfrak{A}_{10}=\varepsilon^h M^{I_{12}}$ $(h=\overline{1,4})$, $\mathfrak{B}_{10}=\delta'\left(M^{I_{30}}\right)$; δ' есть ортогональное преобразование, определяемое формулами $x_1'=-dx_1+cx_2$, $x_2'=cx_1+dx_2$.

Справедливы такие соотношения: $I_{20}^{I_{42}}=A_{20}^{I_{42}}=I_{20}^{I_{12}}$, $A_{60}^{I_{42}}=I_{60}^{I_{12}}$, $B_{60}^{I_{42}}=\delta'\left(I_{60}^{I_{30}}\right)$, $I_{60}^{I_{42}}=A_{60}^{I_{42}}+B_{60}^{I_{42}}$. Формы $I_{20}^{I_{42}}$, $I_{60}^{I_{42}}$ — образующие алгебры $I^{I_{42}}$.

1.18. Множество $C_2^{I_{50}}=\{ex_1+gx_2=0\}$, где $e=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}}$, $g=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}}}$, и $C_3^{I_{50}}=C_5^{I_{42}}=\{x_2=0\}$ (Кокстер [150]); $H^{I_{50}}=\{720,\ N_2=30,\ N_3=20;\ 12,\ 60\}$ (Шепард и Тодд [214]).

Если ортогональное преобразование δ'' определяется формулами $x_1'=-gx_1+ex_2$, $x_2'=ex_1+gx_2$, то $M^{I_{50}}=\mathfrak{A}_{11}\cup\mathfrak{B}_{11}$, где $\mathfrak{A}_{11}=\varepsilon^h M^{I_{20}}$ $(h=\overline{1,4})$, $\mathfrak{B}_{11}=\delta''(M^{I_{30}})$. Форма $I_{12}^{I_{50}}=A_{12}^{I_{50}}=I_{12}^{I_{20}}$; $A_{60}^{I_{50}}=I_{60}^{I_{20}}$, $B_{60}^{I_{50}}=\delta''\left(I_{60}^{I_{20}}\right)$. Инварианты $I_{12}^{I_{50}}$, $I_{60}^{I_{50}}$ (а также $I_{12}^{I_{20}}$, $I_{60}^{I_{20}}$) являются образующими алгебры $I^{I_{50}}$.

1.19. Пусть o_t^* $(t=1,2,3)$ есть отражения относительно прямых множеств $C_2^{I_{62}}=\{dx_1-cx_2=0\}$, $C_3^{I_{62}}=\{bx_1-a\eta_0^2x_2=0\}$, $C_5^{I_{62}}=C_4^{O_{26}}=\{x_1=0\}$ соответственно (Кокстер [150], Шепард и Тодд [214]); коэффициенты a, b, c, d те же, что и в пп. 1.16, 1.17. Тогда пары o_2^* и o_3^*, o_1^* и o_3^*, o_1^* и o_2^* порождают группы I_{32}, I_{42}, I_{50} (Крове [152]). Множество $H^{I_{62}}=\{3600,\ N_2=30,\ N_3=20,\ N_5=12;\ 60,\ 60\}$ (Шепард и Тодд [214]).

Возьмем преобразование φ: $x_1'=\omega(-dx_1+cx_2)$, $x_2'=\omega(cx_1+dx_2)$ и φ': $x_1'=-bx_1+a\eta_0^3x_2$, $x_2'=a\eta_0^2x_1+bx_2$. Тогда $M^{I_{62}}=\mathfrak{A}_{12}\cup\mathfrak{B}_{12}\cup\mathfrak{C}_{12}$, где $\mathfrak{A}_{12}=\omega^t\varepsilon^h M^{I_{20}}$ $(h=\overline{1,4})$, $\mathfrak{B}_{12}=\varphi(M^{I_{30}})$, $\mathfrak{C}_{12}=\varphi'(M^{I_{20}})$; $\mathfrak{C}_9=\mathfrak{C}_{10}=\mathfrak{C}_{11}=\varnothing$. Инвариант $A_{60}^{I_{62}}=I_{60}^{I_{12}}$, $B_{60}^{I_{62}}=\varphi\left(I_{60}^{I_{30}}\right)$, $C_{60}^{I_{62}}=\varphi'\left(I_{60}^{I_{20}}\right)$; $I_{60}^{I_{62}}=A_{60}^{I_{62}}+B_{60}^{I_{62}}+C_{60}^{I_{62}}$. Любые две из форм $A_{60}^{I_{62}}$, $B_{60}^{I_{62}}$, $C_{60}^{I_{62}}$ порождают алгебру $I^{I_{62}}$.

Итак, для каждой икосаэдральной группы I_N образующими алгебры I^{I_N} будут многочлены (1) соответствующих степеней n_1 и n_2 (О. И. Рудницкий [104]).

Кокстер [150], Шепард и Тодд [214] разработали другой метод нахождения базисных инвариантов групп I_N; в его основе лежит связь групп I_N с группами коллинеаций комплексной проективной прямой и результаты Клейна [183] по теории инвариантов бинарных форм. В указанных работах получены следующие образующие алгебр I_N $(N=12,\ 32,\ 42,\ 62)$: $H=I_{20}^{I_{12}}$, $T=I_{30}^{I_{12}}$; H^3, T; H, T^2; H^3, T^2. При этом $144\ I_{60}^{I_{12}}=$ $=3\,527\,974\,625\,T^2+7\,889\,871\,631\,H^3$ (О. И. Рудницкий [104]).

2. Пусть $\mathfrak{G}$ есть примитивная группа пространства U^m $(m=$ $=\overline{3,6})$. Существует только девять таких групп: $\mathfrak{G}_1=W(J_3(4))$, $\mathfrak{G}_2=W(M_3)$, $\mathfrak{G}_3=W(L_3)$, $\mathfrak{G}_4=W(J_3(5))-m=3$; $\mathfrak{G}_5=W(N_4)$, $\mathfrak{G}_6=$ $=EW(N_4)$, $\mathfrak{G}_7=W(L_4)-m=4$; $\mathfrak{G}_8=W(K_5)-m=5$; $\mathfrak{G}_9=W(K_6)-$ $-m=6$ (Шепард и Тодд [214], Коэн [141]).

2.1. Множество $C_2^{\mathfrak{G}_1}=\{x_3=0,\ x_2-x_3=0,\ x_1+x_2+\alpha x_3=0\}$, где α есть любой из корней уравнения $x^2-x+2=0$ — возьмем $\alpha=\frac{1}{2}(1-\sqrt{7}\,\varepsilon)$; $H^{\mathfrak{G}_1}=\{336,\ N_2=N=21;\ 4,\ 6,\ 14\}$ (Шепард и Тодд [214]). Плоскости симметрии определяются уравнениями $x_i=0$, $x_i\pm x_j=0$ $(i<j)$, $x_i\pm x_j\pm\alpha x_k=0$ $(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3$ меняются циклически); $\mathfrak{G}_1$ содержит скалярное умножение на -1. Множество $M^{\mathfrak{G}_1}=\left\{\pm\vec{e}_i,\ \pm\frac{\alpha}{2}(\vec{e}_i\pm\vec{e}_j),\ \pm\frac{1}{2}(\vec{e}_i\pm\vec{e}_j\pm\alpha\vec{e}_k)\right\}$.

Формы $I_{n_i}^{\mathfrak{G}_1}$ являются базисными инвариантами (В. А. Терновский, см. [96]). Они имеют такой развернутый вид:

$$I_4^{\mathfrak{G}_1}=\sum x_i^4-3\bar{\alpha}\sum x_i^2x_j^2,$$

$$I_6^{\mathfrak{G}_1}=2\sum x_i^6+5\bar{\alpha}\sum(x_i^4x_j^2+x_i^2x_j^4)+20\alpha^2x_1^2x_2^2x_3^2,$$

$$\begin{aligned}I_{14}^{\mathfrak{G}_1}={}&382\sum x_i^{14}-793\bar{\alpha}\sum(x_i^{12}x_j^2+x_i^2x_j^{12})+\\&+143(16-21\bar{\alpha})\sum(x_i^{10}x_j^4+x_i^4x_j^{10})-\\&-143(16+95\bar{\alpha})\sum(x_i^8x_j^6+x_i^6x_j^8)+\\&+572(21+9\bar{\alpha})\sum x_i^{10}x_j^2x_k^2+\\&+4290(-19+5\bar{\alpha})\sum(x_i^8x_j^4x_k^2+x_i^4x_j^8x_k^2)+\\&+8008(13-11\bar{\alpha})\sum x_i^6x_j^6x_k^2+20020(5+\bar{\alpha})\sum x_i^6x_j^4x_k^4;\end{aligned}$$

в инвариантах групп $\mathfrak{G}_h$ $(h=\overline{1,4})$ индексы $(ij)=(12),\ (31),$ (23), а $i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3$ — циклически.

Спрингер [110] привел базисный инвариант четвертой степени в специальной системе координат.

2.2. Правильный комплексный многогранник 3(24)3(18)2 имеет группу симметрий $\mathfrak{G}_2$ (Шепард и Тодд [214]). Она содержит подгруппу скалярных умножений на 1, ω, ω^2 $\left(\omega = e^{\frac{2\pi\varepsilon}{3}}\right.$ — первообразный корень третьей степени из единицы; $\left. \right)$ $\mathbf{C}_2^{\mathfrak{G}_2} = \{x_2 - x_3 = 0\}$, $\mathbf{C}_3^{\mathfrak{G}_2} = \{x_3 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$; $H^{\mathfrak{G}_2} = \{1296,\ N_2 = 9,\ N_3 = 12;\ 6,\ 12,\ 18\}$. Запишем уравнения всех плоскостей симметрии многогранника: $x_i - \omega^k x_j = 0$ $(i < j)$;

$$x_i = 0, \quad x_1 + \omega^j x_2 + \omega^k x_3 = 0 \ (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Множество $M^{\mathfrak{G}_2} = \mathfrak{A}_{13} \cup \mathfrak{B}_{13}$, где $\mathfrak{A}_{13} = \left\{ \pm \frac{\omega^t \varepsilon}{\sqrt{2}} (\vec{e}_i - \omega^k \vec{e}_j) \right\}$ $(t = 1,\ 2,\ 3)$, $\mathfrak{B}_{13} = \left\{ \pm \omega^t \vec{e}_i,\ \pm \frac{\omega^t \varepsilon}{\sqrt{3}} (\vec{e}_1 + \omega^j \vec{e}_2 + \omega^k \vec{e}_3) \right\}$.

Формы $A_{n_i}^{\mathfrak{G}_2}$ являются образующими алгебры $I^{\mathfrak{G}_2}$. При этом

$$A_6^{\mathfrak{G}_2} = B_6^{\mathfrak{G}_2} = \sum x_i^6 - 10 \sum x_i^3 x_j^3,$$

$$A_{12}^{\mathfrak{G}_2} = \sum x_i^{12} - 110 \sum (x_i^9 x_j^3 + x_i^3 x_j^9) + 462 \sum x_i^6 x_j^6,$$

$$B_{18}^{\mathfrak{G}_2} = -1093 \sum x_i^{18} + 408 \sum (x_i^{15} x_j^3 + x_i^3 x_j^{15}) + 24\,310 \sum x_i^9 x_j^9 +$$
$$+ 9282 \sum (x_i^{12} x_j^6 + x_i^6 x_j^{12}) + 185\,640 \sum x_i^{12} x_j^3 x_k^3 +$$
$$+ 2\,042\,040 \sum (x_i^9 x_j^6 x_k^3 + x_i^6 x_j^9 x_k^3) + 8\,576\,568 x_1^6 x_2^6 x_3^6;$$

$$3B_{12}^{\mathfrak{G}_2} = -31 A_{12}^{\mathfrak{G}_2} + 154 \left(A_6^{\mathfrak{G}_2}\right)^2,$$

$$1229 B_{18}^{\mathfrak{G}_2} = -37\,629 A_{18}^{\mathfrak{G}_2} + 600\,236 A_6^{\mathfrak{G}_2} A_{12}^{\mathfrak{G}_2} - 1\,905\,904 \left(A_6^{\mathfrak{G}_2}\right)^3.$$

2.3. Группа $\mathfrak{G}_3 \subset \mathfrak{G}_2$ есть группа симметрий правильного комплексного многогранника 3(24)3(24)3 (Шепард и Тодд [214]). Уравнения плоскостей симметрии имеют вид (2); $\mathbf{C}_3^{\mathfrak{G}_3} = \{x_2 = 0\} \cup \cup \mathbf{C}_3^{\mathfrak{G}_2}$, $H^{\mathfrak{G}_3} = \{648,\ N_3 = N = 12;\ 6,\ 9,\ 12\}$, $M^{\mathfrak{G}_3} = \mathfrak{B}_{13}$. Так как $I_{2s}^{\mathfrak{G}_3} = B_{2s}^{\mathfrak{G}_2}$ $(s = 3,\ 6)$, то $I_{12}^{\mathfrak{G}_3}$ — базисный инвариант; системе таких инвариантов принадлежат и формы $I_{2s}^{\mathfrak{G}_2}$.

Спрингер [110] привел следующие базисные инварианты четных степеней: $P_6 = A_6^{\mathfrak{G}_3}$, $P_{12} = \sum x_i^{12} + 4 \sum (x_i^9 x_j^3 + x_i^3 x_j^9) + 6 \sum x_i^6 x_j^6 + + 228 \sum x_i^6 x_j^3 x_k^3$. Форма $155 P_{12} = 4 I_{12}^{\mathfrak{G}_3} - 9 P_6^2$.

2.4. Множество $\mathbf{C}_2^{\mathfrak{G}_4} = \{x_1 = 0,\ x_1 + \omega^2 x_2 = 0,\ \omega^2 r x_1 + r^2 x_2 + + \omega x_3 = 0\}$, $r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; $H^{\mathfrak{G}_4} = \{2160,\ N_2 = N = 45;\ 6,\ 12,\ 30\}$ (Шепард и Тодд [214]);

$$M^{\mathfrak{G}_4}=\Big\{\pm\omega^t\vec{e}_i,\ \frac{r\omega^t}{2}(\pm\vec{e}_i\pm\gamma\vec{e}_j\pm\gamma^2\vec{e}_k),$$
$$\pm\frac{r\omega^t}{2}(\vec{e}_i\pm\omega\gamma^2\vec{e}_j\pm\omega^2\gamma\vec{e}_k),\ \pm\frac{\omega^t}{2}(\vec{e}_i\pm(1-\omega^2\gamma)\vec{e}_j\pm\omega\vec{e}_k),$$
$$\pm\frac{\omega^t(\gamma-\omega^2)}{2}(\vec{e}_i\pm\omega^2\vec{e}_k)\Big\},$$

где γ есть любой корень уравнения $x^2-x-1=0$ (выберем $\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=r^{-1}$), индексы $i,\ j,\ k=1, 2, 3$ меняются циклически. Плоскости симметрии определяются уравнениями $x_i=0$, $x_i\pm\pm\omega^2x_j=0$, $x_i\pm\gamma x_j\pm\gamma^2x_k=0$, $x_i\pm\omega\gamma^2x_j\pm\omega^2\gamma x_k=0$, $x_i\pm\pm(1-\omega^2\gamma)x_j\pm\omega x_k=0$.

Инварианты $I_{n_i}^{\mathfrak{G}_4}$ являются базисными. Приведем их развернутый вид:

$$I_6^{\mathfrak{G}_4}=4\sum x_i^6-3(5+\sqrt{15}\varepsilon)\,\omega\sum(x_i^4x_j^2+\omega x_i^2x_j^4)+$$
$$+12(5-\sqrt{15}\varepsilon)\,x_1^2x_2^2x_3^2,$$

$$I_{12}^{\mathfrak{G}_4}=148\sum x_i^{12}-66(5+\sqrt{15}\varepsilon)\,\omega\sum(x_i^{10}x_j^2+\omega x_i^2x_j^{10})+$$
$$+165(-7+5\sqrt{15}\varepsilon)\,\omega^2\sum(x_i^8x_j^4+\omega^2x_i^4x_j^8)+$$
$$+308(7+3\sqrt{15}\varepsilon)\sum x_i^6x_j^6+660(19+\sqrt{15}\varepsilon)\sum x_i^8x_j^2x_k^2-$$
$$-18\,480\omega\sum(x_i^6x_j^4x_k^2+\omega x_i^4x_j^6x_k^2)-4620(3+\sqrt{15}\varepsilon)\,x_1^4x_2^4x_3^4,$$

$$I_{30}^{\mathfrak{G}_4}=24\,195\,204\sum x_i^{30}-$$
$$-3\,603\,975(5+\sqrt{15}\varepsilon)\,\omega\sum(x_i^{28}x_j^2+\omega x_i^2x_j^{28})+$$
$$+9135(-39\,147+15\,281\sqrt{15}\varepsilon)\,\omega^2\sum(x_i^{26}x_j^4+\omega^2x_i^4x_j^{26})+$$
$$+13\,195(461\,197+13\,953\sqrt{15}\varepsilon)\sum(x_i^{24}x_j^6+x_i^6x_j^{24})-$$
$$-130\,065(44\,261+23\,105\sqrt{15}\varepsilon)\,\omega\sum(x_i^{22}x_j^8+\omega x_i^8x_j^{22})+$$
$$+10\,015\,005(821+1745\sqrt{15}\varepsilon)\,\omega^2\sum(x_i^{20}x_j^{10}+\omega^2x_i^{10}x_j^{20})+$$
$$+5\,766\,215(21\,871+4587\sqrt{15}\varepsilon)\sum(x_i^{18}x_j^{12}+x_i^{12}x_j^{18})+$$
$$+3\,231\,615(32\,539+12\,479\sqrt{15}\varepsilon)\,\omega\sum(x_i^{16}x_j^{14}+\omega x_i^{14}x_j^{16})+$$
$$+109\,620(27\,493+279\sqrt{15}\varepsilon)\sum x_i^{26}x_j^2x_k^2-$$
$$-791\,700(31\,441+5358\sqrt{15}\varepsilon)\,\omega\sum(x_i^{24}x_j^4x_k^2+\omega x_i^4x_j^{24}x_k^2)+$$

$$+60\,090\,030\,(13\,927-299\sqrt{15}\varepsilon)\sum(x_i^{20}x_j^8x_k^2+x_i^8x_j^{20}x_k^2)+$$

$$+101\,970\,960\,(-1343+342\sqrt{15}\varepsilon)\,\omega^2\sum(x_i^{22}x_j^6x_k^2+\omega^2x_i^6x_j^{22}x_k^2)-$$

$$-1\,522\,280\,760\,(243+130\sqrt{15}\,\varepsilon)\,\omega\sum(x_i^{18}x_j^{10}x_k^2+\omega x_i^{10}x_j^{18}x_k^2)+$$

$$+1\,176\,307\,860\,(-601+202\sqrt{15}\,\varepsilon)\,\omega^2\sum(x_i^{16}x_j^{12}x_k^2+\omega^2x_i^{12}x_j^{16}x_k^2)+$$

$$+775\,587\,600\,(791-27\sqrt{15}\,\varepsilon)\sum x_i^{14}x_j^{14}x_k^2+$$

$$+18\,209\,100\,(21\,651-991\sqrt{15}\,\varepsilon)\sum x_i^{22}x_j^4x_k^4-$$

$$-1\,682\,520\,840\,(233+152\sqrt{15}\,\varepsilon)\,\omega\sum(x_i^{20}x_j^6x_k^4+\omega x_i^6x_j^{20}x_k^4)+$$

$$+3\,805\,701\,900\,(-91+248\sqrt{15}\,\varepsilon)\,\omega^2\sum(x_i^{18}x_j^8x_k^4+\omega^2x_i^8x_j^{18}x_k^4)+$$

$$+6\,469\,693\,230\,(547+113\sqrt{15}\,\varepsilon)\sum(x_i^{16}x_j^{10}x_k^4+x_i^{10}x_j^{16}x_k^4)-$$

$$-23\,526\,157\,200\,(219+40\sqrt{15}\,\varepsilon)\,\omega\sum(x_i^{14}x_j^{12}x_k^4+\omega x_i^{12}x_j^{14}x_k^4)+$$

$$+3\,551\,988\,440\,(2051+177\sqrt{15}\,\varepsilon)\sum x_i^{18}x_j^6x_k^6+$$

$$+116\,454\,478\,140\,(-65+16\sqrt{15}\,\varepsilon)\,\omega\sum(x_i^{16}x_j^8x_k^6+\omega x_i^8x_j^{16}x_k^6)-$$

$$-13\,560\,477\,010\,080\omega^2\sum(x_i^{14}x_j^{10}x_k^6+\omega^2x_i^{10}x_j^{14}x_k^6)+$$

$$+214\,088\,030\,520\,(17-21\sqrt{15}\,\varepsilon)\sum x_i^{12}x_j^{12}x_k^6+$$

$$+83\,181\,170\,100\,(-141+\sqrt{15}\,\varepsilon)\sum x_i^{14}x_j^8x_k^8+$$

$$+336\,424\,047\,960\,(29-16\sqrt{15}\,\varepsilon)\,\omega\sum(x_i^{12}x_j^{10}x_k^8+\omega x_i^{10}x_j^{12}x_k^8)-$$

$$-3\,700\,664\,527\,560\,(-13+\sqrt{15}\,\varepsilon)\,x_1^{10}x_2^{10}x_3^{10}.$$

Рассмотрим теперь примитивные группы $\mathfrak{G}$ пространства U^4.

2.5. Множество $C_2^{\mathfrak{G}_5}=\{x_1=0,\ x_2+x_4=0,\ x_2-x_3=0,\ x_1+\varepsilon x_2+x_3+\varepsilon x_4=0\}$; $H^{\mathfrak{G}_5}=\{7680,\ N_2=N=40;\ 4,\ 8,\ 12,\ 20\}$ (Коэн [141]); $M^{\mathfrak{G}_5}=\left\{\varepsilon^h\vec{e}_i,\ \frac{\varepsilon^h}{2}(1+\varepsilon)(\vec{e}_i\pm\vec{e}_j)\ (i<j),\ \frac{\varepsilon^h}{2}(\vec{e}_1\pm\vec{e}_k\pm\pm\varepsilon\vec{e}_l\pm\varepsilon\vec{e}_m)\right\}$, где $k,\ l,\ m=2,\ 3,\ 4$ меняются циклически ($i,\ j,\ h=\overline{1,4}$). Плоскости симметрии определяются уравнениями $x_i=0$, $x_i\pm x_j=0$ $(i<j)$, $x_1\pm x_k\pm\varepsilon x_l\pm\varepsilon x_m=0$. Здесь тоже инварианты $I_{n_l}^{\mathfrak{G}_5}$ являются базисными. При этом

$$I_4^{\mathfrak{G}_5}=\sum x_i^4-6\sum_{i<j}x_i^2x_j^2,\quad I_8^{\mathfrak{G}_5}=47\sum x_i^8+84\sum x_i^6x_j^2+$$

$$+490\sum_{i<j}x_i^4x_j^4-420\sum_{j<k}x_i^4x_j^2x_k^2+7560x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2,$$

$$I_{12}^{\mathfrak{G}_5}=467\sum x_i^{12}-1122\sum x_i^{10}x_j^2-6435\sum x_i^8x_j^4-$$

$$-15\,708\sum_{i<j}x_i^6x_j^6-2970\sum_{j<k}x_i^8x_j^2x_k^2-13\,860\sum x_i^6x_j^4x_k^2+$$

$$+103\,950\sum_{i<j<k}x_i^4x_j^4x_k^4+249\,480\sum_{j<k<l}x_i^6x_j^2x_k^2x_l^2-$$

$$-207\,900\sum_{\substack{i<j\\k<l}}x_i^4x_j^4x_k^2x_l^2,$$

$$I_{20}^{\mathfrak{G}_5}=130\,307\sum x_i^{20}-48\,830\sum x_i^{18}x_j^2-1\,225\,785\sum x_i^{16}x_j^4-$$

$$-9\,961\,320\sum x_i^{14}x_j^6-31\,870\,410\sum x_i^{12}x_j^8-$$

$$-47\,482\,292\sum_{i<j}x_i^{10}x_j^{10}-29\,070\sum_{j<k}x_i^{16}x_j^2x_k^2-$$

$$-581\,400\sum x_i^{14}x_j^4x_k^2-3\,527\,160\sum x_i^{12}x_j^6x_k^2-$$

$$-8\,314\,020\sum x_i^{10}x_j^8x_k^2+26\,453\,700\sum_{j<k}x_i^{12}x_j^4x_k^4-$$

$$-38\,798\,760\sum x_i^{10}x_j^6x_k^4+187\,065\,450\sum_{i<j}x_i^8x_j^8x_k^4-$$

$$-116\,396\,280\sum_{j<k}x_i^8x_j^6x_k^6+10\,465\,200\sum_{j<k<l}x_i^{14}x_j^2x_k^2x_l^2-$$

$$-52\,907\,400\sum_{k<l}x_i^{12}x_j^4x_k^2x_l^2+698\,377\,680\sum_{k<l}x_i^{10}x_j^6x_k^2x_l^2-$$

$$-374\,130\,900\sum_{\substack{i<j\\k<l}}x_i^8x_j^8x_k^2x_l^2-581\,981\,400\sum_{j<k}x_i^{10}x_j^4x_k^4x_l^2-$$

$$-1745944200\sum x_i^8x_j^6x_k^4x_l^2+$$

$$+9\,777\,287\,520\sum_{i<j<k}x_i^6x_j^6x_k^6x_l^2+13\,094\,581\,500\sum_{j<k<l}x_i^8x_j^4x_k^4x_l^4-$$

$$-8\,147\,739\,600\sum_{\substack{i<j\\k<l}}x_i^6x_j^6x_k^4x_l^4;$$

индексы $i,\ j,\ k,\ l=\overline{1,4}$ и различны.

2.6. Множество $C_2^{\mathfrak{G}_6}=\{x_1=0,\ x_2-x_3=0,\ x_2+x_4=0,\ x_1+x_2+x_3+x_4=0,\ x_1+\varepsilon x_2+x_3+\varepsilon x_4=0\}$; $H^{\mathfrak{G}_6}=\{64\cdot 6!,\ N_2=N=60;\ 8,\ 12,\ 20,\ 24\}$ (Коэн [141]); $M^{\mathfrak{G}_6}=\Big\{\varepsilon^h\vec{e}_i,\ \frac{\varepsilon^h}{2}(1-\varepsilon)\times$

$\times(\vec{e}_i+\varepsilon^p\vec{e}_j)$, $\frac{\varepsilon^h}{2}(\vec{e}_1\pm\vec{e}_k\pm\varepsilon^q\vec{e}_l\pm\varepsilon^q\vec{e}_m)\Big\}$, где k, l, $m=2, 3, 4$ меняются циклически ($q=1, 2$; i, j, h, $p=\overline{1, 4}$, $i<j$). Уравнения $x_i=0$, $x_1\pm x_k\pm\varepsilon^q x_l\pm\varepsilon^q x_m=0$ и

$$x_i+\varepsilon^p x_j=0\quad (i<j) \tag{3}$$

задают все плоскости симметрии. Базисные инварианты $I_{n_i}^{\mathfrak{G}_6}$ имеют следующий развернутый вид:

$$I_8^{\mathfrak{G}_6}=\sum x_i^8+14\sum_{i<j}x_i^4x_j^4+168\prod x_i^2,$$

$$I_{12}^{\mathfrak{G}_6}=\sum x_i^{12}-33\sum x_i^8x_j^4+330\sum_{i<j<k}x_i^4x_j^4x_k^4+792\sum_{j<k<l}x_i^6x_j^2x_k^2x_l^2,$$

$$I_{20}^{\mathfrak{G}_6}=127\sum x_i^{20}-2413\sum x_i^{16}x_j^4-62\,738\sum x_i^{12}x_j^8+$$
$$+34\,580\sum_{j<k}x_i^{12}x_j^4x_k^4+244\,530\sum_{i<j}x_i^8x_j^8x_k^4+$$
$$+13\,680\sum_{j<k<l}x_i^{14}x_j^2x_k^2x_l^2+12\,780\,768\sum_{i<j<k}x_i^6x_j^6x_k^6x_l^2+$$
$$+912\,912\sum_{k<l}x_i^{10}x_j^6x_k^2x_l^2+17\,117\,100\sum_{j<k<l}x_i^8x_j^4x_k^4x_l^4,$$

$$I_{24}^{\mathfrak{G}_6}=3075\sum x_i^{24}+31\,878\sum x_i^{20}x_j^4+2\,206\,413\sum x_i^{16}x_j^8+$$
$$+8\,112\,468\sum_{i<j}x_i^{12}x_j^{12}+301\,070\sum_{j<k}x_i^{16}x_j^4x_k^4+$$
$$+7\,827\,820\sum x_i^{12}x_j^8x_k^4+55\,353\,870\sum_{i<j<k}x_i^8x_j^8x_k^8+$$
$$+70\,840\sum_{j<k<l}x_i^{18}x_j^2x_k^2x_l^2+14\,451\,360\sum_{k<l}x_i^{14}x_j^6x_k^2x_l^2+$$
$$+68\,884\,816\sum_{\substack{i<j\\k<l}}x_i^{10}x_j^{10}x_k^2x_l^2+547\,947\,400\sum_{j<k<l}x_i^{12}x_j^4x_k^4x_l^4+$$
$$+3874\,770\,900\sum_{\substack{i<j\\k<l}}x_i^8x_j^8x_k^4x_l^4+30\,137\,107\sum_{j<k}x_i^{10}x_j^6x_k^6x_l^2+$$
$$+13\,501\,423\,936\prod x_i^6.$$

Группа $\mathfrak{G}_6$ содержит импримитивную подгруппу $\mathfrak{G}$ (4, 4, 4), порожденную отражениями относительно плоскостей с уравнениями (3). Базисными инвариантами этой подгруппы являются формы $\sum x_i^4$, $\sum_{i<j}x_i^4x_j^4$, $\sum_{i<j<k}x_i^4x_j^4x_k^4$, $x_1x_2x_3x_4$. Поэтому $I_{n_i}^{\mathfrak{G}_6}$ не содержат

одночленов вида $x_l^{n_l-p-q}x_j^p x_k^q$, $x_l^{n_l-p}x_j^q$, где p, q — четные, но не делятся на 4 ($l=\overline{1,4}$).

2.7. Правильный комплексный многогранник 3(24)3(24)3(24)3 инвариантен относительно группы $\mathfrak{G}_7$ (Шепард и Тодд [214]). Множество $C_3^{\mathfrak{G}_7}=\{x_2=0,\ x_3=0,\ x_1+x_2+x_3=0,\ x_1-x_2-x_4=0\}$; $H^{\mathfrak{G}_7}=\{216\cdot 6!,\ N_3=N=40;\ 12,\ 18,\ 24,\ 30\}$ (Коэн [141]); $M^{\mathfrak{G}_7}=\left\{\omega^t\varepsilon\vec{e}_i,\ \frac{\omega^t}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1+\omega^p\vec{e}_2+\omega^q\vec{e}_3),\ \frac{\omega^t}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1-\omega^p\vec{e}_2-\omega^q\vec{e}_4),\ \frac{\omega^t}{\sqrt{3}}(\vec{e}_\mu-\omega^p\vec{e}_3-(-1)^\mu\omega^q\vec{e}_4)\right\}$ $(p, q, t=1, 2, 3;\ \mu=1, 2;\ i=\overline{1,4})$. Плоскости симметрии определяются уравнениями $x_l=0$, $x_1+\omega^p x_2+\omega^q x_3=0$, $x_1-\omega^p x_2-\omega^q x_4=0$, $x_1-\omega^p x_3+\omega^q x_4=0$, $x_2-\omega^p x_3-\omega^q x_4=0$. Инварианты $I_{n_l}^{\mathfrak{G}_7}$ являются базисными; их развернутый вид:

$$I_{12}^{\mathfrak{G}_7}=\sum x_l^{12}+22\sum_{l<j}x_l^6x_j^6+220\sum_{l<k}(-1)^p x_l^3x_j^6x_k^3,$$

$$I_{18}^{\mathfrak{G}_7}=\sum x_l^{18}-17\sum x_l^{12}x_j^6-170\sum_{l<k}(-1)^p x_l^3x_j^{12}x_k^3-$$
$$-1870\sum(-1)^p x_l^9x_j^6x_k^3-7854\sum_{l<j<k}x_l^6x_j^6x_k^6,$$

$$I_{24}^{\mathfrak{G}_7}=111\sum x_l^{24}+506\sum x_l^{18}x_j^6+10\,166\sum_{l<j}x_l^{12}x_j^{12}+$$
$$+5060\sum_{l<k}(-1)^p x_l^3x_j^{18}x_k^3+206\,448\sum(-1)^p x_l^{15}x_j^6x_k^3+$$
$$+1\,118\,260\sum(-1)^p x_l^9x_j^{12}x_k^3+4\,696\,692\sum_{j<k}x_l^{12}x_j^6x_k^6+$$
$$+12\,300\,860\sum_{l<k}(-1)^p x_l^9x_j^6x_k^9,$$

$$I_{30}^{\mathfrak{G}_7}=584\sum x_l^{30}-435\sum x_l^{24}x_j^6-63\,365\sum x_l^{18}x_j^{12}-$$
$$-4350\sum_{l<k}(-1)^p x_l^3x_j^{24}x_k^3-440\,220\sum(-1)^p x_l^{21}x_j^6x_k^3-$$
$$-6\,970\,150\sum(-1)^p x_l^9x_j^{18}x_k^3-25\,852\,920\sum(-1)^p x_l^{15}x_j^{12}x_k^3-$$
$$-29\,274\,630\sum_{j<k}x_l^{18}x_j^6x_k^6-284\,382\,120\sum(-1)^p x_l^{15}x_j^6x_k^9-$$
$$-588\,153\,930\sum_{l<j}x_l^{12}x_j^{12}x_k^6-1\,540\,403\,150\sum_{l<k}(-1)^p x_l^9x_j^{12}x_k^9.$$

Индексы $i, j, k=\overline{1,4}$; число $\rho=2$, если i, j, k принимают значения троек чисел (2,1,4), (4,1,2), (1,3,4), (4,3,1), (3,2,4), (4,2,3) или значения любой перестановки чисел 1,2,3. Далее, $\rho=1$, если i, j, k принимают значения оставшихся перестановок троек чисел (1,2,4), (1,4,3), (2,3,4).

Другим способом базисные инварианты F_{n_l} группы $\mathfrak{G}_7$ нашел Машке [189]. При этом $F_{12}=I_{12}^{\mathfrak{G}_7}$, $F_{18}=I_{18}^{\mathfrak{G}_7}$, $4378F_{24}=-I_{24}^{\mathfrak{G}_7}+$ $+111F_{12}^2$, $3355F_{30}=I_{30}^{\mathfrak{G}_7}-584F_{12}F_{18}$ (О. И. Рудницкий [99]).

Таким образом, для каждой примитивной группы $\mathfrak{G}$ пространства U^m ($m=3$ или 4) образующие алгебр $I^{\mathfrak{G}}$ могут быть построены по формуле (1) (О. И. Рудницкий [96], [99]).

2.8. Множество $C_2^{\mathfrak{G}_8}=\{x_1-\omega x_2=0,\ x_1-x_2=0,\ x_2-x_3=0,$ $x_3-x_4=0,\ \sum x_i+\sqrt{2}\,x_5=0\}$, $i=\overline{1,4}$; $H^{\mathfrak{G}_8}=\{72\cdot 6!,\ N_2=$ $=N=45;\ 4,\ 6,\ 10,\ 12,\ 18\}$ (Шепард и Тодд [214]); $M^{\mathfrak{G}_8}=\left\{\pm\frac{\omega^{t_8}}{\sqrt{2}}(\vec{e}_i-\omega^{k_0}\vec{e}_j),\ \pm\frac{\omega^t}{\sqrt{6}}\left(\sum\omega^{k_i}\vec{e}_i+\sqrt{2}\,\omega^{k_5}\vec{e}_5\right)\right\}$, $i,\ j=\overline{1,4}$ $(i<j)$, k_0, k_i, $t=1,\ 2,\ 3, \sum k_i+2k_5\equiv 0 \pmod 3$. Уравнения $x_i-\omega^{k_0}x_j=0$, $\sum\omega^{k_i}x_i+\sqrt{2}\,\omega^{k_5}x_5=0$ определяют все плоскости симметрии. Если степень $n_{i'}$ $(1\leqslant i'\leqslant 5)$ базисного инварианта не делится на три, то $\sum\limits_t\omega^{tn_{i'}}=0$. Поэтому $I_4^{\mathfrak{G}_8}\equiv I_{10}^{\mathfrak{G}_8}\equiv 0$. Формы $I_{2s}^{\mathfrak{G}_8}$ $(s=3,\ 6,\ 9)$ — образующие алгебры $I^{\mathfrak{G}_8}$. При этом

$$I_6^{\mathfrak{G}_8}=-\sum x_i^6+x_5^6+10\sum_{i<j}x_i^3x_j^3+5\sqrt{2}\,x_5^3\sum x_i^3+90x_5^2\prod x_i,$$

$$I_{12}^{\mathfrak{G}_8}=61\sum x_i^{12}+16x_5^{12}-4400\sum x_i^9x_j^3+110\sqrt{2}\,x_5^3\sum x_i^9+$$
$$+880\sqrt{2}\,x_5^9\sum x_i^3+18\,942\sum_{i<j}x_i^6x_j^6+1848x_5^6\sum x_i^6+$$
$$+4620\sum_{j<k}x_i^6x_j^3x_k^3+36\,960x_5^6\sum_{i<j}x_i^3x_j^3+9240\sqrt{2}\,x_5^3\sum x_i^6x_j^3+$$
$$+92\,400\prod x_i^3+184\,800\sqrt{2}\,x_5^3\sum_{i<j<k}x_i^3x_j^3x_k^3+$$
$$+\left(23\,760x_5^2\sum x_i^6+207\,900x_5^2\sum_{i<j}x_i^3x_j^3+166\,320\sqrt{2}\,x_5^5\sum x_i^3+\right.$$
$$\left.+47\,520x_5^8\right)\prod x_i+\left(124\,740\sqrt{2}\,x_5\sum x_i^3+1\,247\,400x_5^4\right)\prod x_i^2,$$

$$I_{18}^{\mathfrak{G}_8}=820\sum x_i^{18}-64x_5^{18}-223\,176\sum x_i^{15}x_j^3-204\sqrt{2}\,x_5^3\sum x_i^{15}-$$
$$-13\,056\sqrt{2}\,x_5^{15}\sum x_i^3+5\,072\,613\sum x_i^{12}x_j^6-18\,564x_5^6\sum x_i^{12}-$$

$$-148\,512x_5^{12}\sum x_i^6-13\,297\,570\sum_{i<j} x_i^9x_j^9-97\,240\sqrt{2}\,x_5^9\sum x_i^9-$$
$$-46\,410\sum_{j<k} x_i^{12}x_j^3x_k^3-92\,820\sqrt{2}\,x_5^3\sum x_i^{12}x_j^3-$$
$$-2\,970\,240x_5^{12}\sum_{i<j} x_i^3x_j^3-510\,510\sum x_i^9x_j^6x_k^3-$$
$$-1\,021\,020\sqrt{2}\,x_5^3\sum x_i^9x_j^6-4\,084\,080\,x_5^6\sum x_i^9x_j^3-$$
$$-8\,168\,160\sqrt{2}\,x_5^9\sum x_i^6x_j^3-2\,144\,142\sum_{i<j<k} x_i^6x_j^6x_k^6-$$
$$-17\,153\,136x_5^6\sum_{i<j} x_i^6x_j^6-\Big(10\,210\,200\sum x_i^6+42\,882\,840\sum_{i<j} x_i^3x_j^3+$$
$$+1\,715\,313\,600\sqrt{2}\,x_5^3\sum x_i^3+6\,861\,254\,400x_5^6\Big)\Pi x_i^3-$$
$$-20\,420\,400\sqrt{2}\,x_5^3\sum_{j<k} x_i^9x_j^3x_k^3-163\,363\,200\sqrt{2}\,x_5^9\sum_{i<j<k} x_i^3x_j^3x_k^3-$$
$$-85\,765\,680\sqrt{2}\,x_5^3\sum_{i<j} x_i^6x_j^6x_k^3-343\,062\,720x_5^6\sum_{j<k} x_i^6x_j^3x_k^3-$$
$$-\Big(128\,520x_5^2\sum x_i^{12}+1\,175\,040x_5^{14}+9\,189\,180x_5^2\sum x_i^9x_j^3+$$
$$+7\,351\,344\sqrt{2}\,x_5^5\sum x_i^9+26\,732\,160\sqrt{2}\,x_5^{11}\sum x_i^3+$$
$$+31\,505\,760x_5^2\sum_{i<j} x_i^6x_j^6+63\,011\,520x_5^8\sum x_i^6+$$
$$+275\,675\,400x_5^2\sum_{j<k} x_i^6x_j^3x_k^3+220\,540\,320\sqrt{2}\,x_5^5\sum x_i^6x_j^3+$$
$$+551\,350\,800x_5^8\sum_{i<j} x_i^3x_j^3+1\,929\,727\,800\sqrt{2}\,x_5^5\sum_{i<j<k} x_i^3x_j^3x_k^3\Big)\Pi x_i-$$
$$-2\,412\,159\,750x_5^2\Pi x_i^4-\Big(413\,513\,100x_5^4\sum x_i^6+$$
$$+411\,080\,640x_5^{10}+2\,315\,673\,360x_5^4\sum_{i<j} x_i^3x_j^3+$$
$$+1\,323\,241\,920\sqrt{2}\,x_5^7\sum x_i^3+41\,351\,310\sqrt{2}\,x_5\sum x_i^6x_j^3+$$
$$+231\,567\,336\sqrt{2}\,x_5\sum_{i<j<k} x_i^3x_j^3x_k^3+2\,506\,140\sqrt{2}\,x_5\sum x_i^9\Big)\Pi x_i^2;$$
$$i,\ j,\ k=\overline{1,4}.$$

Итак, формы $I_{2s}^{\mathfrak{G}_8}$ являются образующими алгебры $I^{\mathfrak{G}_8}$ только при $s=3, 6, 9$ (О. И. Рудницкий [102]).

Базисные инварианты $\mathfrak{G}_8$ нашел Бурkгард [135]. В приведенном им инварианте 18-ой степени вместо коэффициентов

12, -36, 12, -27 при одночленах $y_5^8\sum y_i^4y_j^4y_ky_m$, $y_7^5\sum y_i^5y_j^2y_2^ky_m^2$, $y_5\sum y_i^{11}y_j^2y_k^2y_m^2$, $y_5\sum y_i^5y_j^5y_k^5y_m^2$ $(m=\overline{1,4})$ должны стоять 6, -18, -12 -72 соответственно (О. И. Рудницкий [102]).

Если $I^G\neq\theta^G$, то для построения отдельных образующих I^G использовались многочлены $\theta_{2s}^{G_0}$ (группа $G_0\subset G$) [42]. О. И. Рудницкий [105] применил этот способ и в случае $\mathfrak{S}_8$, рассмотрев инварианты $A_5\subset\mathfrak{S}_8$. Образующие алгебры I^{A_5} можно записать так:

$$P_2=2\sum x_i^2+x_5^2-2\sum_{i<j}x_ix_j-2\sqrt{2}\,x_5\sum x_i,\quad P_3=\sum x_i^3+2\sqrt{2}$$

$$x_5^3-\ -6\sum x_i^2x_j+3\sqrt{2}\,x_5\sum x_i^2+6x_5^2\sum x_i+6\sum_{i<j<k}x_ix_jx_k-$$

$$-3\sqrt{2}\,x_5\sum_{i<j}x_ix_j,\quad P_4=2\sum x_i^4-x_5^4-4\sum x_i^3x_j-\sqrt{2}\,x_5\sum x_i^3-$$

$$-2\sqrt{2}\,x_5^3\sum x_i+6\sum_{i<j}x_i^2x_j^2+6x_5^2\sum x_i^2+6x_5^2\sum_{i<j}x_ix_j+$$

$$+12\sqrt{2}\,x_5\sum_{i<j<k}x_ix_jx_k-6\prod x_i,\quad P_5=2\sum x_i^5+2\sqrt{2}\,x_5^5-$$

$$-5\sum x_i^4x_j+4\sqrt{2}\,x_5\sum x_i^4-2x_5^4\sum x_i+2\sum x_i^3x_j^2+x_5^2\sum x_i^3-$$

$$-5\sqrt{2}\,x_5^3\sum x_i^2+16\sum_{j<k}x_i^3x_jx_k-2\sqrt{2}\,x_5\sum x_i^3x_j-$$

$$-13\sqrt{2}\,x_5^3\sum_{i<j}x_ix_j-12\sum_{i<j}x_i^2x_j^2x_k+15\sqrt{2}\,x_5\sum_{i<j}x_i^2x_j^2-$$

$$-6x_5^2\sum x_i^2x_j+12\sum_{j<k<m}x_i^2x_jx_kx_m+12\sqrt{2}\,x_5\sum_{j<k}x_i^2x_jx_k+$$

$$+6x_5^2\sum_{i<j<k}x_ix_jx_k-12\sqrt{2}\,x_5\prod x_i,\quad P_6=4\sum x_i^6-4x_5^6-10\sum x_i^5x_j+$$

$$+20\sum x_i^4x_j^2-40\sum_{i<j}x_i^3x_j^3-20\sqrt{2}\,x_5^3\sum x_j^3+5\sqrt{2}\,x_5\sum x_i^4x_j+$$

$$+20x_5^4\sum_{i<j}x_ix_j-10\sum x_i^3x_j^2x_k-20\sqrt{2}\,x_5^3\sum x_i^2x_j+$$

$$+30x_5^2\sum_{i<j}x_i^2x_j^2+20\sqrt{2}\,x_5\sum_{j<k}x_i^3x_jx_k+30\sum_{\substack{i<j\\k<m}}x_i^2x_j^2x_kx_m-$$

$$-30\sqrt{2}\,x_5\sum_{i<j}x_i^2x_j^2x_k-60x_5^2\sum_{j<k}x_i^2x_jx_k-360x_5^2\prod x_i.$$

Тогда базисные инварианты $\mathfrak{S}_8$ степеней 4 и 10 имеют следующий вид:

$$x_5^4-2\sqrt{2}x_5\sum x_i^3+12\prod x_i=\frac{1}{3}(P_2^2-2P_4),\ c_1(4P_2^5-23P_2^3P_4+$$
$$+7{,}2P_2^2P_6+P_2^2P_3^2+30P_2P_4^2-2P_3^2P_4-14{,}4P_4P_6)+$$
$$+c_2(0{,}5P_2^5+5P_2^3P_4+0{,}9P_2^2P_6-25{,}5P_4^2P_2+P_2P_3P_5+2P_3^2P_4+$$
$$+11{,}7P_4P_6-2P_5^2),\quad c_2\neq 0.$$

Вторая форма при $c_1=-2\cdot 3^{-5}$, $c_2=3^{-5}$ совпадает с базисным инвариантом $\mathfrak{G}_8$, полученным Буркгардом.

2.9. Для группы Митчелла $\mathfrak{G}_9$ множество $C_2^{\mathfrak{G}_9}=\{x_1-x_2=0, x_2-x_3=0,\ x_3-x_4=0,\ x_4-x_5=0,\ x_1-\omega x_2=0,\ \sum x_i=0\}$, $i=\overline{1,6}$; $H^{\mathfrak{G}_9}=\{108\cdot 9!,\ N_2=N=126;\ 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 42\}$ (Шепард и Тодд [214]). Множество $M^{\mathfrak{G}_9}$ состоит из единичных векторов $M_0^{\mathfrak{G}_9}=\left\{\pm\frac{\omega^t\theta}{\sqrt{3}}(\vec{e}_i-\omega^{k_0}\vec{e}_j),\ \pm\frac{\omega^t}{\sqrt{3}}\sum\omega^{k_i}\vec{e}_i\right\}$, $i, j=\overline{1,6}$ $(i<j)$, k_0, k_i, $t=1, 2, 3$, $\sum k_i\equiv 0 \pmod 3$. Плоскости симметрии определяются уравнениями $x_i-\omega^{k_0}x_j=0$, $\sum\omega^{k_i}x_i=0$. Координаты векторов $M_0^{\mathfrak{G}_9}$ удовлетворяют диофантову уравнению $K_{12}=2$, где K_{12} — экстремальная действительная 12-мерная квадратичная форма (Коксгер и Тодд [151]). Форма K_{12} определяет действительную решетку Λ_6^{ω} (решетку Коксгера — Тодда), которая задает наиплотнейшую (из известных) 12-мерную упаковку шаров. При этом $\Lambda_6^{\omega}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(x_1, x_2, \ldots, x_6)\,|\,x_i\in Z[\omega],\ x_1\equiv\ldots\equiv x_6 \pmod\theta),\ \sum x_i\equiv 0 \pmod 3)\right\}$, $\theta=\omega-\omega^2$. Группа автоморфизмов Λ_6^{ω} совпадает с $\mathfrak{G}_8$; охватывающий радиус Λ_6^{ω} равен $\sqrt{8/3}$ упаковочного радиуса. Если решетку E_6 и двойственную ей решетку E_6^* вложить в U^6, то Λ_6^{ω} будет $Z[\omega]$—оболочкой E_6 и θE_6^*.

Конвей и Слоун [148] доказали (с помощью специальной программы для ЭВМ), что многочлены $I_{n_i}^{\mathfrak{G}_9}$ порождают алгебру $I^{\mathfrak{G}_9}$. Новое доказательство этого утверждения дал О. И. Рудницкий [101]. Инварианты $I_{n_i}^{\mathfrak{G}_9}$ имеют следующий развернутый вид:

$$I_6^{\mathfrak{G}_9}=\sum x_i^6-10\sum_{i<j}x_i^3x_j^3-180\prod x_i,$$

$$I_{12}^{\mathfrak{G}_9}=17\sum x_i^{12}-715\sum x_i^9x_j^3+3234\sum_{i<j}x_i^6x_j^6+$$
$$+2310\sum_{j<k}x_i^6x_j^3x_k^3+46200\sum_{i<j<k<l}x_i^3x_j^3x_k^3x_l^3+$$
$$+\left(11\,880\sum x_i^6+103\,950\sum_{i<j}x_i^3x_j^3\right)\prod x_i+935\,550\prod x_i^2,$$

$$I_{18}^{(\mathfrak{S})_6}=911\sum x_i^{18}-148\,920\sum x_i^{15}x_j^3+3\,378\,648\sum x_i^{12}x_j^6-$$
$$-8\,873\,150\sum_{i<j}x_i^9x_j^9-92\,820\sum_{j<k}x_i^{12}x_j^3x_k^3-1\,021\,020\sum x_i^9x_j^6x_k^3-$$
$$-4\,288\,284\sum_{i<j<k}x_i^6x_j^6x_k^6-20\,420\,400\sum_{j<k<l}x_i^9x_j^3x_k^3x_l^3-$$
$$-85\,765\,680\sum_{\substack{i<j\\k<l}}x_i^6x_j^6x_k^3x_l^3-1\,715\,313\,600\sum_{j<k<l<m}x_i^6x_j^3x_k^3x_l^3x_m^3-$$
$$-\Bigl(257\,040\sum x_i^{12}+18\,378\,360\sum x_i^9x_j^3+63\,011\,520\sum_{i<j}x_i^6x_j^6+$$
$$+551\,350\,800\sum_{j<k}x_i^6x_j^3x_k^3+4\,824\,319\,500\sum_{i<j<k<l}x_i^3x_j^3x_k^3x_l^3\Bigr)\prod x_i-$$
$$-\Bigl(1\,240\,539\,300\sum x_i^6+6\,947\,020\,080\sum_{i<j}x_i^3x_j^3\Bigr)\prod x_i^2-$$
$$-34\,306\,272\,000\prod x_i^3\quad (i,\ j,\ k,\ l,\ m=\overline{1,\ 6}),$$
$$I_{24}^{(\mathfrak{S})_6}=6151\sum x_i^{24}-2\,489\,773\sum x_i^{21}x_j^3+165\,586\,729\sum x_i^{18}x_j^6-$$
$$-1\,608\,393\,358\sum x_i^{15}x_j^9+3\,326\,787\,919\sum_{i<j}x_i^{12}x_j^{12}+$$
$$+\frac{1}{16}\sum_{q=0}^{2}\sum_{d_i}\frac{24!}{\prod\limits_i(3d_i+q)!}\sum x_i^{3d_1}x_j^{3d_2}x_k^{3d_3}x_l^{3d_4}x_m^{3d_5}x_p^{3d_6}\times$$
$$\times\prod x_i^q\ \Bigl(\sum d_i=8-2q\Bigr),$$
$$I_{30}^{(\mathfrak{S})_6}=664\,301\sum x_i^{30}-539\,413\,630\sum x_i^{27}x_j^3+$$
$$+78\,888\,946\,500\sum x_i^{24}x_j^6-1\,900\,855\,102\,575\sum x_i^{21}x_j^9+$$
$$+11\,491\,489\,873\,500\sum x_i^{18}x_j^{12}-20\,608\,991\,265\,960\sum_{i<j}x_i^{15}x_j^{15}-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{q=0}^{2}\sum_{d_i}\frac{30!}{\prod\limits_i(3d_i+q)!}\sum x_i^{3d_1}x_j^{3d_2}x_k^{3d_3}x_l^{3d_4}x_m^{3d_5}x_p^{3d_6}\times$$
$$\times\prod x_i^q\ \Bigl(\sum d_i=10-2q\Bigr).$$

Здесь $d_1\geqslant\ldots\geqslant d_6\geqslant 0$; если в одночлене показатели переменных x_r и x_s равны, то $r<s$ для $r,\ s=\overline{1,\ 6}$; при $q=0$ число $d_1d_2d_3\neq 0$.

Форма

$$I_{42}^{\mathfrak{G}_9}=484\,275\,611\sum x_i^{42}-1\,111\,896\,806\,300\sum x_i^{39}x_j^3+$$
$$+508\,081\,243\,015\,892\sum x_i^{36}x_j^6-43\,186\,905\,879\,296\,725\sum x_i^{33}x_j^9+$$
$$+1\,071\,035\,260\,277\,500\,336\sum x_i^{30}x_j^{12}-$$
$$-9\,556\,930\,064\,120\,062\,960\sum x_i^{27}x_j^{15}+$$
$$+34\,257\,377\,810\,346\,518\,100\sum x_i^{24}x_j^{18}-5\,213\,303\,236\,547\,581\,890\times$$
$$\times\sum_{i<j} x_i^{21}x_j^{21}-\frac{1}{4}\sum_{q=0}^{2}\sum_{d_l}\frac{42!}{\prod\limits_i(3d_i+q)!}\sum x_i^{3d_1}x_j^{3d_2}x_k^{3d_3}x_l^{3d_4}x_m^{3d_5}x_p^{3d_6}\times$$
$$\times\prod x_i^q\ \left(\sum d_i=14-2q\right).$$

Отдельные из указанных форм могут быть использованы для построения образующих соответствующих степеней алгебры $I^{\mathfrak{G}_8}$ (О. И. Рудницкий [102]).

3. В пространстве $U^m\,(m>4)$ есть три типа правильных многогранников: вещественный m-симплекс, обобщенный m-крест β_m^n и взаимный ему обобщенный m-куб γ_m^n; β_m^2 и γ_m^2 — вещественные m-крест и m-куб (Шепард [213]). Многогранники β_m^n и γ_m^n зададим, соответственно, такими вершинами (Кокстер [149]): $(\theta^k, 0, \ldots, 0)$, $(0, \theta^k, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, \theta^k)$ и $(\theta^{k_1}, \theta^{k_2}, \ldots, \theta^{k_m})$, где θ есть первообразный корень n-ой степени из единицы, k, $k_i=\overline{1, n}$ $(i=\overline{1, m})$. Для некоторого делителя p числа n вершины γ_m^n при $\sum k_i\equiv 0 \pmod p$ — их будет qn^{m-1} $(n=pq)$ — задают многогранник $\frac{1}{p}\gamma_m^n$ с импримитивной группой симметрий $\mathfrak{G}_{m,p}^n=G(n, p, m)$, $m, n>1$ (Шепард [213]); $\mathfrak{G}_{m,1}^n=B_m^n$ — группа симметрий γ_m^n, $\mathfrak{G}_{m,n}^n=D_m^n\subset B_m^n$.

3.1. Множество $C_q^{\mathfrak{G}_{m,p}^n}=\{x_1=0\}$; $C_2^{\mathfrak{G}_{m,p}^n}=\{x_1-\theta x_2=0,$ $x_i-x_{i+1}=0\}$, $i=\overline{1, n-1}$; $H^{\mathfrak{G}_{m,p}^n}=\left\{qn^{m-1}\cdot m!,\quad N_2=\frac{m(m-1)n}{2},\right.$ $N_q=m;\, n, 2n, \ldots, (m-1)\,n,\, mq\}$ (Шепард и Тодд [214]).

Группа $\mathfrak{G}_{m,p}^n$ содержит отражения порядков q и 2 относительно плоскостей, соответственно, с уравнениями $x_i=0$ и

$$x_i-\theta^k x_j=0,\quad i, j=\overline{1, m}\quad (i<j),\quad k=\overline{1, n}. \tag{4}$$

Поэтому $M^{\mathfrak{G}_{m,p}^n}=\left\{\theta^l\vec{e_i},\ \frac{\theta^l}{\sqrt{2}}(\vec{e_i}-\theta^k\vec{e_j})\right\}$, $l=\overline{1, n}$. Формы

$$I_{ns}^{\mathfrak{G}^n_{m,p}}=\left(m-1+\frac{2^{\frac{ns}{2}}}{n}\right)\sum_{i=1}^{m}x_i^{ns}+\sum_{k=1}^{s-1}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m}(-1)^{\sigma k}C_{ns}^{nk}x_i^{n(s-k)}x_j^{nk}, \quad (5)$$

где $\sigma=0$ и $s=\overline{1, m-1}$, если n четно, $\sigma=1$ и $s=2, 4, 6, \ldots$ $\ldots, m-1-\delta$, если n нечетно; $\delta=0\,(1)$ при нечетном (четном) m.

Инварианты $I_{ns}^{\mathfrak{G}^n_{m,p}}$ четных степеней ns являются образующими алгебры $I^{\mathfrak{G}^n_{m,p}}$ при всех соответствующих значениях s, если $n\neq 2^t$ $(t\geqslant 1)$, и при $s=\overline{1, m-1}$, не удовлетворяющих условию

$$m=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{s}C_{ns}^{nk}-\frac{2^{\frac{ns}{2}}}{n},$$

если $n=2^t$ (О. И. Рудницкий [98]).

3.2. Так как $B_m^n=\mathfrak{G}^n_{m,1}$, то $C_m^{B_m^n}=C_m^{\mathfrak{G}^n_{m,1}}$, $C_2^{B_m^n}=\{x_i-x_{i+1}=0\}$, $i=\overline{1, n-1}$; $M^{B_m^n}=M^{\mathfrak{G}^n_{m,p}}$; $H^{B_m^n}=\Big\{n^m\cdot m!,\quad N_2=\frac{m\,(m-1)\,n}{2}$ $N_n=m;\ n, 2n, \ldots, mn\Big\}$ (Шепард и Тодд [214]). Многочлены $I_{ns}^{B_m^n}$ имеют вид (5), если $s=\overline{1, m}$ (n четно) или $s=2, 4, \ldots$ $\ldots, m-1+\delta$ (n нечетно). Выделим

$$m=2^{2^{t-1}s-t}\left(2^{2^{t-1}s-1}-1\right)+\rho 2^{2^t s-t}\sum_{k=1}^{2^{t-1}-1}(-1)^{ks}\cos^{2^t s}\frac{k\pi}{2^t}, \quad (6)$$

где $\rho=0\,(1)$ при $t=1$ (>1). Инварианты $I_{ns}^{B_m^n}$ четных степеней ns — образующие алгебры $I^{B_m^n}$ при всех соответствующих значениях s, если $n\neq 2^t$, и при $s=\overline{1, m}$, не удовлетворяющих условию (6), если $n=2^t$ (О. И. Рудницкий [98]).

3.3. Группа D_m^n содержит отражения второго порядка, относительно плоскостей, определяемых уравнениями (4); $C_2^{D_m^n}=C_2^{\mathfrak{G}^n_{m,n}}$, $H^{D_m^n}=\Big\{n^{m-1}\cdot m!,\ N_2=N=\frac{m\,(m-1)\,n}{2};\ n,\ 2n, \ldots$ $\ldots, (m-1)\,n, m\Big\}$ (Шепард и Тодд [214]); $M^{D_m^n}=\left\{\frac{\theta^l}{\sqrt{2}}(\vec{e_i}-\theta^k\vec{e_j})\right\}$, см. $M^{\mathfrak{G}^n_{m,p}}$. Базис алгебры $I^{D_m^n}$ образуют степенные суммы $\sum x_i^{nj}$ $(j=\overline{1, m-1})$ и форма $x_1\ldots x_m$ (Шепард и Тодд [214]). Заменив в (5) первый коэффициент на $m-1$, получим многочлены $I_{ns}^{D_m^n}$. Выделим такие соотношения:

$$m=\frac{2^{ns-1}}{n}\left(1+2\rho\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^{ks}\cos^{ns}\frac{k\pi}{n}\right), \qquad (7)$$

$$m=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{s}(-1)^{k}C_{ns}^{nk}. \qquad (8)$$

Формы $I_{ns}^{D_m^n}$ четных степеней ns являются образующими алгебры $I^{D_m^n}$ при тех значениях $s=\overline{1, m-1}$, которые не удовлетворяют условию (7), если n четно, и при $s=2, 4, \ldots, n-1-\delta$, не удовлетворяющих (8), если n нечетно (О. И. Рудницкий [98]).

В случае $n=2$ соотношения (6) и (7) получены в работе [43] ($B_m^2=B_m$, $D_m^2=D_m$). Идея доказательств результатов [98] пп. 3.1—3.3) та же, что и в [43].

§ 3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ПЛОСКОСТЕЙ КОСОЙ СИММЕТРИИ

Пусть в пространстве E^m задана $(m-1)$-мерная нецилиндрическая алгебраическая поверхность F_n порядка n с бесконечным множеством B_μ плоскостей косой (в частности, ортогональной) симметрии. Направления симметрии плоскостей B_μ определяются векторами и образуют множество N_μ; μ-плоскость Π^μ — его линейная оболочка. В декартовых координатах x_i $(i=\overline{1, m})$ зададим поверхность F_n уравнением

$$\sum_{j=0}^{n}\varphi_j(\vec{x})=0, \qquad (9)$$

где φ_j есть формы степеней j от координат вектора $\vec{x}=(x_i)$. Уравнение $\varphi_n=0$ определяет асимптотический конус K_n поверхности F_n с вершиной в начале координат O. Отражения относительно плоскостей B_μ порождают бесконечную группу G_μ. Если она разлагается в произведение бесконечной группы G'_μ и некоторой конечной группы, то последняя исключается из рассмотрения, т. е. считаем $G_\mu=G'_\mu$. Пусть $N_\lambda\subseteq N_\mu$ — бесконечная $G_\mu(\vec{u})$-орбита некоторого элемента $\vec{u}\in N_\mu$; λ — плоскость $\Pi^\lambda(x_k)\subseteq\Pi^\mu(x_r)\ni O$, $k=\overline{1, \lambda}$, $r=\overline{1, \mu}$. Плоскости B_μ по направлениям N_λ составляют множество B_λ и определяют группу $G_\lambda\subseteq G_\mu$. Индексы c, s или t, поставленные при символах, скажем, B_μ, N_μ, Π^μ, G_μ, означают: c — что направления симметрии являются неасимптотическими для F_n; s и t соответствуют двум различным типам асимптотических направлений. Строение N_λ устанавливает

Теорема 1. Линейная оболочка Π^λ множества N_λ поверхности F_n является суммой таких 2-плоскостей Π^2_α $(\alpha=\overline{1, p})$, что каждая 2-плоскость, параллельная любой из 2-плоскостей Π^2_α и не лежащая на F_n, пересекает ее по вещественным и, может быть, мнимым коникам с общей симметрией (у них общие оси и соответствующие направления симметрии).

Эта теорема получена в [39] $(N_\lambda=N^c_\lambda)$ и [40] $(N_\lambda=N^t_\lambda)$. Независимо ее доказал А. Е. Залесский [36] (для конуса K_n), если G_λ — приводимая неразложимая группа. Более точно, основной результат работы [36] заключается в следующем: приводимая неразложимая линейная группа характеристики 0, которая порождена псевдоотражениями, замкнута в топологии Зарисского и не содержит трансвекций, представима в виде произведения поэлементно перестановочных групп, каждая из которых содержится в подходящей ортогональной группе. Новое доказательство теоремы 1 предложил А. И. Криворучко [75]. В [50] (см. также [46], [55]) идея доказательства теоремы 1, данного в [39], [40], перенесена на случай инвариантности относительно G_λ m-мерной фигуры, которая компактна или при несчетном N_λ неограничена и замкнута.

1. Покажем строение множества B_λ, содержащего параллельные плоскости (пересекающиеся плоскости также могут входить в B_λ); приведем общее уравнение поверхности F_n. Здесь под общим уравнением F_n подразумеваем ее общее каноническое уравнение.

Теорема 2. Пусть множество B^c_λ поверхности F_n содержит параллельные плоскости. Тогда поверхность F_n можно задать уравнением

$$\sum_{j=0}^{s} A_j(x_\gamma)(a_1x_1^2+\ldots+a_{\lambda-1}x_{\lambda-1}^2+cx_\lambda)^{s-j}=0, \tag{10}$$

где $A_j(x_\gamma)$ есть многочлены от x_γ $(\gamma=\overline{\lambda+1, m})$, $n=2s$. Плоскости симметрии поверхности F_n по направлениям векторов N^c_λ являются диаметральными плоскостями квадрики с уравнением $a_1x_1^2+\ldots+a_{\lambda-1}x_{\lambda-1}^2+cx_\lambda=0$.

Теорема 3. Если множество B_λ поверхности F_n содержит параллельные плоскости с асимптотическими для нее направлениями симметрии, то поверхность F_n можно задать уравнением вида (10) при $2s<n$. Плоскости B_λ не являются диаметральными плоскостями поверхности F_n (с учетом их вырождения).

Теоремы 2 и 3 установлены в работе [39]; подробные доказательства приведены в [54]. Из этих теорем следует характеристический признак параболоида: если при $\lambda=m$ неприводимая над полем комплексных чисел вещественная алгебраическая поверхность имеет параллельные плоскости, то она является параболоидом.

Пусть векторы N_μ задают неасимптотические направления для поверхности F_n $(N_\mu=N_\mu^c)$. Выясним строение множеств N_μ^c и B_μ^c; между элементами N_μ^c и B_μ^c установим взаимно однозначное соответствие (указанные множества определяют G_μ^c).

Теорема 4. Если множество B_λ^c поверхности F_n не содержит параллельных плоскостей, то F_n определяется уравнением

$$\sum_{j=0}^{s} A_j(x_\gamma)\left(\sum_{p=1}^{\tau} a_p x_p^2+2\sum_{k=1}^{\lambda}\xi_k(x_\gamma)\,x_k\right)^{s-j}=0, \tag{11}$$

где $n=2s$, все $a_p\neq 0$, $\deg\xi_k(x_\gamma)\leqslant 1$, $1\leqslant\tau\leqslant\lambda\leqslant m$, $\gamma=\overline{\lambda+1,m}$. Множество B_λ^c состоит из диаметральных плоскостей квадрики с уравнением $\sum\limits_{p=1}^{\tau} a_p x_p^2+2\sum\limits_{k=1}^{\lambda}\xi_k(x_\gamma)\,x_k=0$.

Из теоремы 4 следует характеристический признак центральной квадрики: если неприводимая над полем комплексных чисел вещественная алгебраическая поверхность, инвариантная относительно группы G_m^c, не имеет параллельных плоскостей симметрии, то она является центральной квадрикой. В случае мнимого асимптотического конуса (дополнительное условие) получаем признак эллипсоида.

Вообще говоря, Π_c^λ принадлежит такой λ'-плоскости $\Pi_c^{\lambda'}$ $(\lambda'\geqslant\lambda)$, что любая $\Pi^{\lambda'}\parallel\Pi_c^{\lambda'}$ пересекает F_n по $(\lambda'-1)$-квадрикам с общей симметрией. Для получения общего уравнения поверхности F_n достаточно рассмотреть $\Pi_c^{\mu_0}$, где $\mu_0=\max\{\lambda'\}$, $\mu_0\geqslant\lambda$. Из теорем 2 и 4 находим, что некоторая μ'-плоскость $\Pi_c^{\mu'}(x_r)$, $r=\overline{1,\mu'}\geqslant\mu$, разлагается в прямую сумму μ_j-плоскостей $\Pi_c^{\mu_j}\left(j=\overline{0,p}\leqslant\left[\frac{\mu'}{2}\right]-1\right)$ — линейных оболочек множеств $N_{\mu_j}^c\subset\subset N_{\mu'}^c$ соответственно (числа μ_j при $j>0$ аналогичны μ_0); $N_{\mu'}^c$ и $B_{\mu'}^c$ определяют группу $G_{\mu'}^c$. При этом справедлива [40]

Теорема 5. Общее уравнение поверхности F_n, инвариантной относительно группы $G_{\mu'}^c$, можно записать так:

$$F(f_j,\,x_{\mu'+1},\,\ldots,\,x_m)=0,\quad j=\overline{0,p}\leqslant\left[\frac{\mu'}{2}\right]-1,\quad n=2s, \tag{12}$$

где квадратичные многочлены $f_0(x_1,\ldots,x_{\mu_0})$, $f_1(x_{\mu_0+1},\ldots$ $\ldots,x_{\mu_0+\mu_1}),\ldots,f_p(x_{\mu'-\mu_p+1},\ldots,x_{\mu'})$ содержат все указанные в скобках переменные (и зависят еще от $x_{\mu'+1}, \ldots, x_m$), F есть многочлен от всех своих аргументов, имеющий степень s относительно f_j; при заданном j μ_j-плоскость $\Pi^{\mu_j} \| \Pi_c^{\mu_j}$ пересекает F_n по $(\mu_j - 1)$-квадрикам с общей симметрией. Плоскости симметрии поверхности F_n по направлениям векторов $N_{\mu_j}^c$ являются диаметральными плоскостями квадрик с уравнениями $f_j = 0$; если $p >$ > 0, то эти квадрики — цилиндры.

И наоборот, если поверхность F_n задана уравнением вида (12), то она инвариантна относительно группы $G^c{}_{\mu'}$; диаметральные плоскости вышеуказанных квадрик являются плоскостями симметрии F_n, принадлежащими ее множеству диаметральных плоскостей.

2. Пусть группа $G_\mu = G_\mu^t$. Индекс t означает, что линейная оболочка произвольной $G_\mu^t(\vec{u})$-орбиты вектора $\vec{u} \in N_\mu^t$ — скажем, Π_t^λ — удовлетворяет такому условию: хотя бы одна λ-плоскость, не лежащая на F_n и параллельная Π_t^λ, не пересекает F_n по $(\lambda - 1)$-квадрикам. Имеет место [40], [54]

Теорема 6. Если поверхность F_n инвариантна относительно группы G_λ^t, то число $\lambda > 2$ и уравнение F_n допускает вид

$$\sum_{j=0}^{s} A_j(x_\gamma)(x_1 \ldots x_\lambda)^{s-j} = 0,$$

где $n \geqslant \deg A_j + \lambda(s - j)$, $\gamma = \overline{\lambda + 1, m}$. Множество B_λ^t состоит из плоскостей симметрии поверхности с уравнением $x_1 \ldots x_\lambda =$ $= c \neq 0$.

Тетраэдральная поверхность с уравнением $x_1 \ldots x_m = c \neq 0$ инвариантна относительно группы $D_m' \simeq D_m \subset G_m^t$. Из теоремы 6 находим характеристический признак этой поверхности: если неприводимая над полем комплексных чисел вещественная алгебраическая поверхность инвариантна относительно группы G_m^t, то она является тетраэдральной поверхностью. Его формулировка допускает замену G_m^t на группу G_m, содержащую D_m как единственную неприводимую конечную группу симметрий.

Пусть μ-плоскость $\Pi_t^\mu(x_r)$, $r = \overline{1, \mu}$, разлагается в прямую сумму μ_j-плоскостей $\Pi_t^{\mu_j}$ $(j = \overline{0, p})$, которые являются линейными оболочками орбит $N_{\mu_j}^t$ $(\mu_0 = \lambda)$. С помощью теоремы 6 устанавливается, что число $p \leqslant \left[\frac{\mu}{3}\right] - 1$ и любая μ_k-плоскость $(0 \leqslant k \leqslant p)$, не лежащая на поверхности F_n и параллельная $\Pi_t^{\mu_k}$, пересекает F_n по вещественным и, может быть, мнимым тетраэдральным $(\mu_k - 1)$-поверхностям. При этом существенно используется следующее: плоскость симметрии π поверхности F_n, скажем, по направлению $\vec{u} \in N_\lambda^t$ является компонентой сопряженной $\vec{u}$ диаметральной квадрики поверхности, определяемой уравнением $x_1 \ldots x_\lambda = c$; далее, координатную систему можно выбрать так, что произвольная π параллельна осям $Ox_{\lambda+1}, \ldots, Ox_m$. Итак, справедлива [40]

Теорема 7. Общее уравнение поверхности F_n, инвариантной относительно группы G_μ^t, можно записать так:

$$F(\zeta_j, x_{\mu+1}, \ldots, x_m) = 0, \quad j = \overline{0, p} \leqslant \left[\frac{\mu}{3}\right] - 1, \tag{13}$$

где $\zeta_0 = x_1 \ldots x_{\mu_0}$, $\zeta_1 = x_{\mu_0+1} \ldots x_{\mu_0+\mu_1}, \ldots, \zeta_p = x_{\mu-\mu_p+1} \ldots x_\mu$, F есть многочлен от всех своих аргументов, его степень относительно ζ_j не превосходит $\left[\frac{n}{3}\right]$. Плоскости симметрии поверхности F_n по направлениям векторов орбит $N_{\mu_j}^t$ являются плоскостями симметрии поверхностей с уравнениями $\zeta_j = c$ соответственно.

И наоборот, если поверхность F_n задана уравнением вида (13), то она инвариантна относительно группы G_μ^t.

Теоремы 5 и 7 имеются в обзорной статье [42]; здесь они приведены для полноты изложения соответствующих результатов.

3. Пусть направления симметрии являются асимптотическими для поверхности F_n, причем линейная оболочка каждой $G_\mu(\vec{u})$-орбиты вектора $\vec{u} \in N_\mu$ — например, Π^λ — удовлетворяет следующему условию: хотя бы одна λ-плоскость, не лежащая на F_n и параллельная Π^λ, пересекает F_n по $(\lambda-1)$-квадрикам с общей симметрией. Выделим этот случай тем, что в соответствующих обозначениях п. 2 вместо t поставим индекс s. А. Е. Велесько [13] доказал существование групп G_μ с бесконечно порожденными кольцами инвариантов. В основе его конструкции лежит известный пример Нагаты линейной группы, кольцо инвариантов которой бесконечно порождено. Из теорем 5 и 7 следует, что каждая такая G_μ является группой G_μ^s. Строение множества B_λ^s выясняет [40], [54]

Теорема 8. **Поверхность F_n без параллельных плоскостей симметрии, инвариантная относительно группы G_λ^s, определяется уравнением вида (11), если $2s > n \geqslant \deg A_j + 2(s-j)$, $1 \leqslant \tau \leqslant \leqslant \lambda < m$; при этом $B_\lambda^s = B_\lambda^c$.**

Эта теорема аналогична теореме 4. Соответствующие поверхности существенно отличаются своими геометриями, хотя их уравнения и близки по форме.

Положим $\xi_k = \sum_\gamma b_{k\gamma} x_\gamma + b_k$, $k = \overline{1, \lambda}$. Тогда уравнение

$$\sum_p a_p u_p x_p + \sum_\gamma \left(\sum_k b_{k\gamma} u_k\right) x_\gamma + \sum_k b_k u_k = 0 \qquad (14)$$

задает плоскость симметрии поверхности F_n, сопряженную вектору $\vec{u} = (u_l)$. Плоскости множества B^s_λ (теорема 8) проходят через одну точку, скажем, $O\,(b_k = 0)$. Коэффициенты при x_γ в уравнении (14) могут обращаться тождественно в нуль. Если это имеет место в случае $\gamma = \gamma_0$, то $b_{k\gamma_0} = 0$. Выберем оси координат так, что в (14) числа $b_{k\gamma_1} = 0$, $\gamma_1 = \overline{\lambda+1, m'} \leqslant m$. Любая из плоскостей B^s_λ содержит оси $Ox_{\tau+1}, \ldots, Ox_{m_0}$, где $m_0 = \lambda$ или $m' > \lambda$. При этом предполагается, что плоскости $B^s_\lambda (m_0 - \tau)$ — параллельны — и только; линейные формы $\xi_k = \xi_k(x_{\gamma_2})$, $\gamma_2 = \overline{m_0 + 1, m}$.

Множество N^s_μ $(\mu > \lambda)$ состоит из нескольких орбит; μ-плоскость Π^μ_s является суммой различных μ_j-плоскостей $\Pi^{\mu_j}_s$ $(j = \overline{0, q})$, $\mu_0 = \lambda$. Имеет место [54]

Лемма 1. Если $\mu > \lambda$, то $m_0 = m'$ и μ_r-плоскость $\Pi^{\mu_r}_s$ $(0 < r \leqslant q)$ параллельна $(m' - \tau)$-плоскости $\Pi^{m'-\tau}(x_{\tau+1}, \ldots, x_{m'})$.

Плоскости $B^s_{\mu_r}$ параллельны осям Ox_p $(p = \overline{1, \tau})$, которые задают направления симметрии N^s_λ. Так как векторы $\Pi^{\lambda-\tau}(x_h)$, $h = \overline{\tau+1, \lambda}$, не входят в N^s_λ, то возможен случай $\Pi^{\lambda-\tau} \cap \Pi^{\mu_r}_s \neq \vec{0}$. Поэтому Π^μ_s не будет, вообще говоря, прямой суммой $\Pi^{\mu_j}_s$.

Возьмем μ_1-плоскость $\Pi^{\mu_1}_s(x_l)$, $l = \overline{\alpha+1, \alpha+\mu_1} \leqslant m'$ $(\alpha \geqslant \tau$, $\alpha + \mu_1 > \lambda)$. Уравнение (9) поверхности F_n (с учетом леммы 1) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{s} B_j(x_v)\,\theta^{s-j} = 0, \qquad (15)$$

где $\theta = \sum_{\beta=\lambda+1}^{\tau_0} a_\beta x_\beta^2 + 2\sum_l \theta_l(x_{\gamma'})\,x_l$, $n \geqslant \deg B_j + 2(s-j)$, $B_0 \neq 0$, $\lambda + 1 \leqslant \tau_0 \leqslant \alpha + \mu_1$, $v = i \neq l$, $\gamma' = \overline{\alpha + \mu_1 + 1, m}$.

Пусть $\Pi^\lambda_s \cap \Pi^{\mu_1}_s = \Pi^\varepsilon(x_w)$, $w = \overline{\alpha+1}$, $\varepsilon \leqslant \lambda$. Оси Ox_w не задают направления симметрии и, значит, степень x_w в θ равна единице. Из уравнений (11) и (15) находим $A_0\xi^s_w = B_0\theta^s_w$. Следовательно, многочлены A_0, B_0 (как и ξ_w, θ_w) зависят только от переменных $x_{\gamma'}$.

Лемма 2. В случае $\varepsilon > \alpha + 1$ выполняются соотношения $A_0 = B_0$ и $\xi_{w'} = \theta_{w'}$, где $w' \in \{w\}$.

Если каждая из λ'-плоскостей $\Pi^{\lambda'} \parallel \Pi^\lambda_s$ $(\lambda' \geqslant \lambda)$ пересекает поверхность F_n по $(\lambda' - 1)$-квадрикам с общей симметрией, то положим $m_1 = \max\{\lambda'\}$. Введем аналогично число $m_2 = \max\{\mu'_1\}$ для $\Pi^{\mu'_1} \parallel \Pi^{\mu_1}_s$ $(\mu'_1 \geqslant \mu_1)$. Будем считать $\lambda = m_1$ и $\mu_1 = m_2$; $\Pi^{m_1}_s$, $\Pi^{m_2}_s$

соответствуют множествам $N^s_{m_1}$, $N^s_{m_2}$. С использованием теоремы 8 и леммы 2 устанавливается [54], [59]

Теорема 9. $\mathrm{Dim}(\Pi_s^{m_1}\cap\Pi_s^{m_2})\leqslant 1$.

При доказательстве теоремы 9 выявлена

Лемма 3. Если $\Pi_s^{m_1}\cap\Pi_s^{m_2}\neq\vec{0}$, то $\xi_\varepsilon\neq\theta_\varepsilon$ и

$$A_0(x_{\gamma'})=A_0'\theta_\varepsilon^s,\quad B_0(x_{\gamma'})=A_0'\xi_\varepsilon^s. \tag{16}$$

Теперь уравнения (11) и (15) поверхности F_n запишем так:

$$\sum_{j=0}^{s}A_j(x_\gamma)\left[\sum_{p=1}^{\tau}a_px_p^2+2\sum_{k=1}^{\lambda}\xi_k(x_{\gamma_2})\,x_k\right]^{s-j}=0, \tag{17}$$

$$\sum_{j=0}^{s}B_j(x_v)\left[\sum_{\beta=\lambda+1}^{\tau_0}a_\beta x_p^2+2\sum_{l=\lambda}^{\lambda+\mu_1-1}\theta_l(x_{\gamma'})\,x_l\right]^{s-j}=0, \tag{18}$$

где A_0, B_0 удовлетворяют условиям (16); $\gamma=\overline{\lambda+1,m}$, $1\leqslant\tau<\lambda$, $\lambda+1\leqslant\tau_0\leqslant\lambda+\mu_1-1$, $\gamma'=\overline{\lambda+\mu_1,m}$, $v=i\neq l$ и $\gamma_2=\overline{m'+1,m}$.

Лемма 4. Уравнение поверхности F_n, инвариантной относительно группы $G_\mu^s\,|\,\Pi_s^{m_1}\cap\Pi_s^{m_2}\neq\vec{0}$, приводится к любому из видов (17) и (18).

4. Перейдем к рассмотрению общей схемы строения μ-плоскости Π_s^μ и множества B_μ^s (они определяют группу G_μ^s).

Существует такой набор μ_j-плоскостей $\Pi_s^{\mu_j}$ $(j=\overline{0,q})$ — линейных оболочек $N^s_{\mu_j}$, — что

$$\Pi_s^\mu=\Pi_s^{\mu_0}+\ldots+\Pi_s^{\mu_q}, \tag{19}$$

причем каждая из μ_j'-плоскостей $\Pi^{\mu_j'}\|\Pi_s^{\mu_j}$ $(\mu_j'>\mu_j)$ не пересекает поверхность F_n по $(\mu_j'-1)$-квадрикам с общей симметрией. Множества $B^s_{\mu_j}$ состоят из диаметральных плоскостей цилиндров второго порядка, определяемых уравнением F_n, — согласно теореме 8. Плоскости $B^s_{\mu_j}$ пересекаются с любой из μ_j-плоскостей $\Pi^{\mu_j}\|\Pi_s^{\mu_j}$ по (μ_j-1)-плоскостям, параллельным в Π^{μ_j} некоторым γ_j-плоскостям Π^{γ_j}, $0\leqslant\gamma_j\leqslant\mu_j-1$. Каждое из множеств $\{\Pi^{\mu_j}\cap\pi_j\}$, где π_j — произвольный элемент $B^s_{\mu_j}$, содержит $d_j=\mu_j-\gamma_j$ линейно независимых (μ_j-1)-плоскостей; они являются диаметральными (μ_j-1)-плоскостями (μ_j-1)-поверхностей $\Pi^{\mu_j}\cap F_n$ и сопряжены направлениям симметрии с линейными оболочками

$$\Pi^{d_j}=\Pi_s^{\mu_j}\ominus\Pi^{\gamma_j}. \tag{20}$$

Здесь плоскости $B^s_{\mu_j}$, сопряженные векторам Π^{d_j}, проходят через Π^{γ_j}.

Выделим следующее утверждение (как модификацию леммы 1).

Лемма 5. Пусть f-плоскость Π_s^f (g-плоскость $\Pi_s^g \neq \Pi_s^f$) есть линейная оболочка орбиты $N_f^s(N_g^s)$ некоторого вектора $\vec{u} \in N_f^s$ ($\vec{v} \in N_g^s$) относительно группы G_μ^s. Тогда плоскости B_μ^s по направлениям N_f^s параллельны Π_s^g.

Положим $\Pi^{\nu_r} = \Pi_s^{\mu_0} + \ldots + \Pi_s^{\mu_{r-1}}$ $(0 < r \leqslant q)$. Лемма 5 показывает, что плоскости множества $B_{\mu_r}^s$ параллельны Π^{ν_r}; прямые $\Pi_s^{\mu_r} \cap \Pi^{\nu_r}$ не определяют направления симметрии, т. е. являются асимптотическими для $(\mu_r - 1)$-поверхности $\Pi_s^{\mu_r} \cap F_n$.

Линейные оболочки всех орбит $(\neq N_f^s)$ векторов N_μ^s относительно G_μ^s дают в сумме, скажем, ν-плоскость Π^ν. Построим d-плоскость $\Pi^d \in \Pi_s^f$ аналогично $\Pi^{d_j} \in \Pi_s^{\mu_j}$. Согласно (20) и лемме 5, в Π^d можно выбрать оси координат Ox_α $(\alpha = \overline{1, d})$ так, что плоскости B_μ^s по направлениям симметрии, определяемым прямыми Π^d, являются диаметральными плоскостями цилиндров с уравнениями $\sum\limits_\alpha a_\alpha x_\alpha^2 = 0$, $a_\alpha \neq 0$; все другие оси координат лежат в Π^ν и $\Pi_s^f \ominus \Pi^d$. Следовательно, имеет место

Лемма 6. $\mathrm{Dim}(\Pi^\nu + \Pi^d) = \nu + d$.

Из лемм 5 и 6 следует

Лемма 7. В разложении (19) μ_j-плоскости $\Pi_s^{\mu_j}$ определяются однозначно (с точностью до их нумерации).

Пусть $\Pi^{\omega_k} = \Pi^\nu$, где $k \in \{0, \ldots, q\}$, $f = \mu_k$; $\Pi^{p_k} = \Pi_s^{\mu_k} \cap \Pi^{\omega_k}$, $p_k \geqslant 0$. Зафиксируем $\Pi_s^{\mu_j}$, считая, например, $\gamma_0 \geqslant \gamma_1 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_q$. Так как $\Pi^{\nu_r} \subseteq \Pi^{\omega_r}$ $(0 < r \leqslant q)$, то $\Pi^{v_r} = \Pi_s^{\mu_r} \cap \Pi^{\nu_r}$, $v_r \leqslant p_r$, и $\Pi^{\gamma_r} = \Pi^{v_r} \oplus \Pi^{c_r}$, $\gamma_r = v_r + c_r$.

Лемма 8. Если $\Pi^{t_r} = \Pi^{\gamma_0} + \ldots + \Pi^{\gamma_{r-1}}$, то $\Pi^{v_r} = \Pi^{\gamma_r} \cap \Pi^{t_r}$.

Так как Π^{γ_k} $(0 \leqslant k < q)$ пересекает, может быть, Π^{γ_j} $(j > k)$ по прямым, то $\delta_k \geqslant 0$ есть размерность их множества P_k, не содержащего при $k > 0$ прямых Π^{t_k}. В Π^{d_j}, Π^{c_j} $(c_0 = \gamma_0)$ поместим d_j, c_j осей координат; δ_j, $j < q$, из них принадлежат P_j. Переобозначим эти оси через Oy_{i_1}, $i_1 = \overline{1, m_1}$, и Oz_{i_2}, $i_2 = \overline{1, m_2}$, соответственно (другие — Ox_{i_3}, $i_3 = \overline{1, m_3}$; $m_1 + m_2 = \mu$, $\mu + m_3 = m$); $\tilde{\gamma}_k \leqslant \gamma_k$, $0 \leqslant k \leqslant q$, есть число всех осей координат в Π^{γ_k}, $\gamma_j = \tilde{\gamma}_j$ при $j < 2$. Далее, $\lambda_k \geqslant 0$ — число осей в Π^{γ_k}, не принадлежащих $\{\Pi^{\gamma_k} \cap \Pi^{\gamma_j}, j \neq k\}$; $d_r = d_0 + \ldots + d_{r-1}$, $\beta_r = \lambda_0 + \ldots + \lambda_{r-1}$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. На основании теорем 3, 9 и лемм 1—8 справедлива [56],]59]

Теорема 10. Поверхность F_n, инвариантная относительно группы G_μ^s, определяется любым из следующих уравнений:

$$\Phi_j \equiv \sum_{t=0}^{s_j} R_{j,t}\left(\sum_{\rho=1}^{d_j} a_{j,\rho} y^2_{\alpha_j+\rho} + \sum_{\tau=1}^{\lambda_j} \xi_{j,\tau} z_{\beta_j+\tau} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha(j)} \varkappa_{j,\alpha(j)} z_{\alpha(j)}\right)^{s_j - t} = 0, \quad j = \overline{0, q},$$

где $\sum\limits_j d_j = m_1$, $\sum\limits_j \lambda_j = \beta \leqslant m_2$, индекс $\alpha(k)$, $0 \leqslant k \leqslant q$, принимает $\sigma_k = \tilde{\gamma}_k - \lambda_k$ различных значений, принадлежащих $\{\beta+1, \ldots, m_2\}$; многочлен $R_{k,0}$ содержит s_k-ую степень произведения σ_k линейных функций из $\{\varkappa_{j,\alpha(j)}, j \neq k\}$. При этом γ_j-плоскости Π^{γ_j} $(j = \overline{0, r}$, $1 < r \leqslant q)$ определяют такое невырожденное аффинное преобразование A_{t_r}, действующее вне Π^{t_r} тождественно, что уравнение $A_{t_r}(F_n)$ имеет вид

$$\sum_{t=0}^{s_r} R'_{r,t} \zeta_r^{s_r - t} = 0;$$

многочлен

$$\zeta_r = \sum_{\rho=0}^{d_r} a'_{r,\rho} y^2_{\alpha_r+\rho} + \sum_{\tau=1}^{\gamma_r} \xi'_{r,\tau} z_{\beta_r+\tau}.$$

В указанных уравнениях $a_{j,\rho}$, $a'_{r,\rho}$ — вещественные коэффициенты; многочлены $R_{j,t}$, $R'_{r,t}$ и линейные функции $\xi_{j,t}$, $\varkappa_{j,\alpha(j)}$, $\xi'_{r,\tau}$ зависят только от переменных x_{i_3}. Плоскости множества $B^s_{\mu_r}$ состоят из диаметральных плоскостей цилиндра с уравнением $\zeta_r = 0$.

И наоборот, если поверхность F_n может быть задана каждым из уравнений $\Phi_j = 0$, то она инвариантна относительно группы G^s_μ, соответствующей направлениям симметрии с линейной оболочкой Π^μ_s.

Пусть $\xi'_{k,\tau} = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} b_{\beta_k+\tau,\alpha} x_\alpha$, где $p = m_3 = m - \mu$, $\tau = \overline{1, \gamma_k}$, $0 \leqslant k \leqslant q$. Если координаты $u_{\beta_k+\tau}$ вектора $\vec{u} \parallel \Pi^{\mu_k}_s$ соответствуют переменным $z_{\beta_k+\tau}$, то ему сопряжена плоскость симметрии поверхности F_n с уравнением $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} c_\alpha x_\alpha = 0$ при $\sum\limits_{\tau=1}^{\gamma_k} b_{\beta_k+\tau,\alpha} u_{\beta_k+\tau} = c_\alpha$. Так как F_n отлична от цилиндра, то указанная система линейных уравнений относительно $u_{\beta_k+\tau}$ должна иметь только одно ненулевое решение. Поэтому $p \geqslant \gamma_k$, функции $\xi'_{k,\tau}$ содержат по крайней мере γ_k переменных с ненулевыми коэффициентами. Значит, имеет место

Лемма 9. При любом k ранг матрицы $\|b_{\beta_k+\tau,\alpha}\|$ равен γ_k.

Из леммы 9 следует, что $p \geqslant \max\{\gamma_j\}$.

Лемма 10. Если $\Pi_s^f \cap \Pi^\nu \neq \vec{0}$, $f \in \{\mu_j\}$, то число $p \geqslant 2$.

В работе [59] дана идея разбиения (в первом приближении) множества всех групп G_μ^s на попарно непересекающиеся подмножества. Рассмотрим более подробно путь ее реализации.

Обозначим через σ_k сигнатуру квадратичной формы $\sum_{\rho=0}^{d_k} a'_{k,\rho} y^2_{\alpha_k+\rho}$ (теорема 10). Пусть C_{d_k,γ_k} $(1 \leqslant d_k,\ \gamma_k \leqslant \mu_k - 1)$ есть цилиндр с уравнением $\zeta_k = 0$. На основании леммы 9 цилиндр C_{d_k,γ_k} в некоторой системе координат определяется уравнением

$$\sum_{\rho=0}^{d_k} a'_{k,\rho} y^2_{\alpha_k+\rho} + \sum_{\tau=1}^{\gamma_k} x_\tau z_{\beta_k+\tau} = 0.$$

Это уравнение в $(\mu_k+\gamma_k)$-плоскости $\Pi_s^{\mu_k} \oplus \Pi^{\gamma_k}(x_\tau)$ задает $(\mu_k+\gamma_k-1)$-конус, который не является $(\mu_k+\gamma_k-1)$-цилиндром; наибольшая размерность образующей C_{d_k,γ_k} равна $m-\mu_k-\gamma_k$. Поскольку каждому направлению симметрии $\vec{u} \| \Pi_s^{\mu_k}$ сопряжена только одна диаметральная плоскость C_{d_k,γ_k}, с точностью до изоморфизма группа $G_{\mu_k}^s$ определяется однозначно цилиндром C_{d_k,γ_k}. Следовательно, при фиксированных d_k и γ_k число попарно неизоморфных групп $G_{\mu_k}^s$ равно d_k (соответственно $\sigma_k = \overline{0, d_k - 1}$). Если $G_{\mu_k}^s \simeq \widetilde{G}_{\mu_k}^s$, то их изоморфизм задается невырожденным аффинным соответствием.

Таким образом, естественно выделяются, скажем, типы $T^{\sigma_k}_{d_k,\gamma_k}$ групп $G_{\mu_k}^s$. Группы каждого типа имеют числовые характеристики:

$\mu \leqslant m-2$ (лемма 10), $\quad \mu_k \geqslant 2 \left(\sum_{j=0}^{q} \mu_j > \mu\right)$, $\quad 1 \leqslant d_k \leqslant \mu_k - 1$, σ_k, $m-\mu \geqslant \max\{\mu_k - d_k\}$ (лемма 9).

Пусть $\{\gamma_j\}$ содержит ровно p_0+1 $(0 \leqslant p_0 \leqslant q)$ чисел $\max\{\gamma_j\}$, равных некоторым $\gamma_{j'}$ $(0 \leqslant j' \leqslant q)$. Если в (19) $\gamma_0 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_q$, то $\gamma_0 = \ldots = \gamma_{p_0}$. При $p_0 \geqslant 1$ перенумеруем $\Pi^{\gamma_{j'}}$ произвольным образом так, что

$$d_0 = \ldots = d_{\alpha_1} > d_{\alpha_1+1} = \ldots = d_{\alpha_1+\alpha_2} > \ldots$$

$$\ldots > d_{\alpha'_l+1} = \ldots = d_{\alpha'_l+\alpha_{l+1}} = d_{p_0}, \qquad (21$$

где $\alpha'_l=\alpha_1+\ldots+\alpha_l$. Каждый из типов $T^{\sigma_0}_{d_0,\gamma_0}$ разобьем на множества $T^{\sigma_0\sigma_1}_{d_0,d_1,\gamma_0,\gamma_1}$ соответственно $T^{\sigma_1}_{d_1,\gamma_1}$. Продолжив такое разбиение, найдем множества

$$T_{\alpha_1\ldots\alpha_{l+1}}(p_0)=T^{\sigma_0\ldots\sigma_{\alpha_1},\ldots,\sigma_{\alpha'_l+1}\ldots\sigma_{p_0},\,\sigma_{p_0+1}\ldots\sigma_q}_{d_0\ldots d_{\alpha_1},\ldots,d_{\alpha'_l+1}\ldots d_{p_0},\,d_{p_0+1}\ldots d_q;\,\gamma_0\ldots\gamma_{p_0},\ldots,\gamma_q}$$

групп G^s_μ, зависящие, в частности, от числа $p_0=\alpha_1+\ldots+\alpha_{l+1}$ и указанных его слагаемых. Изменив нумерацию, скажем, первых α_1+1 линейных оболочек, получим

$$T^{\sigma'_0\ldots\sigma'_{\alpha_1},\ldots,\sigma_{\alpha'_l+1}\ldots\sigma_{p_0},\sigma_{p_0+1}\ldots\sigma_q}_{d'_0\ldots d'_{\alpha_1},\ldots,d_{\alpha'_l+1}\ldots d_{p_0},d_{p_0+1}\ldots d_q;\gamma_0\ldots\gamma_{p_0},\ldots,\gamma_q}.$$

Каждое из этих множеств принадлежит $\{T_{\alpha_1\ldots\alpha_{l+1}}(p_0)\}$. Поэтому справедлива

Лемма 11. Независимо от нумерации $\gamma_{j'}$-плоскостей $\Pi^{\gamma_{j'}}$ $(j'=\overline{0,p_0})$ любые два из множеств $T_{\alpha_1\ldots\alpha_{l+1}}(p_0)$ не имеют общих элементов.

Следовательно, выделены классы $T_{\alpha_1\ldots\alpha_{l+1}}(p_0)$ групп G^s_μ. Выполнение условия (21) в лемме 11 определяется построением этих классов.

Если $\gamma_{p_0+1}=\ldots=\gamma_{p_1}$ $(p_0<q)$, то, можно считать,

$$d_{p_0+1}=\ldots=d_{\beta_1}>d_{\beta_1+1}=\ldots=d_{\beta_1+\beta_2}>\ldots>d_{\beta'_t+1}=$$
$$=\ldots=d_{\beta'_t+\beta_{t+1}}=d_{p_1},$$

где $\beta'_t=\beta_1+\ldots+\beta_t$. При этом для множеств $T_{\alpha_1\ldots\alpha_{l+1},\,\beta_1\ldots\beta_{t+1}}(p_0,p_1)=$

$$=T^{\sigma_0\ldots\sigma_{\alpha_1},\ldots,\sigma_{\alpha'_l+1}\ldots\sigma_{p_0},\sigma_{p_0+1}\ldots\sigma_{\beta_1},\ldots,\sigma_{\beta'_t+1}\ldots\sigma_{p_1},\sigma_{p_1+1}\ldots\sigma_q}_{d_0\ldots d_{\alpha_1},\ldots,d_{\alpha'_l+1}\ldots d_{p_0},d_{p_0+1}\ldots d_{\beta_1},\ldots,d_{\beta'_t+1}\ldots d_{p_1},d_{p_1+1}\ldots d_q;\;\gamma_0\ldots\gamma_{p_0},\gamma_{p_0+1}\ldots\gamma_{p_1},\ldots,\gamma_q}$$

имеет место утверждение, аналогичное лемме 11. Значит, $T_{\alpha_1\ldots\alpha_{l+1},\beta_1\ldots\beta_{t+1}}(p_0,p_1)$ — подклассы $T_{\alpha_1\ldots\alpha_{l+1}}(p_0)$. Так же проводится дальнейшее разбиение этих подклассов на множества в случае $p_1<q$.

Взаимное расположение Π^{γ_j} учитывается следующим образом. Пусть $\Pi^{v_{\alpha_1+\rho}}=\Pi^{\gamma_{\alpha_1+\rho}}\cap(\Pi^{\gamma_0}+\ldots+\Pi^{\gamma_{\alpha_1}})$, $\rho=\overline{1,\alpha_2}$. Так как нумерация $\Pi^{\gamma_{\alpha_1+\rho}}$ несущественна, то положим

$$v_{\alpha_1+1}=\ldots=v_{\rho_1}>v_{\rho_1+1}=\ldots=v_{\rho_1+\rho_2}>\ldots>v_{\rho'_r+1}=\ldots=$$
$$=v_{\rho'_r+\rho_{r+1}}=v_{\alpha_1+\alpha_2},$$

где $\rho_r' = \rho_1 + \ldots + \rho_r$. Если $p_1 = q$ (для упрощения обозначений), то подклассы разделяются на виды $T^{\rho_1 \ldots \rho_{r+1}}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l+1}, \beta_1 \ldots \beta_{t+1}}(p_0, p_1, \alpha_1 + \alpha_2)$. Аналогично используются

$$\Pi^{v\alpha_1+\alpha_2+\tau} = \Pi^{\gamma\alpha_1+\alpha_2+\tau} \cap (\Pi^{\gamma_0} + \ldots + \Pi^{\gamma\alpha_1}),$$

$\tau = \overline{1, \alpha_3}$ — и т. д. После такого рассмотрения $\Pi^{\gamma_0}, \ldots, \Pi^{\gamma p_0}$ и $\Pi^{\gamma p_0+1}, \ldots, \Pi^{\gamma q}$ учитываются первоначально $v_{p_0+\omega}$-плоскости $\Pi^{v p_0+\omega} = \Pi^{v p_0+\omega} = \Pi^{\gamma p_0+\omega} \cap (\Pi^{\gamma_0} + \ldots + \Pi^{\gamma\alpha_1})$, $\omega = \overline{1, \beta_1 - p_0}$. Дальнейший ход рассуждений теперь ясен.

Указанное разбиение всех групп G^s_μ на подмножества полезно для изучения G^s_μ, их инвариантов. По-видимому, оно может быть использовано, согласно теореме 10, и при рассмотрении задачи о классификации квадратичных форм, коэффициенты которых зависят от точки многообразия (*И. М. Гельфанд, А. С. Мищенко* [20]).

5. Т. Ю. Сысоева [111] нашла редуктивные алгебраические группы, порожденные отражениями. А. Е. Залесский [228] впервые построил пример группы G_8 в пространстве E^{11}, алгебра инвариантов которой не является свободной (некоторые аргументы А. Вагнера [222] оказались неточными); по теоремам 5 и 7 группа $G_8 = G^s_8$. Пространство инвариантов третьей степени указанной G^s_8 определяется многочленами третьей степени от x_j $(j = i_3 = 1, 2, 3)$ и формами $f_1 = 2x_1x_3z_3 + 2x_1x_2z_4 - x_1y_2^2 + 2x_2x_3z_5 - x_3y_3^2$, $f_2 = 2x_1x_2z_1 + 2x_1^2z_2 + 2x_2^2z_5 - x_1y_1^2 - x_2y_3^2$, $f_3 = 2x_2x_3z_1 + 2x_1x_3z_2 - 2x_1x_3z_3 - 2x_2^2z_4 - x_3y_1^2 + x_2y_2^2$. В [58] [62] дано геометрическое описание группы G^s_8 и приведено (на основании теоремы 10) уравнение поверхности F_n, инвариантной относительно G^s_8. Пусть множество P образуют все общие плоскости симметрии цилиндров, определяемых уравнениями $f_j = 0$. Если $\vec{x} = (y_j, z_i, x_j)$, $i = \overline{1, 5}$, — текущий вектор, то любая плоскость P сопряжена $\vec{u} = (v_j, u_i, 0, 0, 0)$. Имеет место [62]

Лемма 12. *Множество P состоит из диаметральных плоскостей цилиндров с уравнениями $\xi_1 \equiv y_1^2 - 2x_2z_1 - 2x_1z_2 = 0$, $\xi_2 \equiv y_2^2 - 2x_3z_3 - 2x_2z_4 = 0$, $\varkappa = \xi_3 - 2x_1z_3 \equiv y_3^2 - 2x_2z_5 - 2x_1z_3 = 0$. Эти плоскости сопряжены векторам $\vec{u}$, параллельным соответственно 3-плоскостям $\Pi^3(y_1, z_1, z_2)$, $v_1 \neq 0$, $\Pi^3(y_2, z_3, z_4)$, $v_2 \neq 0$; и $\Pi^1 \oplus \Pi^2(y_3, z_5)$, $v_3 \neq 0$, где Π^1 определяется уравнениями $z_1 - z_3 = 0$, $z_2 = 0$, $z_4 = 0, \ldots, x_3 = 0$.*

По лемме 12 группа G^s_8 принадлежит классу $T^{111}_{111,222}$ (п. 4). Выделим аффинное преобразование $\varphi: \vec{x} \to (y_j, z_1 + z_3, z_2, z_4, z_5, x_j)$. Из теоремы 10 и леммы 12 следует [62]

Теорема 11. Произвольная поверхность F_n, инвариантная относительно группы G_8^s, определяется уравнением $F(\xi_j, x_j)=0$ $(j=1, 2, 3)$, которое преобразованием φ приводится к виду $F'(\ldots, y_1, y_2, z_1, z_2, z_4, x_j)=0$; F и F' есть многочлены от указанных в скобках переменных.

И наоборот, если поверхность F_n может быть задана любым из уравнений $F=0$ и $F'=0$, то она инвариантна относительно группы G_8^s.

Минимальная размерность пространства E^m, в котором существует группа G_μ^s с несвободной алгеброй инвариантов, равна восьми (А. Е. Велесько [14], [15]).

Рассмотрим цилиндры F_{r+1}^j порядка $r+1$ с уравнениями

$$x_1 \ldots x_r z_j + \sum_{l=1}^{r} a_{lj} x_1 \ldots \hat{x}_l \ldots x_r y_l^2 = c, \qquad r=t^2 \geqslant 16, \tag{22}$$

где коэффициенты a_{lj} $(j=1, 2, 3)$ принадлежат алгебраически замкнутому полю K характеристики 0, при этом они алгебраически независимы над простым подполем поля K; $\hat{x}_l$ означает отсутствие x_l. Цилиндры F_{r+1}^j имеют группу симметрий, кольцо инвариантов которой является бесконечно порожденным (А. Е. Велесько [13]). В основе конструкции работы [13] лежит известный пример Нагаты, дающий отрицательное решение 14-ой проблемы Гильберта (например, [83]). Из конструкции Нагаты выводятся все известные контрпримеры; соответствующие группы вложены в GL_{2r} $(r=t^2 \geqslant 16)$. Чудновский (см. [202]) утверждает, что $r \geqslant 10$ достаточно.

Отметим, что отдельные вопросы теории бесконечных групп преобразований, их инвариантов (или связанные с ними) рассматривались также в статьях [2], [4], [11], [12], [16], [22], [23], [57], [72]—[74], [128], [131], [139], [168], [171]—[173], [177], [192], [207].

Пусть в (22) коэффициенты a_{lj} вещественны и алгебраически независимы над полем рациональных чисел, $F_{r+1}^j \in E^{2r+3}$. Обозначим через Q множество всех общих плоскостей симметрии цилиндров F_{r+1}^j, направления симметрии которых параллельны координатной $(r+3)$-плоскости переменных y_l, z_l; любая плоскость Q сопряжена $\vec{u}=(v_l, u_j, 0, 0, 0)$. Косые отражения относительно плоскостей Q определяют группу G_{2r}^s. Строение множества Q показывает

Лемма 13. *Множество Q состоит из диаметральных плоскостей цилиндров, определяемых уравнениями $a_{lj}y_l^2 + x_l z_j = 0$. Эти плоскости сопряжены векторам $\vec{u}(v_l \neq 0)$, параллельным 2-плоскостям с уравнениями $a_{l2}z_1 = a_{l1}z_2$, $a_{l3}z_1 = a_{l1}z_3$, $y_k=0$ $(l \neq k=\overline{1, r})$, $x_l=0$ $(l=\overline{1, r})$.*

В 3-плоскости $\Pi^3(z_j)$ некоторые прямые d_i зададим уравнениями $z_1=\rho_i z_2$, $z_1=\sigma_i z_3$, где

$$\frac{a_{i1}}{a_{i2}}=\frac{u_1}{u_2}=\rho_i,\quad \frac{a_{i1}}{a_{i3}}=\frac{u_1}{u_3}=\sigma_i,\quad 1\neq\rho_i\neq\sigma_i\neq 1.$$

Если координатная система прямоугольна, то направление прямых определяют векторы $\vec{p}_i=(\rho_i\sigma_i,\ \sigma_i,\ \rho_i)$.

Лемма 14. Любые три вектора системы $\vec{p}_i$ некомпланарны.

Выберем на основании леммы 14 новую систему координат так, что векторы $\vec{p}_j$ $(j=1, 2, 3)$ будут задавать направления осей Oz'_j; оси Oy_i, Ox_i остаются неизменными. Запишем формулы преобразования координат в Π^3:

$$z_1=\sum_{j=1}^{3}\rho_j\sigma_j z'_j,\quad z_2=\sum_{j=1}^{3}\sigma_j z'_j,\quad z_3=\sum_{j=1}^{3}\rho_j z'_j. \tag{23}$$

Линейные оболочки $\widetilde{\Pi}^2_j$ трех G^s_{2r} $(\vec{u})$-орбит (всего их r) являются координатными. По лемме 13 и формулам (23) соответствующие плоскости Q $(i=1, 2, 3)$ принадлежат множеству диаметральных плоскостей цилиндров с уравнениями $\xi_j=c$, где $\xi_1=a_{11}y_1^2+\rho_1\sigma_1x_1z'_1$, $\xi_2=a_{22}y_2^2+\sigma_2x_2z'_2$, $\xi_3=a_{33}y_3^2+\rho_3x_3z'_3$. Следовательно, поверхность F_n, инвариантная относительно группы G^s_{2r}, определяется уравнением

$$F(\xi_j,\ y_\alpha^2,\ x_i)=0,\quad \alpha=\overline{4, r}; \tag{24}$$

F есть многочлен от указанных в скобках переменных. В (24) вместо ξ_1, например, можно поставить квадратичную форму $a_{12}y_1^2+\sigma_1x_1z'_1$.

Найдем по формулам (23) координаты $\alpha_{\beta j}$ вектора $\vec{p}_\beta$ $(3<\beta\leqslant r)$. Далее, перейдем к новой системе координат, заменив Oz'_3 осью Oz''_3 с базисным вектором $\vec{p}_\beta$ $(Oz'_1=Oz''_1$, $Oz'_2=Oz''_2)$; A_β — преобразование координат. При этом $z'_1=z''_1+\alpha_{\beta1}z''_3$, $z'_2=z''_2+\alpha_{\beta2}z''_3$, $z'_3=\alpha_{\beta3}z''_3$; на других переменных действие A_β является тождественным. Возьмем формы $\zeta_1=a_{11}y_1^2+\rho_1\sigma_1x_1z''_1$, $\zeta_2=a_{22}y_2^2+\sigma_2x_2z''_2$. Подвергнув $a_{\beta2}y_\beta^2+x_\beta\sum_{j=1}^{3}\sigma_jz'_j$ преобразованию A_β, выделим из полученной формы часть $\zeta_\beta=a_{\beta2}y_\beta^2+\sum_{j=1}^{3}\alpha_{\beta j}\sigma_jx_\beta z''_3$. Диаметральные плоскости цилиндров с уравнениями $\zeta_\lambda=c$ $(\lambda=1, 2, \beta)$, сопряженные $\vec{u}\,\|\,\widetilde{\Pi}^2_\lambda$, принадлежат Q. Многочлен

$$A_\beta(F)=F^\beta(\zeta_\lambda,\ y_\gamma^2,\ x_l),\quad \beta\neq\gamma=\overline{3,r}; \tag{25}$$

смысл F и F^β одинаков. Таким образом, имеет место [60]

Теорема 12. Уравнение поверхности F_n, инвариантной относительно группы G_{2r}^s, можно представить в виде (24), где для многочлена F справедлива формула (25). И наоборот, если поверхность F_n определяется уравнением (24) при условии (25), то она инвариантна относительно G_{2r}^s.

6. Взаимное расположение Π^{γ_k} $(1<k\leqslant q)$ и $\Pi^{\gamma_0}+\ldots+\Pi^{\gamma_{k-1}}$ может быть достаточно произвольным [61]. Ситуации такого рода рассмотрены в статье И. М. Гельфанда, В. А. Пономарева [21]. Из теоремы 10 следует простой и эффективный метод построения поверхности F_n с группой G_μ^s, не допускающей расширения. Он дает принципиальную возможность выделить при каждом q и все ограничения, налагаемые на расположение Π^{γ_k} и $\Pi^{\gamma_0}+\ldots$ $\ldots+\Pi^{\gamma_{k-1}}$. Рассмотрим случай $q=2$. Соответствующее ограничение устанавливает [65]

Теорема 13. Если три линейные оболочки Π^{μ_α}, Π^{μ_β}, Π^{μ_γ} $(0\leqslant\alpha,\ \beta,\ \gamma\leqslant q;\ \mu_\alpha\geqslant\mu_\beta\geqslant\mu_\gamma)$ пересекаются по прямой l, то $l=\Pi^{\mu_\gamma}\cap(\Pi^{\mu_\alpha}+\Pi^{\mu_\beta})$.

В работе [63] получена

Теорема 14. Пусть γ_j-плоскости Π^{γ_j} $(j=0,1,2)$ не пересекаются по одной прямой. Тогда взаимное расположение Π^{γ_j} может быть произвольным.

При доказательстве теоремы 14 приведены уравнения специальных поверхностей F_n, инвариантных относительно G_μ^s; выделены также множества B_μ^s плоскостей симметрии F_n.

Остановимся подробно (в качестве иллюстрации) на случае, когда любые две из Π^{γ_j} пересекаются только в начале координат O. Положим $\gamma_0=\lambda$, $\gamma_1=\mu$, $\gamma_2=\nu$ $(\lambda\geqslant\mu\geqslant\nu)$; $\Pi^r=\Pi^\lambda\oplus\Pi^\mu$, $\Pi^v=\Pi^\nu\cap\Pi^r$, $0<v\leqslant\nu$, $\tau=\nu-v$. Возьмем поверхность F_n с уравнением

$$R\left(y_1^2+\sum_{l=1}^{\lambda}\xi_l z_l\right)+S\left(y_2^2+\sum_{\sigma=1}^{\mu}\zeta_\sigma z_{\lambda+\sigma}\right)+T\left(y_3^2+\sum_{k=1}^{\tau}\chi_k z_{\lambda+\mu+k}\right)=c, \tag{26}$$

где неопределенные многочлены R, S, T и линейные функции ξ_l, ζ_σ, χ_k зависят от переменных x_{i_3}, $i_3=\overline{1,p}$, $p\geqslant 2$ (лемма 10).

Проведем в Π^r $(r-1)$-плоскости Π_σ $(1\leqslant\sigma\leqslant\mu)$ через Π^v и оси $Oz_{v+1},\ldots,O\hat{z}_{\lambda+\sigma},\ldots,Oz_{\lambda+\mu}$ ($O\hat{z}_{\lambda+\sigma}$ означает отсутствие $Oz_{\lambda+\sigma}$ таким образом, что ни одна из осей Oz_t $(t=\overline{1,v})$ не принадлежит пересечению всех Π_σ. Запишем уравнения Π_σ:

$$z_{\lambda+\sigma}=\sum_{t=1}^{v} a_{\sigma t}z_t, \quad \sigma=\overline{1,\mu}. \tag{27}$$

Согласно выбору Π_σ, число $\sum_\sigma a^2_{\sigma t}>0$ при любом t. Так как $\Pi^v\cap\Pi^\lambda=\vec{0}$, то

$$\operatorname{rang}\|a_{\sigma t}\|=v. \tag{28}$$

Если $v<\lambda$, то считаем, что Oz_t принадлежат $\Pi^\mu\oplus\Pi^v$; снова в Π^r проведем $(r-1)$-плоскости $\tilde{\Pi}_\varepsilon$ через Π^v и оси $Oz_{v+1}, \ldots$ $\ldots, Oz_{v+\varepsilon}, \ldots, Oz_{\lambda+\mu}$ $(1\leqslant\varepsilon\leqslant\lambda-v)$. Они определяются уравнениями

$$z_{v+\varepsilon}=\sum_{t=1}^{v} b_{\varepsilon t}z_t, \quad \varepsilon=\overline{1,\lambda-v}. \tag{29}$$

Здесь уже возможен случай $\sum_\varepsilon b^2_{\varepsilon t'}=0$, $1\leqslant t'\leqslant v$. Пересечение Π_σ и $\tilde{\Pi}_\varepsilon$ есть Π^v с уравнениями (27) и (29) в Π^r.

Перейдем в Π^r к новой системе координат:

$$\begin{aligned} z_t&=z'_t, \quad t=\overline{1,v},\\ z_{v+\varepsilon}&=z'_{v+\varepsilon}+\sum_{t=1}^{v} b_{\varepsilon t}z'_t,\\ z_{\lambda+\sigma}&=z'_{\lambda+\sigma}+\sum_{t=1}^{v} a_{\sigma t}z'_t. \end{aligned} \tag{30}$$

Найдем R, S, T и ξ_t, ζ_σ, при которых (26), с учетом (30), принимает вид

$$R\left(y_1^2+\sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v}\xi_{v+\varepsilon}z'_{v+\varepsilon}\right)+S\left(y_2^2+\sum_{\sigma=1}^{\mu}\zeta_\sigma z'_{\lambda+\sigma}\right)+$$
$$+T\left(y_3^2+\sum_{t=1}^{v}\chi'_t z'_t+\sum_{k=1}^{\tau}\chi_k z_{\lambda+\mu+k}\right)=c. \tag{31}$$

На основании (26), (30) и (31) положим

$$\chi'_t=\xi_t+\sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v} b_{\varepsilon t}\xi_{v+\varepsilon}=\rho\sum_{\sigma=1}^{\mu}a_{\sigma t}\zeta_\sigma, \quad t=\overline{1,v}, \tag{32}$$

где число $\rho\neq0$. Будем находить χ'_t по формулам (32), считая заданными ζ_σ. Согласно (28), многочлены χ'_t линейно независимы.

Если $v<\lambda$, то при любых числах b_{st} линейные функции ξ_t тоже можно выбрать линейно независимыми; многочлен $T=R+\rho^{-1}S$. Плоскости симметрии полученной F_n являются диаметральными плоскостями квадрик, определяемых, согласно теореме 10, уравнениями (26) и формулами (32).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аминов Ю. А.* Дифференциальная геометрия и топология кривых.— М.: Наука, 1987.— 160 с. (РЖМат, 1988, 2А809 К)
2. *Арнольд В. И.* О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных // Матем. просвещение.— 1958.— Вып. 3.— С. 41—61 (РЖМат, 1959, 4573)
3. *Банникова Л. П.* Кубические поверхности с диэдральными группами симметрий // IX Всесоюзная геометрическая конференция; Кишинев, сентябрь 1988 г.: Тезисы сообщений.— Кишинев, 1988.— С. 33
4. *Беклемишев Н. Д.* Группы проективных автоморфизмов неособых кубических поверхностей // Моск. полигр. ин-т.— М., 1985.— 14 с.— Библиогр. 6 назв.— Деп. в ВИНИТИ 16.12.85, № 8642-В (РЖМат, 1986, 4А596 ДЕП)
5. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли: Компактные вещественные группы Ли.— М.: Мир, 1986.— 173 с. (РЖМат, 1987, 4А565 К)
6. *Вавилов Н. А.* Системы корней. Основные понятия. Ч. I / Ред. ж. «Вестн. ЛГУ. Мат., мех., астрон.»— Л., 1986.— 50 с. Библиогр. 24 назв. Деп. в ВИНИТИ 22.04.86, № 2961-В (РЖМат, 1986, 8А461 ДЕП)
7. — Системы корней. Основные понятия. Ч. 2 / Ред. ж. «Вестн. ЛГУ. Мат., мех., астрон.»— Л., 1986.— 50 с.— Библиогр. 8 назв.— Деп. в ВИНИТИ 13.05.86, № 3488-В (РЖМат, 1986, 9А443 ДЕП)
8. — О строении группы Шевалле типа E_6. I / Ред. ж. «Вестн. ЛГУ. Мат., мех., астрон.»— Л., 1986.— 46 с.— Библиогр. 56 назв.— Деп. в ВИНИТИ 22.04.86, № 2962-В (РЖМат, 1986, 8А462 ДЕП)
9. — О строении групп Шевалле типа E_6. II. Весовые элементы / Ред. ж. «Вестн. ЛГУ. Мат., мех. астрон.» — Л., 1986.—38 с. — Библиогр. 2 назв.— — Деп. в ВИНИТИ 17.07.86, № 5228-В (РЖМат, 1986, 10А413 ДЕП)
10. *Варченко А. Н., Чмутов С. В.* Конечные неприводимые группы, порожденные отражениями, суть группы монодромии подходящих особенностей // Функц. анализ и его прил.— 1984.— *18*, № 3.— С. 1—13 (РЖМат, 1985, 1А574)
11. *Ведерников В. И.* Геометрия, порожденная эндоморфизмами группы аффинных преобразований // IX Всесоюзная геометрическая конференция; Кишинев, сентябрь 1988 г.: Тезисы сообщений.— Кишинев, 1988.— С. 60.
12. *Велесько А. Е.* Критерий свободы колец инвариантов квадратичных групп // Докл. АН БССР.— 1985.— *29*, № 10.— С. 869—871 (РЖМат, 1986, 4А570)
13. — Существование групп, порожденных отражениями, с бесконечно порожденными кольцами инвариантов // Докл. АН БССР.— 1986.— *30*, № 2.— С. 105—107 (РЖМат, 1986, 6А587)
14. — Инварианты одного класса нередуктивных групп // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н.— 1986.— № 1.— С. 41—47 (РЖМат, 1986, 8А487)
15. — Об инвариантах квадратичных групп и групп, порожденных псевдоотражениями // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н.— 1986.— № 2.— С. 17—21 (РЖМат, 1986, 10А371)

16. — Кольца инвариантов групп, содержащих группу диагональных матриц / Ред. ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.»— Минск, 1987.— 9 с.— Библиогр. 6 назв.— Деп. в ВИНИТИ 03.08.87, № 5550-В87 (РЖМат, 1987, 11А516 ДЕП)
17. *Винберг Э. Б., Онищик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.— М.: Наука, 1988.— 343 с. (РЖМат, 1988, 9А454 К)
18. —, — Основы теории групп Ли // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем пробл. матем. Фундам. направления.— 1988.— *20*.— С. 5—101 (РЖМат, 1988, 9А561)
19. *Галиулин Р. В.* Кристаллографическая геометрия.— М.: Наука, 1984.— 135 с. (РЖМат, 1985, 5А468 К)
20. *Гельфанд И. М., Мищенко А. С.* Квадратичные формы над коммутативными групповыми кольцами и K-теория // Функц. анализ и его прил.— 1969.— *3*, № 4.— С. 28—33 (РЖМат, 1970, 4А509)
21. —, *Пономарев В. А.* Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве // Функц. анализ и его прил.— 1969.— *3*, № 4.— С. 81—82 (РЖМат, 1970, 4А341)
22. *Голубятников В. П., Пестов Л. Н.* О траекториях динамической системы, определенной однопараметрической группой конформных преобразований R^3 // Сиб. мат. ж.— 1983.— *24*, № 1.— С. 63—67 (РЖМат, 1984, 12А740)
23. *Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Группы Ли преобразований // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления.— 1988.— *20*.— С. 103—240 (РЖМат, 1988, 9А562)
24. *Гордевский Д. З.* К. А. Андреев — выдающийся русский геометр.— Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1955.— 47 с. (РЖМат, 1956, 5039 К)
25. *Гордеев Н. Л.* Конечные линейные группы, алгебра инвариантов которых — полное пересечение // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— *50*, № 2.— С. 343—392 (РЖМат, 1986, 8А490)
26. — Сложность алгебр инвариантов конечных групп // Докл. АН СССР.— 1987.— *292*, № 3.— С. 528—531 (РЖМат, 1987, 7А451)
27. *Гудков Д. А., Небукина Г. Ф.* Точка перегиба и двойные касательные кривых четвертого порядка. Ч. 4 / Горьк. ун-т.— Горький, 1985.— 23 с.— Библ. 10 назв.— Деп. в ВИНИТИ 18.09.85, № 6708 (РЖМат, 1986, 4А607 ДЕП)
28. —, — Точки перегиба и двойные касательные кривых четвертого порядка. Ч. 5 / Горьк. ун-т.— Горький, 1985.— 17 с.— Библиогр. 10 назв.— Деп. в ВИНИТИ 18.09.85, № 6709-В (РЖМат, 1986, 4А608 ДЕП)
29. —, — Точки перегиба и двойные касательные кривых четвертого порядка. Ч. 6 / Горьк. ун-т.— Горький, 1985.— 26 с.— Библиогр. 9 назв.— Деп. в ВИНИТИ 18.09.85, № 6710-В (РЖМат, 1986, 4А609 ДЕП)
30. —, — Точки перегиба и двойные касательные кривых четвертого порядка. Ч. 7 / Горьк. ун-т.— Горький, 1985.— 15 с.— Библиогр. 9 назв.— Деп. в ВИНИТИ 18.09.85, № 6711-В (РЖМат, 1986, 4А610 ДЕП)
31. —, — Вещественные кривые четвертого порядка с мнимыми особыми точками / Горьк. ун-т.— Горький, 1986.— 22 с.— Библиогр. 10 назв.— Деп. в ВИНИТИ 14.02.86, № 1108-В (РЖМат, 1986, 6А694 ДЕП)
32. —, —, *Тетнева Т. И.* Специальные формы кривых четвертого порядка с мнимыми особыми точками / Горьк. ун-т.— Горький, 1988.— 18 с.— Библиогр. 4 назв.— Деп. в ВИНИТИ 02.06.88, № 4374-В 88 (РЖМат, 1988, 9А730 ДЕП)
33. *Давиденко В. А.* О гиперплоских сечениях многомерного куба / Киев. политехн. ин-т.— Киев, 1986.— 10 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 21.05.86, № 1202-Ук (РЖМат, 1986, 10А691 ДЕП)
34. *Дамиан Ф. Л.* Об одном четырехмерном гиперболическом многообразии / Бакинская международная топологическая конференция; Баку; октябрь 1987 г.: Тезисы докладов. II.— Баку, 1987.— С. 97
35. *Дениско С. В.* Про одне відображення кривих // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.— 1985.— № 24.— С. 83—85 (РЖМат, 1986, 1А822)

36. *Залесский А. Е.* Приводимые линейные группы, порожденные псевдоотражениями // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н.— 1983.— № 5.— С. 3—9 (РЖМат, 1984, 3А560)
37. *Захаров Л. М., Сухина И. А.* Единый способ построения кривых второго порядка / Краснодар. политехн. ин-т.— Краснодар, 1984.— 23 с.— Библиогр. 5 назв.— Деп. в ВИНИТИ 11.12.84, № 7923—84 Деп (РЖМат, 1985, 4А668 ДЕП)
38. *Иванов Д. Н.* Ортогональные разложения полупростых ассоциативных алгебр // Вестн. МГУ. Мат., мех.— 1988.— № 1.— С. 9—14 (РЖМат, 1988, 5А182)
39. *Игнатенко В. Ф.* Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии в пространстве E^m // Дифференц. геометрия многообразий фигур.— 1976.— Вып. 7.— С. 34—39 (РЖМат, 1977, 3А584)
40. — О диаметральных плоскостях и плоскостях косой симметрии алгебраической поверхности пространства E^m // Укр. геометр. сб.— 1977.— Вып. 20.— С. 35—46 (РЖМат, 1977, 11А569)
41. — Условия инвариантности кубической поверхности относительно группы симметрий правильного тетраэдра // Укр. геометр. сб.— 1979.— Вып. 22.— С. 60—64 (РЖМат, 1979, 8А645)
42.— Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии.— 1980.— *11*.— С 203—240 (РЖМат, 1980, 11А683)
43. — Об инвариантах конечных групп, порожденных отражениями // Мат. сб.— 1983.— *120*.— № 4.— С. 556—568 (РЖМат, 1983, 7А585)
44. — Некоторые приложения диаметральной теории алгебраической поверхности в пространстве E^m // Укр. геометр. сб.— 1984.— Вып. 27.— С. 49—53 (РЖМат, 1984, 9А561)
45. — Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии.— 1984.— *16*.— С. 195—229 (РЖМат, 1985, 7А496)
46. — Поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // VI Прибалтийская геометрическая конференция; Таллин, май 1984 г.: Тезисы докладов.— Таллин, 1984.— С. 49
47. — О геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями // VIII Всесоюзная геометрическая конференция; Одесса, сентябрь 1984 г.: Тезисы докладов.— Одесса, 1984.— С. 58
48. — К общему уравнению плоской алгебраической кривой с осями симметрии // Динам. системы.— 1984.— № 3.— С. 104—106 (РЖМат, 1984, 9А558)
49. — К общему уравнению алгебраической поверхности с группой симметрий многогранника 4_{21} // Укр. геометр. сб.— 1985.— Вып. 28.— С. 70—74 (РЖМат, 1985, 8А468)
50. — О строении фигуры с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // В сб. «Теория функций и ее приложения».— Кемерово, 1985.— С. 56—59 (РЖМат, 1986, 7А740).
51. — О связях между инвариантами групп F_4, E_6, E_7 // Первая конференция по комбинаторной геометрии и ее приложениям.— Батуми, сентябрь 1985 г.: Тезисы докладов.— Батуми, 1985.— С. 29—30
52. — О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Colloquium of Intuitive Geometry; Balatonszéplak, Hungary, May, 1985: Abstracts.— J. Bolyai Math. Soc., 1985.— С. 28
53. — Об одной системе базисных инвариантов группы B_n // Укр. геометр. сб.— 1986.— Вып. 29.— С. 54—55 (РЖМат, 1986, 6А588)
54. — О строении инвариантов бесконечных групп, порожденных отражениями // Симфероп. ун-т; ВИНИТИ.— Симферополь; Москва, 1986.— 27 с.— Библиогр. 11 назв.— Деп. в ВИНИТИ 07.08.86, № 5608—В (РЖМат, 1986, 10А682 ДЕП)

55. — Диаметральная теория алгебраических поверхностей и ее приложения.— Симферополь, СГУ, 1986.— 22 с.
56. — Об алгебраических поверхностях с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // Всесоюзная школа «Оптимальное управление. Геометрия и анализ»; Кемерово, октябрь 1986 г.: Тезисы докладов.— Кемерово, 1986.— С. 81
57. — Поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // Международная конференция по геометрии и приложениям; Смолян, Болгария, июль 1986 г.: Тезисы докладов.— 1986.— С. 20
58. — О некоторых кубических поверхностях с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // Укр. геометр. сб.— 1987.— Вып. 30.— С. 37—41 (РЖМат, 1987, 10А529)
59. — Строение инвариантов бесконечных групп, порожденных косыми отражениями / Симфероп. ун-т.— Симферополь, 1987.— 21 с.— Библиогр. 10 назв.— Деп. в УкрНИИНТИ 13.07.87, № 1988—Ук87 (РЖМат, 1987, 12А403 ДЕП)
60. — Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // Бакинская международная топологическая конференция; Баку; октябрь 1987 г.: Тезисы докладов. II. — Баку, 1987.— С. 129
61. — Об одном классе алгебраических поверхностей с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // Всесоюзная конференция по геометрии «в целом»: Новосибирск, сентябрь 1987 г.: Тезисы докладов.— Новосибирск, 1987.— С. 51
62. — Об инвариантах одной группы, порожденной косыми отражениями в E^n // Укр. геометр. сб.— 1988.— Вып. 31.— С. 59—62 (РЖМат, 1989, 1А654)
63. — Специальные алгебраические поверхности с симметриями / Симфероп. ун-т.— Симферополь, 1988.— 28 с.— Библиогр. 11 назв.— Деп. в УкрНИИНТИ 05.07.88, № 1768—Ук88 (РЖМат, 1988, 11А534 ДЕП)
64. — Некоторые задачи теории инвариантов групп, порожденных отражениями.— Симферополь, СГУ, 1988.— 14 с.
65. — О строении бесконечных групп, порожденных косыми отражениями // IX Всесоюзная геометрическая конференция; Кишинев, сентябрь 1988 г.: Тезисы сообщений.— Кишинев, 1988.— С. 130
66. *Кантор И. Л., Персиц Д. Б.* О замкнутых пучках линейных скобок Пуассона // IX Всесоюзная геометрическая конференция; Кишинев, сентябрь 1988 г.: Тезисы сообщений.— Кишинев, 1988.— С. 141
67. *Кацыло П. И.* Рациональность полей инвариантов приводимых представлений группы SL_2 // Вестн. МГУ. Мат., мех.— 1984.— № 5.— С. 77—79 (РЖМат, 1985, 2А464).
68. *Комраков Б. П.* Примитивные действия и недискретные максимальные подгруппы групп Ли / Белорус. политехн. ин-т.— Минск, 1988.— 254 с.— Библиогр. 26 назв.— Деп. в ВИНИТИ 16.05.88, № 3698—В88 (РЖМат, 1988, 9А570 ДЕП)
69. *Копп В. Г.* Об инвариантах групп движений в евклидовом пространстве R_4 // Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т.— 1984.— № 16.— С. 47—64 (РЖМат, 1985, 5А659)
70. *Корюкин А. Н.* О некоммутативных инвариантах редуктивных групп // Алгебра и логика. Новосибирск, 1984.— *23*, № 4.— С. 419—429 (РЖМат, 1985, 4А472)
71. *Крафт Х.* Геометрические методы в теории инвариантов.— М.: Мир, 1987.— 312 с. (РЖМат, 1988, 2А408 К).
72. *Криворучко А. И.* Плоские фигуры, инвариантные относительно бесконечных групп аффинных преобразований / Симфероп. ун-т.— Симферополь, 1985.— 8 с.— Библиогр. 5 назв.— Деп. в УкрНИИНТИ 08.01.86, № 213—Ук86 (РЖМат, 1986, 6А900 ДЕП)
73. — О фигурах, инвариантных относительно некоторых бесконечных групп преобразований // Укр. геометр. сб.— 1986.— Вып. 29.— С. 92—96 (РЖМат, 1986, 6А893)
74. — О непрерывных группах, порожденных отражениями относительно

прямых / Симфероп. ун-т.— Симферополь, 1987.— 7 с.— Библиогр. 4 назв.— Деп. в УкрНИИНТИ 17.09.87, № 1571—Ук87 (РЖМат, 1988, 2А732 ДЕП)
75. — О строении симметричных алгебраических гиперповерхностей // XI Всесоюзная геометрическая конференция; Кишинев, сентябрь 1988 г.: Тезисы сообщений.— Кишинев, 1988.— С. 165
76. *Кулешов С. А.* Об алгебраических образующих группы автоморфизмов кольца многочленов над конечно-порожденной алгеброй // Вестн. МГУ. Мат., мех.— 1987.— № 6.— С. 62—64 (РЖМат, 1988, 5А454)
77. *Кужель А. В.* Методы обобщений в математике.— Симферополь, СГУ, 1983.— 96 с.
78. *Лазарева В. Б.* Об одном классе поверхностей, несущих сеть кривых второго порядка // Материалы 6 Конф. мол. ученых Ун-та дружбы народов; мат., физ., химия. Москва, 17—21 марта 1983. Ч. I.— Ун-т дружбы народов.— М., 1983.— С. 104—107.— Библиогр. 2 назв.— Деп. в ВИНИТИ 05.03.84, № 1316—84 Деп (РЖМат, 1984, 7А583 ДЕП)
79. *Лейбін А. С.* Полярограф — прилад для побудови взаємно полярних кривих // Геометр. зб. (Харків).— 1940.— Т. II.— С. 109—114
80. *Лейбин А. С. Гурин А. М.* Однородные звездчатые многогранники в E_4 // IX Всесоюзная геометрическая конференция; Кишинев, сентябрь 1982 г.: Тезисы сообщений.— Кишинев, 1988.— С. 182
81. *Макаров П. В.* О разбиении пространства Λ^3 правильными многогранниками // IX Всесоюзная геометрическая конференция; Кишинев, сентябрь 1988 г.: Тезисы сообщений.— Кишинев, 1988.— С. 198—199
82. *Мамиствалов А. Г.* Об аффинных инвариантах точечных образов, порожденных вершинами правильных многоугольников и многогранников // Сообщ. АН ГССР.— 1987.— *123*, № 1.— С. 29—32 (РЖМат, 1988, 3А829)
83. *Манин Ю. И.* К четырнадцатой проблеме Гильберта // В сб. «Проблемы Гильберта».— М.: Наука, 1969.— С. 171—174 (РЖМат, 1970, 1А310)
84. —, *Цфасман М. А.* Рациональные многообразия: алгебра, геометрия, арифметика // Успехи мат. наук.— 1986.— *41*, № 2.— С. 43—94 (РЖМат, 1986, 8А498)
85. *Мантуров О. В.* О некоторых задачах классификации в теории мультипликативного интеграла // IX Всесоюзная геометрическая конференция; Кишинев, сентябрь 1988 г.: Тезисы сообщений.— Кишинев, 1988.— С. 203
86. *Милка А. Д.* Что такое геометрия «в целом».— М.: Знание, 1986.— 32 с.
87. *Милнор Дж., Хьюзмоллер Д.* Симметрические билинейные формы.— М.: Наука, 1986.— 176 с. (РЖМат, 1987, 1А400 К)
88. *Никулин В. В.* Об описании групп автоморфизмов поверхностей Энриквеса // Докл. АН СССР.— 1984.— *277*, № 6.— С. 1324—1327 (РЖМат, 1985, 1А601)
89. *Никулин Н. А.* Геометрические построения с помощью простейших инструментов.— Крымиздат, 1947.— 34 с.
90. *Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии.— М.: Наука, 1987.— 431 с. (РЖМат, 1988, 2А747 К)
91. *Панюшев Д. И.* Об изоморфизмах между пространствами орбит // Вестн. МГУ. Мат., мех.— 1983.— № 5.— С. 22—25 (РЖМат, 1984, 1А466)
92. *Платонов В. П.* Группы Ли // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1985.— *169*.— С. 50—58 (РЖМат, 1986, 6А695)
93. —, *Рапинчук А. С.* Алгебраические группы // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1983.— *21*.— С. 80—134 РЖМат, 1984, 2А416)
94. *Попов В. Л.* Полтора века теории инвариантов // Методол. анал. мат. теорий.— М., 1987.— С. 235—256 (РЖМат, 1988, 6А463)
95. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 2.— М.: Наука, 1972.— 999 с. (РЖМат, 1973, 1А9)
96. *Рудницкий О. И.* Об инвариантах конечных групп, порожденных отраже-

ниями, в трехмерном унитарном пространстве / Симфероп. ун-т.— Симферополь, 1983.— 12 с.— Библиогр. 5 назв.— Деп. в УкрНИИНТИ 01.06.83, № 386 Ук—Д83 (РЖМат, 1983, 11А241 ДЕП)
97. — Базисные инварианты унитарной группы $EW(N_4)$ // Всесоюзная школа по теории функций, посв. 100-летию со дня рождения акад. Н. Н. Лузина; Кемерово, сентябрь 1983 г.: Тезисы докладов.— Кемерово, 1983.— С. 94.
98. — Базисные инварианты конечных унитарных импримитивных групп, порожденных отражениями / Симфероп. ун-т.— Симферополь, 1984.— 7 с.— Библиогр. 7 назв.— Деп. в УкрНИИНТИ 03.08.84, № 1344 Ук—84 (РЖМат, 1984, 12А207 ДЕП)
99. — Базисные инварианты конечных примитивных групп, порожденных отражениями, в четырехмерном унитарном пространстве // Укр. геометр. сб.— 1985.— Вып. 28.— С. 116—122 (РЖМат, 1985, 8А469)
100. — О базисных инвариантах унитарной группы $W(K_5)$ // Первая конференция по комбинаторной геометрии и ее приложениям; Батуми, сентябрь 1985 г.: Тезисы докладов.— Батуми, 1985.— С. 56
101. — О базисных инвариантах группы Митчелла, порожденной отражениями, в шестимерном унитарном пространстве // Динам. системы.— 1986.— № 5.— С. 116—120 (РЖМат, 1986, 8А416)
102. — Некоторые свойства базисных инвариантов унитарной группы $W(K_5)$ // Укр. геометр. сб.— 1987.— Вып. 30.— С. 92—96 (РЖМат, 1987, 10А307)
103. — О базисных инвариантах тетраэдральных и октаэдральных групп, порожденных отражениями, на унитарной плоскости / Симфероп. ун-т.— Симферополь, 1986.— 23 с.— Библиогр. 6 назв.— Деп. в УкрНИИНТИ 08.08.86, № 1873—Ук (РЖМат, 1987, 1А219ДЕП)
104. — О базисных инвариантах икосаэдральных групп, порожденных отражениями, на унитарной плоскости / Симфероп. ун-т.— Симферополь, 1987.— 13 с.— Библиогр. 5 назв.— Деп. в УкрНИИНТИ 29.06.87, № 1765—Ук 87 (РЖМат, 1987, 11А520 ДЕП)
105. — Базисные инварианты унитарной группы $W(K_5)$ / Симфероп. ун-т.— Симферополь, 1988.— 10 с.— Библиогр. 6 назв.— Деп. в УкрНИИНТИ 08.02.88, № 364—Ук 88 (РЖМат, 1988, 7АА486 ДЕП)
106. — Базисные инварианты конечных групп, порожденных отражениями, на унитарной плоскости // IX Всесоюзная геометрическая конференция; Кишинев, сентябрь 1988 г.: Тезисы сообщений.— Кишинев, 1988.— С. 272
107. *Рышков С. С., Барановский Е. П.* Совершенные решетки как допустимые центрировки // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии.— 1985.— *17*.— С. 3—49 (РЖМат, 1986, 4А829)
108. —, *Эрдал Р. М.* Геометрия целочисленных корней некоторых квадратных уравнений с многими неизвестными // Докл. АН СССР.— 1982.— *267*, № 3.— С. 561—563 (РЖМат, 1983, 7А155)
109. *Сафиулина К. Р.* Образцы окружности в гиперболической инверсии // Мат. методы анализа динамич. систем (Харьков).— 1982.— № 6.— С. 156—158 (РЖМат, 1984, 1А650)
110. *Спрингер Т.* Теория инвариантов.— М.: Мир, 1981.— № 24.— 191 с. (РЖМат, 1981, 7А442)
111. *Сысоева Т. Ю.* Редуктивные линейные алгебраические группы, порожденные квазиотражениями // Сердика. Бълг. мат. списание.— 1975 (1976).— *1*, № 3—4.— С. 337—345 (РЖМат, 1976, 12А502)
112. *Терновский В. А.* Об инвариантах группы симметрий правильного 24-гранника // Динам. системы.— 1984.— № 3.— С. 106—109 (РЖМат, 1984, 9А557)
113. — О базисных инвариантах степеней 24 и 30 группы E_8 / Симфероп. ун-т.— Симферополь, 1985.— 18 с.— Библиогр. 6 назв.— Деп. в УкрНИИНТИ 12.03.85, № 515 Ук—Д85 (РЖМат, 1985, 8А466 ДЕП)
114. — Об инвариантах групп B_{12} и D_4 / Симфероп. ун-т.— Симферополь, 1986.— 11 с.— Библиогр. 3 назв.— Деп. в УкрНИИНТИ 12.11.86, № 2578 Ук—Д86 (РЖМат, 1986, 4А467 ДЕП)

115. — О специальных инвариантах группы E_6 // Динам. системы.— 1987.— № 6.— С. 116—117 (РЖМат, 1987, 10А114)
116. — О поверхностях с группой симметрий m-симплекса / Симфероп. ун-т.— Симферополь, 1987.— 10 с.— Библиогр. 2 назв.— Деп. в УкрНИИНТИ 16.09.87, № 2558—Ук87 (РЖМат, 1988, 2А729 ДЕП)
117. — О базисных инвариантах группы E_8 / Симфероп. ун-т.— Симферополь, 1988.— 8 с.— Библиогр. 4 назв.— Деп. в УкрНИИНТИ 08.02.88, № 366—Ук88 (РЖМат, 1988, 7А485 ДЕП)
118. — Об алгебраических поверхностях с группой симметрий многогранника 3_{21} // Укр. геометр. сб.— 1988.— Вып. 31.— С. 108—112 (РЖМат, 1989, 1А656)
119. — Об инвариантах групп A_m, B_{12}, D_4 // IX Всесоюзная геометрическая конференция: Кишинев, сентябрь 1988 г.: Тезисы сообщений.— Кишинев, 1988.— С. 308
120. *Токарев Д. Д., Семковски А. Б.* Върху една метрична задача // Год. ВУЗ. Прилож. мат.— 1983(1984).— *19*, № 2.— С. 53—62 (РЖМат, 1986, 3А816)
121. *Тралле А. Е., Феденко А. С.* Плоские слабоинвариантные подмногообразия дифференцируемых S-многообразий // IX Всесоюзная геометрическая конференция; Кишинев, сентябрь 1988 г.: Тезисы сообщений.— Кишинев, 1988.— С. 316—317
122. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли // Успехи мат. наук.— 1984.— *39*, № 2.— С. 3—56 (РЖМат, 1984, 9А479)
123. *Турсунов Б., Хаджиев Дж.* Связь между алгебрами инвариантов алгебраической группы и ее подгруппы // Докл. АН УзССР.— 1984.— № 7.— С. 8—10 (РЖМат, 1985, 4А473)
124. *Шамсиев Э. А.* К подсчету числа линейно независимых инвариантных форм конечных групп // Вопр. вычисл. и прикл. мат. Ташкент.— 1984.— № 75.— С. 153—156 (РЖМат, 1985, 4А474)
125. *Шефель Г. С.* Геометрические свойства групп преобразований евклидова пространства // Докл. АН СССР.— 1984.— *277*, № 4.— С. 803—806 (РЖМат, 1984, 12А710)
126. *Allgower E. L., Schmidt P. H.* Computing volumes of polyhedra // Math. Comput.— 1986.— *46*, № 173.— С. 171—174 (РЖМат, 1987, 9А730)
127. *Alvis D.* The left cells of the Coxeter group of type H_4 / J. Algebra.— 1987.— *107*, № 1.— С. 160—168 (РЖМат, 1987, 10А352)
128. *Amir-Moez Ali R., Fredricks G. A.* Toris sections / Tex. J. Sci.— 1984.— *35*, № 4. —С. 227—282 (РЖМат, 1984, 8А643)
129. *Atiyah M. F.* Angular momentum, convex polyhedra and algebraic geometry // Proc. Edinburg Math. Soc.— 1983.— *26*, № 2.— С. 121—133 (РЖМат, 1984, 1А465)
130. *Ball K.* Cube slicing in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— *97*, № 3.— С. 465—473 (РЖМат, 1986, 12А890)
131. *Bass H.* Automorphisms of polynomial rings // Lect. Notes Math.— 1983.— *1006*.— С. 762—771 (РЖМат, 1984, 4А431)
132. *Bilinski S.* Über die Rhombenisoeder // Glasnik Mat. fiz. i astron.— 1960.— *15*, № 4.— С. 251—263 (РЖМат, 1963, 12А380)
133. — Ein Symmetriemass von Vierecken der affinen Ebene // RAD Yugosl. Acad. Znan. i umjethn.— 1978.— № 382.— С. 109—113
134. *Britten D. J., Lemire F. W.* On basic cycles of A_n, B_n, C_n and D_n // Can. J. Math.— 1985.— *37*, № 1.— С. 122—140 (РЖМат, 1986, 1А311)
135. *Burkhardt H.* Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. Zweiter Theil // Math. Ann.— 1981.— *38*.— С. 161—224
136. *Capps R. H.* Representations of E_8 and other algebras // J. Math. Phys.— 1987.— *28*, № 6.— С. 1215—1222 (РЖМат, 1988, 2А541)
137. *Cartier P.* La théorie classique et moderne des fonctions symétriques // Astérisque.— 1982—1983.— № 105—106.— С. 1—23 (РЖМат, 1984, 4А352)

138. *Chang B.* Generators of Chevalley groups over Z // Can. J. Math.— 1986.— *38,* № 2.— С. 387—396 (РЖМат, 1987, 3А466)
139. *Cheng Charles Ching-An, Shapiro J.* A converse of the Hilbert syzygy theorem // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— *89,* № 1.— С. 11—15 (РЖМат, 1984, 4А392)
140. *Choi M. D., Lam T. Y., Reznick B.* Even symmetric sextics // Math. Z.— 1987.— *195,* № 4.— С. 559—580 (РЖМат, 1988, 6А517)
141. *Cohen A. M.* Finite complex reflection groups // Ann. sci. Ecole norm. Supér.— 1976.— *9,* № 3.— С. 379—436 (РЖМат, 1977, 6А159)
142. *Constantinescu A.* Some analytic and topological interpretations of the finite generation of complex subalgebras. I // Stud. şi cerc. mat.—1985. — *37,* № 4.— С. 323—327 (РЖМат, 1986, 3А527)
143. — Some analytic and topological interpretations of the finite generation of complex subalgebras. II // Stud. şi cerc. mat.— 1985.— *37,* № 5.— С. 439—446 (РЖМат, 1986, 8А415)
144. — Some analytic and topological interpretations of the finite generation of complex subalgebras. III // Stud. şi cerc. mat.— 1986.— *38,* № 6.— С. 511—515 (РЖМат, 1987, 5А381)
145. — Morfisme proprii şi finit generarea subalgebrelor. I. Morfisme proprii de scheme // Stud. şi cerc. mat.— 1986.— *38,* № 4.— С. 321—341 (РЖМат, 1987, 2А450)
146. — Morfisme proprii şi finit generarea subalgebrelor. II. Inele şi scheme universal 1-echicodimensionale // Stud. şi cerc. mat.— 1986.— *38,* № 5.— С. 438—454 (РЖМат, 1987, 5А394)
147. — Morfisme proprii şi finit generarea subalgebrelor. III. Scheme dominate de varietăţi algebrice // Stud. şi cerc. mat.— 1986.— *38,* № 6.— С. 477—510 (РЖМат, 1987, 5А395)
148. *Conway J. H., Sloane N. J. A.* The Coxeter—Todd lattice, the Mitchell group and related sphere packings // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1983.— *93,* № 3.— С. 421—440 (РЖМат, 1983, 12А185)
149. *Coxeter H. S. M.* The abstract groups $R^m=S^m=(R^jS^j)^{p_j}=1$, $S^m=T^2=(S^jT)^{2p_j}$ and $S^m=T^2=(S^{-j}TS^jT)=1$ // Proc. London Math. Soc.— 1936.— *41,* № 2.— С. 278—301
150. — Regular complex polytopes.— London Cambridge Univ. Press.— 1974.— 185 с. (РЖМат, 1976, 4А682 К)
151. —, *Todd J. A.* An extreme duodenary form // Can. J. Math.— 1953.— *5,* № 3.— С. 384—392 (РЖМат, 1954, 2509)
152. *Crowe D. W.* Some two-dimensional unitary groups generated by three reflections // Can. J. Math.— 1961.— *13,* № 3.— С. 418—426 (РЖМат, 1962, 12А147)
153. *Deriziotis D. I.* The centralizers of semisimple elements of the Chevalley groups E_7 and E_8 // Tokyo J. Math.— 1983.— *6,* № 1.— С. 191—216 (РЖМат, 1984, 1А426)
154. *Djoković D. Ž., Malzan J.* Products of reflections in the group $SO^*(2n)$ // Can. J. Math.— 1984.— *36,* № 2.— С. 300—326 (РЖМат, 1985, 3А371)
155. *Dolgachev I. V.* Weyl groups and Cremona transformations // Singularities. Proc. Summer Inst., Arcata, Calif., 20 July—7 Aug., 1981. Pt. 1. Providence, R. I.— 1983.— С. 283—294 (РЖМат, 1984, 4А508)
156. *Dzlechcińska-Halamoda Z.* Charakteryzacja zbioru środków ciała wypukłego przez stozki podpierajace // Zesz. Nauk. WSP, Ser. A, Mat.— 1979.— *21.*— С. 93—99
157. *Ephraim R.* Special polars and curves with one place at infinity // Singularities. Proc. Summer. Inst., Arcata, Calif., 20 July—7 Aug., 1981. Pt 1. Providence, R. I.— 1983.— С. 353—359 (РЖМат, 1984, 5А466)
158. *Farkas D. R.* Multiplikative invariants // Enseign. math.— 1984.— *30,* № 1—2.— С. 141—157 (РЖМат, 1984, 12А413)
159. — Toward multiplicative invariant theory // Contemp. Math.— 1985.— *43.*— С. 69—80 (РЖМат, 1986, 3А611)

160. *Fejes T. L.* Szimmetria és gazdaságosság // Magutud.— 1987.— *94,* № 2.— С. 103—113 (РЖМат, 1987, 8А610)
161. *Fisher J. W.* Invariants of finite linear proups acting on relatively free algebras: a survey // Contemp. Math.— 1985.— *43.*— С. 81—86 (РЖМат, 1986, 2А457)
162. *Freudenthal H.* Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie // Geom. dedic.— 1985.— *19,* № 1.— С. 7—63 (РЖМат, 1985, 12А516)
163. *Gianni P., Traverso C.* Shape determination for real curves and surfaces // Ann. Univ. Ferrara.— 1983.— Sez. 7, *29.*— С. 87—109 (РЖМат, 1985, 1А602)
164. *Giblin P. J., Brassett S. A.* Local symmetry of plane curves // Amer. Math. Mon.— 1985.— *92,* № 10.— С. 689—707 (РЖМат, 1986, 7А770)
165. *Giusti M.* Some effectivity problems in polynomial ideal theory // Lect. Notes Comput. Sci.— 1984.— *174.*— С. 159—171 (РЖМат, 1985, 2А412)
166. *Goethals J. M., Seidel J. J.* The football // Nieuw. arch. wisk.— 1981.— *29,* № 1.— С. 50—58 (РЖМат, 1981, 8В596)
167. *Gossler M.* Zur Elementargeometrie höherdimensionale Würfel // Prax. Math.— 1986.— *28,* № 5.— С. 265—269 (РЖМат, 1986, 12А862)
168. *Grosshans F. D.* Hilbert's fourteenth problem for nonreductive groups // Math. Z.— 1986.— *193,* № 1.— С. 95—103 (РЖМат, 1987, 1А449)
169. *Gyoja A.* On the existence of a *W*-graph for an irreducible representation of a Coxeter group // J. Algebra.— 1984.— *86,* № 2.— С. 422—438 (РЖМат, 1984, 7А411)
170. *Hassan M.* Determination des invariants de Weyl et culcul des coefficients de couplage des groupes unitaires // J. Phys., A: Math. and Gen.— 1983.— *16,* № 13.— С. 2891—2903 (РЖМат, 1984, 3А617)
171. *Hausknecht K., Löwen R.* Charakterisierung von ortogonalen Gruppen durch Beweglichkeitsligenschaften // Math. Semesterber.— 1985.— *32,* № 1.— С. 1—8 (РЖМат, 1985, 12А336)
172. *Hesselink W. H.* Dimension formulas related to a tame quiver // Lect. Notes Math.— 1986.— *1220.*— С. 15—24 (РЖМат, 1987, 7А326)
173. *Hochster M.* Invariant theory of commutative rings // Contemp. Math.— 1985.— *43.*— С. 161—169 (РЖМат, 1986, 3А613)
174. *Horváth J.* Die Lösung einiger Probleme aus der diskreten Geometrie mit der Methode des Koeffizientenraumes // Koll. Geom. und Komb.; Karl-Marx-Stadt, DDR, Oktober 13—14.— 1983.— С. 87—100
175. *Howe R.* Very basis Lie theory // Amer. Math. Mon.— 1983.— *90,* № 9.— С. 600—623 (РЖМат, 1984, 8А484)
176. *Kac V. G., Peterson D. H.* Generalized invariants of groups generated by reflection // Geom. Today, Int. Conf. Rome, June 4—11, 1984.— Boston e. a.— 1985.— С. 231—249 (РЖМат, 1986, 3А533)
177. —, — On geometric invariant theory for infinite-dimensional groups // Lect. Notes Math.— 1987.— *1271.*— С. 109—142 (РЖМат, 1988, 6А472)
178. *Kaneta Hiroshi.* The invariant polynomial algebras for the groups $IU(n)$ and $ISO(n)$ // Nagoya Math. J.— 1984.— *94.*— June.— С. 43—49 (РЖМат, 1985, 1А617)
179. — The invariant polynomial algebras for the groups $ISL(n)$ and $ISp(n)$ // Nagoya Math. J.— 1984.— *94.*— С. 61—73 (РЖМат, 1985, 1А618)
180. *Karadayi H. R.* On the anomaly number of the classical groups // J. Math. Phys.— 1984.— *25,* № 3.— С. 411—413 (РЖМат, 1984, 8А510)
181. *Kočandrlová M.* Klassifikation konvexer Polyeder // Čas. pěstov. mat.— 1984.— *108,* № 3.— С. 241—247 (РЖМат, 1984, 3А783)
182. *Koh In-Guy, Patera J., Rousseau C.* Clebsch—Gordan coefficients for E_6 and $SO(10)$ unificationes models // J. Math. Phys.— 1984.— *25,* № 10.— С. 2863—2872 (РЖМат, 1985, 4А516)
183. *Klein F.* Vorlesungen über das Ikosaeder und Auflösung der Gleichungen fünften Grades.— Leipzig, 1884.— 260 с.
184. *Kung J. P. S., Pota G.-C.* The invariant theory of binary

forms // Bull. Amer. Math. Soc.— 1984.— *10,* № 1.— С. 27—85 (РЖМат, 1985, 2А463)
185. *Łoskiewicz G.* Proprietes de l'ensemble des plans polaires d'un point par rapport aux quadriques du faisceau de quadriques reglees // Zesz. nauk. AGH: Mat., fiz., chem. (Monogr.).— 1984.— № 57.— С. 191—196 (РЖМат, 1985, 7А744)
186. *Lüneburg H.* Über symmetrische Polynome // Symp. Math. Inst. Naz. Alta Mat. Francesco Severi.— London; New York.— 1986.— *28.*— С. 31—35 (РМЖат, 1987, 5А297)
187. *Macdonald I. G.* Regular simplexes with integral vertices // Math. Repts Acad. Sci. Can.— 1987.— *9,* № 4.— С. 189—193 (РЖМат, 1987, 12А648)
188. *Martinais D.* Classification des groupes crictallographiques de type ceosaédrique en dimention 6 // Acad. Sci.— 1987.— Sér. 1.— *305,* № 12.— С. 509—512 (РЖМат, 1988, 4А173)
189. *Maschke H.* Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternaren Gruppe von 51840 linearen Substitution // Math. Ann.— 1889.— *33.*— С. 317—344
190. *Metha M. L.* Basic sets of invariant polynomials for finite reflection groups // Commun. Algebra.— 1988.— *16,* № 5.— С. 1083—1098 (РЖМат, 1988, 9А419)
191. *Molnár E.* Space forms and fundamental polyhedron // Proc. of the Conf. on Differ. Geom. and its Appl.; Nove Město na Moravě, Czechoslovakia, September 5—9, 1983.— Univ. Karlova, Praha.— С. 91—103
192. *Moppert C. F.* Two rotations generate all Euclidean motions and all elliptic motions // Geom. dedic.— 1985.— *18,* № 3.— С. 275—280 (РЖМат, 1986, 1А802)
193. *Muck A.* Producty operací symetrie v bodových grupách // Sb. VSCHT Praze.— 1984.— *B29.*— С. 189—194 (РЖМат, 1984, 8А641).
194. *Nakajima Haruhisa* Invariants of reductive Lie groups of rank one and their applications // Proc. Jap. Acad.— 1984.— *A60,* № 6.— С. 221—224 (РЖМат, 1984, 12А464)
195. *Nickalls R. W. D.* A line-and-conic theorem having a visual correlate // Math. Gaz.— 1986.— *70,* № 541.— С. 27—29 (РЖМат, 1986, 9А633)
196. *Orlik P., Solomon L.* The Hessian map in the invariant theory of reflection groups // Nagoya Math. J.— 1988.— *109.*— С. 1—21 (РЖМат, 1988, 9А508)
197. —, — Discriminats in the invariant theory of reflection groups // Nagoya Math. J.— 1988.— *109.*— С. 23—45 (РЖМат, 1988, 9А509)
198. —, —, *Terao Hiroaki* On Coxeter arrangements and the Coxeter number // Complex Anal. Singularit. Tokyo; Amsterdam e. a.— 1987.— С. 461—477 (РЖМат, 1987, 9А525)
199. *Pohst M.* Computation of integral solutions of a special type of systems of quadratic equations // Lect. Notes Comput. Sci.— 1983.— *162.*— С. 203—213 (РЖМат, 1984, 7А322)
200. *Popov V. L.* Modern developments in invariant theory // Proc. Int. Congr. Math., Berkeley, Calif., Aug. 3—11, 1986, Vol. 1.— Providence, R. I.— 1987.— С. 394—406 (РЖМат, 1988, 9А510)
201. *Pottmann H.* Über affine zykloidale Radlinien // Sitzungsber. Österr. Akad Wiss. Math.-naturwiss. Kl.— 1982, Abt. 2.— *191,* № 4—7.— С. 203—211 (РЖМат, 1984, 3А769)
202. *Pommerening K.* Invariants of unipotent groups // Invariant theory. Symp. West Chester / Pa. 1985. Lect. Notes Math.— 1987.— *1278.*— С. 8—17
203. *Renschuch B.* Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale. XXI. Syzygienberechnung bei möglichen Reduktionen auf Potenzproduktideale // Wiss. Z. Päd. Hochsch. K. Liebknecht Potsdam.— 1985.— *29,* № 1.— С. 117—122 (РЖМат, 1986, 1А516)
204. *Richards W. A.* A dimensional invariant property in *n*-dimensional geometry // Math. and Comput. Educ.— 1987.— *21,* № 2.— С. 113—116 (РЖМат, 1987, 9А731)

205. *Robertson S. A.* Polytopes and symmetry // London Math. Soc. Lect. Note Ser.— 1984.— № 90.— 112 с. (РЖМат, 1984, 6А643)
206. *Roos C.* On the volume of an n-dimensional simplex // Nieuw arch. wisk.— 1987.— *5*, № 3.— С. 359—365 (РЖМат, 1988, 8А625)
207. *Röschel O.* Rationale räumliche Zhangläufe vierter Ordnung // Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl.— 1985, Abt. 2.— *194*, № 4—10.— С. 185—202 (РЖМат, 1986, 12А916)
208. *Ryshkov S. S., Erdahl R. M.* The empty sphere // Queen's Math. Preprint 1975—40, Queen's Univ., Canada, 1986.— 45 с.
209. —, — The empty sphere. II // Queen's Math. Preprint 1986—26, Queen's Univ., Canada, 1986.— 35 с.
210. *Schmidt J. R., Bincer A. M.* The Konstant partition function for simple Lie algebras // J. Math. Phys.— 1984.— *25*, № 8.— С. 2367—2373 (РЖМат, 1985, 2А503)
211. *Schram H. M., Hijmans J.* Diagrammatic construction of an irreducible basis of algebraic invariants for the sixteen vertex model // Physica.— 1984.— *A125*, № 1.— Т. 58—74 (РЖМат, 1984, 12А463)
212. *Schwarz G. W.* Invariant theory of G_2 // Bull. Amer. Math. Soc.— 1983.— *9*, № 3.— С. 335—338 (РЖМат, 1984, 7А419)
213. *Shephard G. C.* Unitary groups generated by reflection // Can. J. Math.— 1953.— *5*, № 3.— С. 364—383 (РЖМат, 1954, 3242).
214.—, *Todd J A.* Finite unitary reflection groups // Can J. Math.— 1954.— *6*, № 2.— С. 274—304 (РЖМат, 1956, 219)
215. *Smith L.* On the invariant theory of finite pseudo reflection groups // Arch. Math.— 1985.— *44*, № 3.— С. 225—228 (РЖМат, 1985, 9А247)
216. *Springer T. A.* Series de Poincare dans la theorie des invariants // Lect. Notes Math.— 1984.— *1029*.— С. 37—54 (РЖМат, 1984, 9А412)
217. *Surowski D. B.* Reflection compound representations of groups of type D_n // J. Algebra.— 1983.— *83*, № 1.— С. 113—125 (РЖМат, 1984, 1А464)
218. *Talbot R. F.* Generalizations of Pythagoras' theorem in n dimensions // Math. Sci.— 1987.— *12*, № 2.— С. 117—121 (РЖМат, 1988, 9А719)
219. *Taormina A.* Charge operators in simple Lie groups // J. Math. Phys.— 1984.— *25*, № 3.— С. 433—442 (РЖМат, 1984, 8А509)
220. *Temesvári A. H.* Über einige Extremum-probleme bei der ν-Potenzsumme von Abständen // Koll. Geom. und Komb.; Karl-Marx-Stadt, DDR, Oktober 13—14, 1983.— С. 195—198
221. *Varadarajan V. S.* Lie groups, Li algebras, and their reprsentations.— New York e. a., Springer, 1984.— 430 с. (РЖМат, 1985, 1А606 К)
222. *Wagner A.* Invariants of groups generated by reflections or transvections // Arch. Math.— 1981.— *36*, № 1.— С. 10—12 (РЖМат, 1981, 8А401)
223. *Walter J. H.* The B-conjecture; characterization of Chevalley // Mem. AMS.— 1986.— *61*, № 345, IV.— С. 1—196 (РЖМат, 1986, 10А412).
224. *Watanabe Kei-ichi.* Invariant subrings of finite groups which are complete intersections // Commun. Algebra: Anal. Meth. Math. Sci. Reg. Res. Conf., George Mason Univ., 6—10 Aug., 1979.— New York; Basel.— 1982.— С. 37—44 (РЖМат, 1984, 4А480)
225. *Weiner L. M.* The theorem of Pythagoras in n dimensions // Rev. Univ. nac. Tucumán. 1957.— *A11*, № 1—2.— С. 28—31 (РЖМат, 1959, 4108)
226. *Weisfeiler B.* Comments on differential invariants // Infinite Dimens. Groups with Appl.— New York e. a.— С. 355—370 (РЖМат, 1986, 9А385)
227. *Wunderlich W.* Kongruent-inverse Kurvenpaare // Ber. math.-statist. Sek. Forschungszent. Graz.— 1984.— № 215—226.— С. 1—11 (РЖМат, 1985, 7А746)
228. *Zalesskii A. E.* The fixed algebra of a group generated by reflections is not always free // Arch. Math.— 1983.— *41*, № 5.— С. 434—437 (РЖМат, 1984, 4А436)