Ю. В. Матиясевич, О распознавании в реальное время отношения вхождения, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1971, том 20, 104–114

Ю.В.Матиясевич

О РАСПОЗНАВАНИИ В РЕАЛЬНОЕ ВРЕМЯ ОТНОШЕНИЯ ВХОЖДЕНИЯ *)

Пусть $\mathfrak{A}$ - некоторый более чем однобуквенный алфавит. Обозначим через $P \succ Q$ предикат "слово Q входит в слово P "(прописные латинские буквы мы всюду используем в качестве переменных для слов в алфавите $\mathfrak{A}$).

Задача о распознавании истинности предиката $\succ$ имеет различные интерпретации. Например, можно считать, что мы имеем словарь P и ищем в нем нужное нам слово Q , или что имеется статья P и нужно проверить, встречается ли в ней данное ключевое слово Q . При этом значительный интерес представляет распознавание предиката $\succ$ в реальное время. Здесь можно выделить несколько задач, различающихся по степени доступности информации о словах в каждый момент времени.

Так, Р.И.Фрейдзон в [I] рассматривает задачу о распознавании истинности предиката $P \succ Q$ для случая, когда на вход подается слово $P * Q$, где $*$ - разделительная буква, не входящая в алфавит $\mathfrak{A}$. Эта задача, как показано в [I] , неразрешима в реальное время на многоленточных машинах Тьюринга со входом.

Моррисон рассматривал задачу о распознаваемости истинности одноместного предиката $P \succ Q$ при фиксированном слове P .Эта задача может быть решена в реальное время на конечных автоматах, которые легко строятся по заданному слову P (см. [2]) .

Мы рассмотрим следующие две задачи.

*) Результаты этой заметки были доложены на Ленинградском семинаре по конструктивной математике 15 мая 1969 г.

А. Задача о распознавании в реальное время для фиксированного слова Q истинности одноместного предиката $P \succ Q$.

Б. Задача о распознавании в реальное время истинности предиката $P \succ Q$ при одновременной подаче на два входа слов P и Q.

Такие постановки естественны для случая, когда слово P (словарь, статья) хранится в памяти в виде одномерного массива и выдается оттуда буква за буквой.

Основным результатом данной заметки является теорема о том, что задача Б разрешима на машине Тьюринга с двумерной лентой (уточнение этого понятия приведено ниже). Искомая машина строится в три этапа.

Первоначально мы укажем, как можно построить конечный автомат, решающий задачу А. Затем мы покажем, что работа такого автомата может быть проимитирована некоторой машиной Тьюринга, на двумерной ленте которой записана схема этого автомата. Наконец, мы покажем, что схема такого автомата может быть построена другой машиной Тьюринга за достаточно короткое время. Искомая машина получается объединением этих двух машин.

Не ограничивая общности мы будем считать, что алфавит $\mathfrak{A}$ состоит из двух букв 0 и 1. Введем также следующие обозначения:

$$\bar{0} \Leftarrow 1, \quad \bar{1} \Leftarrow 0.$$

Если слово X представимо в виде YZ, где Y и Z - слова, то будем говорить, что слово Y является X-началом, а слово Z - X-концом.

Будем обозначать буквами m и n соответственно длины слов, обозначаемых буквами P и Q, $p_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ и $q_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ будут обозначать i-ю букву соответственно слова P и слова Q.

I. Опишем конечный автомат $\mathfrak{A}_Q$, решающий задачу А. Этот автомат имеет $n+1$ состояние $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Состояние a_1 является начальным. Из состояния a_{n+1} автомат переходит в то же самое состояние независимо от входного сигнала. Из состояния $a_i (i \leqslant n)$ при поступлении на вход буквы $x (x \in \{0, 1\})$

автомат переходит в состояние a_j, где j - длина наибольшего Q -начала, которое является концом слова $p_1 p_2 \dots p_{i-1}$. В состоянии a_{n+1} автомат выдает на выход букву $И$ независимо от входного сигнала. В состоянии a_n автомат выдает на выход букву $И$ при поступлении на вход буквы p_n. Во всех остальных случаях автомат выдает на выход букву $Л$.

<u>Теорема I</u>. Автомат $\mathfrak{A}_Q$ выдает на выход букву $И$ в том и только том случае, когда поступившее на его вход слово содержит слово Q.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

<u>Лемма I</u>. Каково бы ни было слово P, содержащее слово Q разве лишь в качестве своего конца, при поступлении на вход слова P автомат переходит в состояние a_j, где j - длина наибольшего Q -начала, являющегося одновременно P-концом.

Лемма легко доказывается индукцией по длине слова P.

2. Прежде чем описывать машину Тьюринга, решающую задачу А, мы должны уточнить понятие машины Тьюринга со входами и выходами, двумерной лентой и несколькими головками. Сделаем это.

Внешняя память машины представляет из себя плоскоть, разделенную на квадратные клетки. Для удобства описания работы машины мы будем считать, что все клетки занумерованы естественным образом парами целых чисел.

Обычно предполагается, что в каждой клетке ленты машины Тьюринга может быть записано не более одной буквы из некоторого фиксированного алфавита. Мы также включим в описание машины некоторый алфавит $Ю$, называемый *внутренним алфавитом* данной машины.

Однако нам будет удобнее говорить не о том, что в такой-то клетке написана такая-то буква, а о том, что такая-то клетка *отмечена* такой-то буквой. При этом каждая клетка может быть отмечена сразу несколькими различными буквами, или ни одной. Ясно, что для того, чтобы вернуться к традиционному варианту, достаточно ввести новый алфавит, имеющий 2^s букв, где s - число букв алфавита Ю .

На ленте может находиться одна или несколько г о л о в о к. Считается, что каждая головка в любой момент времени находится в одной из клеток. Говорят также, что головка о б о з р е в а е т ту клетку, в которой она находится. Одну клетку могут одновременно обозревать сразу несколько головок.

Машина работает в дискретном времени. За один такт работы каждая головка может отметить обозреваемую ею клетку одной или несколькими буквами, а также "стереть" имевшиеся ранее отметки. После этого головка может остаться в той же клетке или переместиться в одну из восьми соседних клеток (каждая из координат которых отличается от соответствующей координаты обозреваемой клетки не более чем на единицу).

В каждый момент времени машина находится в одном из конечного числа в н у т р е н н и х с о с т о я н и й .

Кроме внутреннего алфавита имеются также в х о д н о й а л ф а в и т и в ы х о д н о й а л ф а в и т . Такты работы машины делятся на г л а в н ы е и в с п о м о г а т е л ь н ы е . Во время главного такта на один или несколько входов машины поступает по одной букве из входного алфавита, а машина выдает на каждый из выходов по одной букве из выходного алфавита.

П о л н о е с о с т о я н и е машины на вспомогательном такте состоит из

а) внутреннего состояния;

б) списка (быть может, пустого) всех тех пар головок, которые находятся в одной и той же клетке;

в) списка, содержащего полную информацию о том, какими буквами отмечены все обозреваемые на данном такте клетки.

Полное состояние машины во время главного такта включает кроме того

г) список букв, поступающих на каждый из входов.

Машина задается т а б л и ц е й п е р е х о д о в . Эта таблица состоит из двух колонок, в левой перечислены всевозможные полные состояния машины, а в правой указаны:

а) полная информация о том, как должна измениться отмеченность обозреваемых клеток;

б) полная информация о том, должна ли передвинуться каждая из головок и если должна, то куда;

в) новое внутреннее состояние;

г) список букв, выдаваемых на каждом из выходов (для случая главных тактов).

Однако мы для задания машины будем использовать не полную, а сокращенную таблицу переходов. От полной она отличается тем, что в левой колонке выписана не полная информация о каждом из возможных состояний, а лишь частичная, которая, однако, достаточна для однозначного заполнения правой колонки. В правой же колонке отмечаются лишь изменения, т.е. не указывается новое состояние, если оно совпадает с предыдущим, не указывается сдвиг головки, если она остается на месте и т.д. При этом строки с пустой правой частью исключаются из таблицы. Знаки $\urcorner$ и $\vee$, как обычно, являются знаками отрицания и дизъюнкции.

Мы будем использовать следующие обозначения. Запись вида $\Lambda_1 : \Lambda_2 : \ldots : \Lambda_k = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\ell$, где $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ – обозначения головок, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ – буквы внутреннего алфавита, обозначает, что головки $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ находятся в одной и той же клетке, которая отмечена буквами $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$. Аналогично запись вида $\Pi \pi$, где Π – обозначение входа, а π – буква входного алфавита, обозначает, что на вход Π поступает буква π. Перемещения головок обозначаются стрелками $\uparrow, \nearrow, \rightarrow, \searrow, \downarrow, \swarrow, \leftarrow, \nwarrow$, имеющими естественный смысл. Стрелки ставятся справа от обозначения головки. Запись вида $\lambda_1 \ldots \lambda_\ell \Lambda_1 \ldots \Lambda_k$ обозначает, что клетки, обозревавшиеся головками $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$, отмечаются на данном такте буквами $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$. Кроме того, вместо конкретных букв внутреннего алфавита могут стоять переменные с указанием области их изменения.

Мы будем считать, что главными являются все такты с номерами вида $i\nu + 1$, где i – произвольное целое неотрицательное число, а ν – фиксированное целое положительное число, называемое *длиной цикла* данной машины. Про машину, имеющую такой порядок чередования главных тактов будем говорить, что она *работает в реальном времени*. Оправданием такой терминологии является следующая теорема.

<u>Теорема 2</u>. *Какова бы ни была машина Тьюринга* $\mathcal{L}$ *, работающая в реальном времени, можно построить машину Тьюринга* $\mathcal{L}'$ *, имеющую те же входной и выходной алфавиты и то же число входов и выходов, у которой длина цикла равна* I (т.е. все такты главные) *и такую, что каковы бы ни были слова входного алфавита, если их подать на входы обеих машин, то на выходах обеих машин будут получены одни те же слова.*

Теорему нетрудно доказать, разбивая внешнюю память машины $\mathcal{L}$ на большие квадраты, содержащие по ν^2 клеток (ν - длина цикла машины $\mathcal{L}$), и беря в качестве внешнего алфавита машины $\mathcal{L}'$ столь большой алфавит, что его буквами можно занумеровать содержимое больших квадратов. При этом работа каждой головки машины $\mathcal{L}$ моделируется работой девяти головок машины $\mathcal{L}'$, расположенных в форме квадрата 3×3.

Приведем описание машины $\mathfrak{M}$, которая может имитировать работу автомата $\mathfrak{A}_Q$. Эта машина имеет четыре состояния m_1, m_2, m_3, m_4, четыре головки Δ, M, N и Ω, один вход Φ . Внутренний алфавит состоит из пяти букв $0, 1, \alpha, \beta, \varepsilon$, входной - из двух букв $0, 1$, выходной - из двух букв И, Л. Длина цикла равна 5. Начальным является состояние m_1 . Ниже приводится сокращенная таблица переходов машины $\mathfrak{M}$.

Работа головки M

Φx	$x M \uparrow$

$x \in \{0, 1\}$

Работа головок Δ и N

m_1; Δx; $N x$	$\Delta\nearrow$; $N\uparrow$	
m_1; $\Delta x \varepsilon$; $N \bar{x}$	m_2; $N\uparrow$	
m_2; $\neg(\Delta\alpha \vee \Delta\beta)$	$\Delta\downarrow$	
m_2; $\Delta\alpha$	m_3	
m_2; $\Delta\beta$	m_4	
$m_3 \vee m_4$; $\neg(\Delta 0 \vee \Delta 1)$	$\Delta\leftarrow$	
m_3; Δx	m_1	$x \in \{0,1\}$
m_4; Δx	m_2	

Выход

m_1; $\neg(\Delta 0 \vee \Delta 1)$	И
m_1; $\Delta : \Omega x$; Φx	И
Все остальные главные такты	Л

Машина $\mathfrak{M}$ имитирует работу автомата $\mathfrak{A}_Q$, если его схема изображена на ленте машины следующим образом. Каждая клетка вида $\langle i, i \rangle$ $(1 \leq i \leq n)$ отмечена буквами q_i и ε. Для каждого i $(1 \leq i \leq n)$ имеется такое j $(1 \leq j \leq i)$, что клетка $\langle i, j \rangle$ отмечена буквой α или буквой β. Если клетка $\langle i, j \rangle$ отмечена буквой α, то при подаче на вход буквы $\bar{q}_i$ автомат $\mathfrak{A}_Q$ переходит из состояния a_i в состояние a_j. Если клетка $\langle i, j \rangle$ отмечена буквой β, то при подаче на вход буквы $\bar{q}_i$ автомат переходит из состояния a_i в то же самое состояние, в которое он переходит при подаче на вход буквы $\bar{q}_i$ из состояния

a_j . Клетки вида $\langle i,i \rangle$ не могут быть отмечены буквой β .На начальном такте головка Δ обозревает клетку $\langle 1,1 \rangle$, головки M и N - клетку $\langle 1,2 \rangle$, головка Ω - клетку $\langle n,n \rangle$.

Машина $\mathfrak{M}$ имитирует работу автомата $\mathfrak{A}_Q$ в следующем смысле. Будем говорить, что некоторая конфигурация машины соответствует состоянию a_i автомата $\mathfrak{A}_Q$, если машина находится в состоянии m_1 , а головка Δ обозревает клетку $\langle i,i \rangle$. При подаче на вход автомата слова P он находится последовательно в каких-то состояниях $a_{s_0}, \ldots, a_{s_m}$. При подаче этого же слова на вход машины $\mathfrak{M}$ начинают последовательно возникать конфигурации, соответствующие состояниям $a_{s_0}, \ldots, a_{s_m}$. При этом справедливо следующее утверждение

Лемма 2. Если после подачи на вход автомата слова $p_1 \ldots p_k$ $(k \leqslant m)$ он переходит в состояние a_ℓ и $\ell \leqslant n$, то конфигурация, соответствующая состоянию a_ℓ наступит не позднее, чем через $4(n-\ell)+2$ такта после подачи на вход машины слова

Лемма доказывается индукцией по k .

С помощью теоремы I и леммы 2 можно доказать следующее утверждение

Теорема 3. Каково бы ни было слово Q , если на ленте машины $\mathfrak{M}$ изображена схема автомата $\mathfrak{A}_Q$, то машина выдает на выходе букву $И$ в том и только том случае, когда поступившее на ее вход слово содержит слово Q .

3. Автомат $\mathfrak{A}_Q$ может иметь, вообще говоря, несколько различных изображений на ленте. Сейчас мы укажем машину $\mathfrak{N}$ с одним входом, которая при поступлении на этот вход слова Q строит одно из возможных изображений автомата $\mathfrak{A}_Q$.

Машина $\mathfrak{N}$ имеет четыре состояния m_1, m_2, m_3, m_4, шесть головок $A, B, \Gamma, \Sigma, \Xi, \Omega$, один вход Ψ .Внутренний и входной алфавиты совпадают с соответствующими алфавитами машины $\mathfrak{M}$. Длина цикла равна 5. Начальным является состояние m_1.

В начальный такт вся лента пуста, а расположение головок таково: головки A, Γ, Ξ находятся в клетке $\langle 1, 1 \rangle$,головки $\sum$ и Ω - в клетке $\langle 0, 0 \rangle$, головка B - в клетке $\langle 1, 0 \rangle$ Ниже приводится сокращенная таблица переходов машины $\mathfrak{N}$.

Работа головок Ξ и Ω

Ψx	$x\Xi\nearrow;\ \Omega\nearrow$

$x \in \{0, 1\}$

Работа головок $A, B, \Gamma, \sum$

$m_1;\ \Gamma x;\ \neg(\sum \bar{x})$	$\varepsilon\Gamma\nearrow;\ \sum\nearrow;\ A\nearrow;\ \beta B\nearrow$
$m_1;\ \Gamma x;\ \sum \bar{x}$	$m_2;\ \varepsilon\Gamma\nearrow;\ \alpha A\rightarrow;\ B\rightarrow$
$m_2;\ \neg(\sum\alpha \vee \sum\beta)$	$\sum\downarrow;\ A\downarrow;\ B\downarrow$
$m_2;\ \sum\alpha$	m_3
$m_2;\ \sum\beta$	m_4
$m_3 \vee m_4;\ \neg(\sum 0 \vee \sum 1)$	$\sum\leftarrow$
$m_3;\ \sum x$	m_1
$m_4;\ \sum x$	m_2

<u>Теорема 4</u>. Каково бы ни было слово Q, через конечное число тактов после подачи слова Q на вход машины $\mathfrak{N}$ она построит на ленте изображение автомата $\mathfrak{A}_Q$; при этом переходы из состояний $a_1, \dots, a_k$ $(k \leq n)$ будут размечены буквами α и β не позднее, чем через $4 \times (k - \ell) + 1$ такт после по-

ступления на вход слова $q_1, \dots, q_k$, если автомат переходит из состояния a_k при поступлении на вход буквы $\bar{q}_k$ в состояние a_ℓ.

Теорема доказывается индукцией по k, при этом используется тот факт, что расстояние между головками A и Γ может разве лишь увеличиваться.

4. Опишем теперь машину $\mathfrak{R}$, решающую задачу Б. Машина имеет шестнадцать состояний $m_{i,j}$ (i,j = I,2,3,4), девять головок: $A, B, \Gamma, \Delta, \Sigma, M, N, \Xi, \Omega$, два входа Φ и Ψ. Внутренний, входной и выходной алфавиты совпадают с соответствующими алфавитами машины $\mathfrak{M}$. Длина цикла равна I2. Начальным является состояние $m_{1,1}$. В начальный такт лента пуста, головки Δ, M, N расположены так же, как у машины $\mathfrak{M}$, головки A, B, Γ, Σ, Ξ – так же, как у машины $\mathfrak{N}$, а головка Ω обозревает клетку $\langle 0,0 \rangle$.

В состоянии $m_{i,j}$ головки Δ, M и N работают так же, как соответствующие головки машины $\mathfrak{M}$ в состоянии m_i, а головки $A, B, \Gamma, \Sigma, \Xi, \Omega$ – как соответствующие головки машины $\mathfrak{N}$ в состоянии m_j. Таблица выходов машины $\mathfrak{R}$ такова:

$m_1; \neg(\Delta 0 \vee \Delta 1); \Phi x; \Psi x$	И
$m_1; \neg(\Delta 0 \vee \Delta 1); \Phi x; \neg(\Psi 0 \vee \Psi 1)$	И
$m_1; \Delta{:}\Omega x; \Phi x; \neg(\Psi 0 \vee \Psi 1)$	И
Все остальные главные такты	Л

<u>Теорема 5.</u> Каковы бы ни были слова P и Q, машина $\mathfrak{R}$ выдает на выходе букву И после поступления на входы Φ и Ψ соответственно слов P и Q в том и только том случае, когда слово Q входит в слово P.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3 с использованием теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

I. Фрейдзон Р.И. Характеристика сложности рекурсивных предикатов, не зависящая от стандартизации понятия алгорифма. "Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР", 1968, 8, 225-233.

2. Morrison D.R. A feasible library automaton. Тезисы кратких научных сообщений на Международном конгрессе математиков (секция I). Москва, 1966, 10.