Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Т. Г. Красовская, С. А. Мазаник, Асимптотическая эквивалентность линейных дифференциальных систем системам с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 2, 193–201

https://www.mathnet.ru/de11224

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
18 мая 2025 г., 01:27:06

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 193–201

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СИСТЕМАМ С БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2005 г. Т. Г. Красовская, С. А. Мазаник

Ранее в работах [1–3] было показано, что линейная система дифференциальных уравнений может быть заменена линейной системой с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами с сохранением некоторых асимптотических свойств решений. Целью настоящей работы является доказательство существования для любой линейной системы с ограниченными локально интегрируемыми коэффициентами эквивалентной ей в смысле преобразования Ляпунова линейной системы с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, имеющими ограниченные на полуоси $[0, +\infty)$ производные любого порядка.

1. Вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Для любых действительных чисел* $a > 0$, $0 < l \le (\ln 2)/(16a)$ *справедливы следующие неравенства:*

$$2al\exp(8al/3) \le 1 - \exp(-8al/3) \le 3al, \tag{1.1}$$

$$al \le 1 - \exp(-2al). \tag{1.2}$$

Доказательство требуемых неравенств непосредственно следует из свойств показательной и линейной функций, рассматриваемых как функции аргумента l на отрезке $[0, (\ln 2)/(16a)]$ при каждом фиксированном значении a.

На интервале $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию $G(t; 0, \Delta)$, равную нулю и единице соответственно на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(\Delta, +\infty)$ и строго возрастающую на отрезке $[0, \Delta]$, $\Delta > 0$. Легко видеть, что определенная на $\mathbb{R}$ таким образом функция G ограничена вместе со своими производными всех порядков, т.е.

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \exists\, M_n < +\infty: \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |G^{(n)}(t; 0, \Delta)| \le M_n. \tag{1.3}$$

Отметим, что в качестве функции G можно взять функцию (см., например, [4, с. 54]) $G(t; 0, \Delta) = \exp(-t^{-2}\exp(-(t-\Delta)^{-2}))$.

Далее определим функцию $G(t; \sigma, \Delta)$, полагая $G(t; \sigma, \Delta) = G(t - \sigma; 0, \Delta)$, $t, \sigma, \Delta \in \mathbb{R}$, $\Delta > 0$.

Положим для $t, \sigma, \Delta \in \mathbb{R}$, $\Delta > 0$

$$H(t; \sigma, \Delta) = G(t; \sigma, \Delta) - G(t; \sigma + 3\Delta, \Delta). \tag{1.4}$$

Через $\mathbf{P}_\alpha(\mathbb{R}_+)$ обозначим совокупность локально интегрируемых на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ функций p таких, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |p(t)| \le \alpha, \tag{1.5}$$

а через $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ – множество бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций q таких, что $\forall n \in \mathbb{Z}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\exists M_n(q) < +\infty: \sup_{t\in\mathbb{R}} |q^{(n)}(t)| \le M_n(q)$. Сужение функций из $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}_+$

обозначим через $\mathbf{Q}^+(\mathbb{R}_+)$. Обозначим $\mathcal{S}(\xi,\eta,l)=\{0,\ldots,(\eta-\xi)/l-1\}$, если ξ и η – числа, кратные l, и $\mathcal{S}=\mathbb{Z}_0$, если η – символ $+\infty$, а также

$$I(f;s,t)=\int_s^t f(u)\,du,\quad I^+(f,g;s,t,d)=\int_s^t (f(u)-g(u))\,du+\int_t^{t+d} f(u)\,du,$$

$$I^-(f,g;s,t,d)=\int_s^t (f(u)-g(u))\,du+\int_{s-d}^{s} f(u)\,du,\quad E(f;s,t)=\exp\int_s^t f(v)\,dv,$$

где $s,t,d\in\mathbb{R}$, $d\geq 0$.

Непосредственно из определения функции $G(t;\sigma,\Delta)$ следует

Лемма 1.2. *Для любых $\sigma\in\mathbb{R}$, $\Delta>0$ справедливо равенство*

$$I(G(u;\sigma,\Delta);\sigma,\sigma+\Delta)=I(G(u;0,\Delta);0,\Delta). \tag{1.6}$$

Лемма 1.3. *Для любых действительных положительных α, l, любого $k\in\mathbb{Z}_0$ и любой функции $p\in\mathbf{P}_\alpha(\mathbb{R}_+)$ существует такая функция $q\in\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$, что неравенство*

$$|I(p-q;kl,t)|\leq 4\alpha l \tag{1.7}$$

выполняется для всех $t\in[kl,\eta)$, где $\eta=nl$, $n\in\mathbb{N}$, $n>k$, либо η – символ $+\infty$.

Доказательство. Для $t\in\mathbb{R}\setminus(kl,\eta)$ в качестве функции q можно взять любую функцию из $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$, для которой $q^{(m)}(kl)=0$ (и $q^{(m)}(nl)=0$ при $\eta=nl$) для всех $m\in\mathbb{Z}_0$. Далее требуемую функцию q построим последовательно на промежутках длины l, начиная с $[kl,kl+l]$, следующим образом: для $t\in[kl+sl,kl+sl+l]$, $s\in\mathcal{S}(kl,\eta,l)$, положим

$$q(t)=\begin{cases}4\alpha H(t;kl+sl,\Delta)/3, & \text{если}\quad 0\leq I_s^+(p,q;k,l)\leq 2\alpha l,\\ -4\alpha H(t;kl+sl,\Delta)/3, & \text{если}\quad -2\alpha l\leq I_s^+(p,q;k,l)<0,\end{cases} \tag{1.8}$$

где $\Delta=l/4$, $I_s^+(p,q;k,l)=I^+(p,q;kl,kl+sl,l)$. В силу (1.3) и (1.4) функция q и ее производные будут ограничены на $[kl,\eta)$, т.е. $q\in\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$.

Заметим, что при таком построении функции q будет справедливо равенство

$$|I(q;(k+s)l,(k+s+1)l)|=\alpha l\quad \forall s\in\mathcal{S}(kl,\eta,l). \tag{1.9}$$

Действительно, для $t\in[v,v+l]=[kl+sl,kl+sl+l]$ из определения функций G, H и леммы 1.2 следует равенство

$$|I(q;v,v+4\Delta)|=4\alpha(I(H(u;v,\Delta);v,v+\Delta)+I(H;v+\Delta,v+3\Delta)+I(H;v+3\Delta,v+l))/3=$$
$$=4\alpha(I(G(u;v,\Delta);v,v+\Delta)+I(1;v+\Delta;v+3\Delta)+I(G(u;v,\Delta)-G(u;v+3\Delta,\Delta);v+3\Delta,v+l))/3=$$
$$=4\alpha(I(G(u;0,\Delta);0,\Delta)+2\Delta+I(1;v+3\Delta,v+l)-I(G(u;0,\Delta);0,\Delta))/3=4\alpha\Delta=\alpha l.$$

Поскольку очевидно, что неравенство

$$|I(p-q;kl,kl+sl)|\leq\alpha l \tag{1.10}$$

выполнено для $s=0$, то из его выполнения при $s=m$ из (1.5) следует неравенство $|I_m^+(p,q;k,l)|\leq 2\alpha l$, откуда в силу (1.8) и (1.9) получаем $|I(p-q;kl,kl+(m+1)l)|\leq\alpha l$. Следовательно, по индукции неравенство (1.10) выполнено для всех $s\in\mathcal{S}(kl,\eta,l)$. Это означает, что определение функции q корректно и при этом для любого $t\in[kl+sl,kl+sl+l]$, $s\in\mathcal{S}(kl,\eta,l)$, будет выполнено неравенство

$$|I(p-q,kl,t)|\leq|I(p-q,kl,kl+sl)|+|I(p,kl+sl,t)|+|I(-q,kl+sl,t)|\leq\alpha l+\alpha l+4\alpha l/3\leq 4\alpha l,$$

что и доказывает требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Для любых действительных* $L \geq 1$, $a > 0$, $0 < l \leq (\ln 2)/(16a)$, γ, $|\gamma| \leq \leq al \exp(8al/3)$, *любых* $k \in \mathbb{Z}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $k < n$, *и любой функции* $p \in \mathbf{P}_\alpha(\mathbb{R}_+)$, $0 < \alpha < a/12$, *существует такая функция* $q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$, *что для всех* $t \in [kl, nl]$ *выполняется неравенство*

$$|\gamma + LI(p-q; t, nl)| \leq L(0.75 - 0.75\exp(-8al/3) - al/4). \tag{1.11}$$

Доказательство. Для $t \in \mathbb{R} \setminus (kl, nl)$ в качестве функции q можно взять любую функцию из $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$, для которой $q^{(m)}(kl) = q^{(m)}(nl) = 0$ при всех $m \in \mathbb{Z}_0$. Положим $M = = 0.75(1 - \exp(-8al/3)) - 0.5al$. Требуемую функцию q построим последовательно на промежутках длины l, начиная с $[nl-l, nl]$, следующим образом: для значений $t \in [nl-sl-l, nl-sl]$, $s \in \mathcal{S}(kl, nl, l)$, положим

$$q(t) = \begin{cases} 4\alpha H(t; (n-s-1)l, \Delta)/3, & \text{если} \quad 0 \leq I^-_{\gamma s}(p, q; n, l) \leq M + \alpha l, \\ -4\alpha H(t; (n-s-1)l, \Delta)/3, & \text{если} \quad -M - \alpha l \leq I^-_{\gamma s}(p, q; n, l) < 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

где $\Delta = l/4$, $I^-_{\gamma s}(p, q; n, l) = \gamma L^{-1} + I^-(p, q; nl - sl, nl, l)$. В силу (1.3) и (1.4) функция q и ее производные будут ограничены на $[kl, nl]$, т.е. $q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$. Кроме того, как показано в лемме 1.3, будет выполнено равенство

$$|I(q; kl + sl, kl + (s+1)l)| = \alpha l \quad \forall s \in \mathcal{S}(kl, nl, l). \tag{1.13}$$

Из неравенств (1.1) следует, что $|\gamma| - M \leq al\exp(8al/3) - 0.75(1 - \exp(-8al/3)) + 0.5al \leq \leq 1.5al\exp(8al/3) - 0.75(1 - \exp(-8al/3)) \leq 0.75(2al\exp(8al/3) - (1 - \exp(-8al/3))) \leq 0$. Поэтому неравенство

$$|\gamma L^{-1} + I(p - q; nl - sl, nl)| \leq M \tag{1.14}$$

выполнено для $s = 0$. Из его выполнения при $s = m$, $0 \leq m \leq n - k - 2$, и (1.5) следует, что $|I^-_{\gamma m}(p, q; n, l)| \leq M + \alpha l$, откуда в силу (1.12) и (1.13) получаем $|\gamma L^{-1} + I(p-q; (n-m-1)l, nl)| \leq \leq \max\{\alpha l, M\}$. Так как из неравенств (1.1) и $\alpha < a$ следует, что $\max\{\alpha l, M\} = M$, то по индукции неравенство (1.14) выполнено для всех $s \in \mathcal{S}(kl, nl, l)$. Это означает, что определение функции q корректно, и так как $\alpha < a/12$, то при этом для любого $t \in [nl - sl - l, nl - sl]$ будет выполнено неравенство

$$|\gamma + LI(p - q, t, nl)| \leq |\gamma + LI(p - q, nl - sl, nl)| + L|I(p, t, nl - sl)| + L|I(-q, t, nl - sl)| \leq$$

$$\leq L(M + \alpha l + 4\alpha l/3) \leq L(M + 3\alpha l) \leq L(M + 0.25al),$$

что и доказывает требуемое утверждение. Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Для любого натурального* N, *любых действительных* $a > 0$, $0 < l_0 \leq \leq (\ln 2)/(16a)$, *и любых функций* $p_1, p_2 \in \mathbf{P}_a(\mathbb{R}_+)$, $p \in \mathbf{P}_\alpha(\mathbb{R}_+)$, $0 < \alpha \leq a^2 l_0/(4N)$, *существуют такие функции* $q_1, q_2, q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$, *что для всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *функция*

$$F(t) = E(q_1 - q_2; 0, t)I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t)$$

удовлетворяет неравенству

$$|F(t)| \leq 6al_0/N. \tag{1.15}$$

Доказательство. Обозначим $l = l_0/N$. Рассмотрим две произвольные функции $p_1, p_2 \in \in \mathbf{P}_a(\mathbb{R}_+)$, для которых на промежутках $[kl_0, kl_0 + l_0[$, $k \in \mathbb{Z}_0$, в соответствии с леммой 1.3 построим бесконечно дифференцируемые ограниченные функции $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$. Заметим, что при таком построении функций q_1 и q_2 на интервалах $(kl_0, kl_0 + l_0)$, $k \in \mathbb{Z}_0$, разность $q_1 - q_2$ имеет фиксированный знак. Промежутки, содержащие только интервалы, на которых $q_1(t) - q_2(t) \leq 0$, назовем промежутками первого типа, а содержащие только интервалы, на которых $q_1(t) - q_2(t) > 0$, – второго. Эти промежутки, вообще говоря, чередуются. Рассмотрим интервал (ξ, η), где $\xi \in \mathbb{R}_+$, а $\eta \in \mathbb{R}_+$ или η – символ $+\infty$, $\eta - \xi \geq l$.

Будем говорить, что в точке ξ выполнено

Условие А, если $I((p-q)E(q_2-q_1;0,u);0,\xi) = \gamma E(q_2-q_1;0,\xi)$, где $|\gamma| \le al\exp(8al/3)$.
Условие Б, если

$$|I((p-q)E(q_2-q_1;0,u);0,\xi) + I(pE(q_2-q_1;0,u);\xi,\eta)| \le 2aI(E(q_2-q_1;0,u);\xi,\xi+l).$$

Существование требуемой функции q докажем последовательным построением ее на промежутках первого и второго типов по следующей схеме.

I. В случае если (ξ,η) является промежутком первого типа, а следующий за ним промежуток (η,ζ) – промежутком второго типа, то, предполагая, что в точке ξ выполнено условие А, строим требуемую функцию q на (ξ,η) так, чтобы в точке η было выполнено условие Б.

II. В случае если (ξ,η) является промежутком второго типа, а следующий за ним промежуток (η,ζ) – промежутком первого типа, то, предполагая, что в точке ξ выполнено условие Б, строим требуемую функцию q на (ξ,η) так, чтобы в точке η было выполнено условие А.

III. Установим, что если нуль – начало промежутка первого типа, то в нуле выполнено условие А, а если нуль – начало промежутка второго типа, то в нуле выполнено условие Б.

Таким образом, мы последовательно построим требуемую функцию q на всем множестве $\mathbb{R}_+$ так, что на левых концах всех промежутков первого типа будет выполнено условие А, а на левых концах всех промежутков второго типа – условие Б. Для $t \in (-\infty,0]$ положим $q(t)=0$.

I. Пусть (t_0,t_1) является промежутком первого типа, где $t_0 = kl = n_0l_0$, $k = Nn_0$, $n_0 \in \mathbb{Z}_0$, а t_1 – или число (и тогда $t_1 = nl = n_1l_0$, $n = Nn_1$, $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$), или символ $+\infty$. Так как (t_0,t_1) – промежуток первого типа, то на нем функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$ определены таким образом, что на каждом из интервалов (t_0+il, t_0+il+l), $i \in \mathcal{S}(t_0,t_1,l)$, выполнено неравенство $q_2(t)-q_1(t) \ge 0$.

Предположим, что на отрезке $[0,t_0]$ уже построена требуемая функция $q(t) \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$, $q^{(m)}(t_0)=0$ при всех $m \in \mathbb{Z}_0$, причем так, что в точке t_0 выполняется условие А, т.е.

$$I((p-q)E(q_2-q_1;0,u);0,t_0) = \gamma E(q_2-q_1;0,t_0). \tag{1.16}$$

Тогда для $t \ge t_0$ имеем $F(t) = \gamma E(q_1-q_2;t_0,t) + E(q_1-q_2;t_0,t)I((p-q)E(q_2-q_1;t_0,u);t_0,t)$. В силу неотрицательности разности $q_2(t)-q_1(t)$ на (t_0,t_1) положительная функция $E(q_2-q_1;t_0,t)$ возрастает на этом интервале. Поэтому, применяя к интегралу во втором слагаемом теорему о среднем [5, с. 119], получаем

$$F(t) = \gamma E(q_1-q_2;t_0,t) + I(p-q;\hat{t},t), \tag{1.17}$$

где $t_0 \le \hat{t} \le t$.

Рассмотрим два возможных случая: 1) $t_1 = +\infty$ и 2) $t_1 = nl$.

1) Если $t_1 = +\infty$, то строим функцию q на $[t_0,+\infty)$ в соответствии с леммой 1.3. Тогда справедлива оценка $|F(t)| = |\gamma E(q_1-q_2;t_0,t) + I(p-q;t_0,t) - I(p-q;t_0,\hat{t})| \le |\gamma| + 4\alpha l + 4\alpha l \le$ $\le al\exp(8al/3) + 8\alpha l$. Поскольку очевидно, что $\alpha < a/4$ и в силу (1.1) $\exp(8al/3) \le 1.5$, то получаем $|F(t)| \le 3.5al < 6al$ для всех $t \ge t_0$. Следовательно, в этом случае требуемая функция q будет построена на всем $\mathbb{R}_+$.

2) Пусть $t_1 = nl = n_1l_0$ и (t_1,t_2) – промежуток второго типа, где t_2 – или число (и тогда $t_2 = rl = n_2l_0$, $r = Nn_2 \in \mathbb{N}$, $r > n$), или символ $+\infty$. Так как (t_1,t_2) – промежуток второго типа, то на нем функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$ построены в соответствии с леммой 1.3 так, что

$$q_1(t) = \frac{4}{3}a \sum_{i\in\mathcal{S}(t_1,t_2,l_0)} H\left(t;t_1+il_0,\frac{l_0}{4}\right) \le \frac{4}{3}a, \quad q_2(t) = -q_1(t). \tag{1.18}$$

Обозначим

$$I_s(t_1) = I(E(q_2-q_1;0,u);t_1+sl,t_1+sl+l), \quad s \in \mathcal{S}(t_1,t_2,l), \tag{1.19}$$

$$I^0(t_1,t_2) = I((p-q)E(q_2-q_1;0,u);0,t_1) + I(pE(q_2-q_1;0,u);t_1,t_2). \tag{1.20}$$

Построим требуемую функцию q на промежутке (t_0, t_1) так, чтобы в точке t_1 было выполнено условие Б, т.е.

$$|I^0(t_1, t_2)| \le 2aI_0(t_1). \tag{1.21}$$

Так как $I_s(t_1) = E(q_2 - q_1; 0, t_1)E(q_2 - q_1; t_1, t_1 + sl)I(E(q_2 - q_1; t_1 + sl, u); t_1 + sl, t_1 + sl + l)$, то в силу (1.18) имеем оценку

$$I_s(t_1) \ge E(q_2 - q_1; 0, t_1)E(q_2 - q_1; t_1, t_1 + sl)I(\exp(-8a(u - t_1 - sl)/3); t_1 + sl, t_1 + sl + l) =$$

$$= E(q_2 - q_1; 0, t_1)E(q_2 - q_1; t_1, t_1 + sl) \cdot 3(1 - \exp(-8al/3))/(8a), \quad s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l). \tag{1.22}$$

Для доказательства неравенства (1.21) достаточно показать, что

$$|f(t_1)| = |I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t_1)| \le 2aI_0(t_1) - alE(q_2 - q_1; 0, t_1)/4, \tag{1.23}$$

$$|g(t_2)| = |I(pE(q_2 - q_1; 0, u); t_1, t_2)| \le alE(q_2 - q_1; 0, t_1)/4. \tag{1.24}$$

По предположению для уже построенной на отрезке $[0, t_0]$ функции q выполнено условие (1.16), поэтому (как бы ни была определена функция $q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ на $[t_0, t_1]$) имеем

$$f(t_1) = I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t_0) + I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); t_0, t_1) =$$

$$= E(q_2 - q_1; 0, t_0)(\gamma + I((p - q)E(q_2 - q_1; t_0, u); t_0, t_1)).$$

Применяя теорему о среднем [5, с. 119] (функция $E(q_2 - q_1; t_0, t)$ возрастает), получаем, что $f(t_1) = E(q_2 - q_1; 0, t_0)(\gamma + E(q_2 - q_1; t_0, t_1)I(p - q; \hat{t}, t_1))$, где $t_0 \le \hat{t} \le t_1$.

Поскольку легко видеть, что $\alpha < a/12$ и $E(q_2 - q_1; t_0, t_1) \ge 1$, то строим теперь требуемую функцию q на промежутке (t_0, t_1) в соответствии с леммой 1.4, тогда в силу (1.11) для любого $t_0 \le \hat{t} \le t_1$ будет выполнено неравенство

$$|\gamma + E(q_2 - q_1; t_0, t_1)I(p - q; \hat{t}, t_1)| \le E(q_2 - q_1; t_0, t_1)(3 - 3\exp(-8al/3) - al)/4. \tag{1.25}$$

Поэтому $|f(t_1)| \le E(q_2 - q_1; 0, t_1)(3 - 3\exp(-8al/3) - al)/4$. Используя неравенство (1.22) при $s = 0$, получаем требуемое неравенство (1.23).

Оценим величину $g(t_2)$, учитывая равенства (1.9), (1.18):

$$I(E(q_2-q_1; 0, u); t_1, t_2) = \sum_{s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l_0)} E(q_2-q_1; 0, t_1+sl_0)I(E(q_2-q_1; t_1+sl_0, u); t_1+sl_0, t_1+sl_0+l_0) \le$$

$$\le E(q_2 - q_1; 0, t_1) \sum_{s \in \mathbb{Z}_0} \exp(-2al_0 s)I(E(q_2 - q_1; t_1 + sl_0, u); t_1 + sl_0, t_1 + sl_0 + l_0) \le$$

$$\le l_0(1 - \exp(-2al_0))^{-1}E(q_2 - q_1; 0, t_1).$$

Из неравенства $1 - \exp(-2al_0) \ge al_0$ (см. (1.2)) получаем

$$I(E(q_2 - q_1; 0, u); t_1, t_2) \le a^{-1}E(q_2 - q_1; 0, t_1). \tag{1.26}$$

Теперь из условия $\alpha \le a^2 l_0/(4N) = a^2 l/4$ следует требуемое неравенство (1.24) $|g(t_2)| = |I(pE(q_2 - q_1; 0, u); t_1, t_2)| \le \alpha a^{-1}E(q_2 - q_1; 0, t_1) \le alE(q_2 - q_1; 0, t_1)/4$.

Таким образом, на отрезке $[t_0, t_1]$ построена такая функция $q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$, что в точке t_1 выполнено условие Б и при этом в силу (1.1), (1.17) и (1.25) для всех $t \in [t_0, t_1]$, $\hat{t} \in [t_0, t]$ будет выполнено неравенство (1.15): $|F(t)| \le |\gamma| + |I(p - q; \hat{t}, t)| = |\gamma| + |\gamma E(q_1 - q_2; t_0, t_1) + I(p - q; \hat{t}, t_1) - (\gamma E(q_1 - q_2; t_0, t_1) + I(p - q; t, t_1))| \le |\gamma| + |\gamma E(q_1 - q_2; t_0, t_1) + I(p - q; \hat{t}, t_1)| + |\gamma E(q_1 - q_2; t_0, t_1) + I(p - q; t, t_1)| \le al\exp(8al/3) + 2(0.75 - 0.75\exp(-8al/3) - al/4) \le 1.5al + 4al < 6al$.

II. Рассмотрим теперь построение требуемой функции $q \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ на промежутке (t_1, t_2), который является промежутком второго типа. При этом предполагаем, что в точке t_1 выполнено условие Б, т.е. имеет место неравенство (1.21). Как и ранее, считаем, что t_2 – или число (и тогда $t_2 = rl = n_2 l_0 > n_1 l_0 = nl = t_1$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_0$), или символ $+\infty$.

Обозначим для $s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$

$$I^{s+1}(t_1, t_2) = I^s(t_1, t_2) - I(qE(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + sl, t_1 + sl + l), \tag{1.27}$$

где $I^0(t_1, t_2)$ определено формулой (1.20).

Если

$$|I^s(t_1, t_2)| \leq 2aI_s(t_1) \quad \forall\, s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l), \tag{1.28}$$

то функцию q будем строить последовательно на отрезках $[t_1 + sl, t_1 + sl + l]$, $s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$, по формулам

$$q(t) = \begin{cases} a\Gamma_s(t; t_1), & \text{если} \quad 0 \leq I^s(t_1, t_2) \leq 2aI_s(t_1), \\ -a\Gamma_s(t; t_1), & \text{если} \quad -2aI_s(t_1) \leq I^s(t_1, t_2) < 0, \end{cases} \tag{1.29}$$

где

$$\Gamma_s(t; t_1) = \frac{H(t; t_1 + sl, l/4) I(E(q_2 - q_1; t_1 + sl, u); t_1 + sl, t_1 + sl + l)}{I(H(u; t_1 + sl, l/4) E(q_2 - q_1; t_1 + sl, u); t_1 + sl, t_1 + sl + l)}.$$

Так как неравенство (1.28) по предположению выполнено при $s = 0$ (условие Б в точке t_1), то функция q будет корректно определена на $[t_1, t_1 + l]$. Для последующего корректного построения функции q индукцией по s докажем, что неравенство (1.28) выполнено для всех $s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$. Действительно, из (1.29) следует, что

$$I(qE(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + sl, t_1 + sl + l) = \begin{cases} aI_s(t_1), & \text{если} \quad 0 \leq I^s(t_1, t_2) \leq 2aI_s(t_1), \\ -aI_s(t_1), & \text{если} \quad -2aI_s(t_1) \leq I^s(t_1, t_2) < 0. \end{cases} \tag{1.30}$$

Поэтому если неравенство (1.28) выполнено для $s = m$, то

$$|I^{m+1}(t_1, t_2)| = |I^m(t_1, t_2) - I(qE(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + ml, t_1 + ml + l)| \leq aI_m(t_1). \tag{1.31}$$

Поскольку $q_2(t) - q_1(t) < 0$ для $t \in (t_1 + ml, t_1 + ml + l)$ при всех $m \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$, то

$$I_m(t_1) = E(q_2 - q_1; 0, t_1) I(E(q_2 - q_1; t_1, u); t_1 + ml, t_1 + ml + l) \leq E(q_2 - q_1; 0, t_1 + ml)l. \tag{1.32}$$

С другой стороны, в силу (1.18) и (1.22) для всех $m + 1 \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l) \setminus \{0\}$ имеем

$$I_{m+1}(t_1) \geq E(q_2 - q_1; 0, t_1 + ml) E(q_2 - q_1; t_1 + ml, t_1 + ml + l) \cdot 3(1 - \exp(-8al/3))/(8a) \geq$$

$$\geq E(q_2 - q_1; 0, t_1 + ml) \exp(-8al/3) \cdot 3(1 - \exp(-8al/3))/(8a).$$

Из неравенства (1.1) следует, что $I_{m+1}(t_1) \geq 0.75E(q_2 - q_1; 0, t_1 + ml)l$, откуда, учитывая оценку (1.32), получаем $I_m(t_1) \leq 4I_{m+1}(t_1)/3 < 2I_{m+1}(t_1)$, что и дает в силу (1.31) требуемое неравенство (1.28) при $s = m + 1$. Тем самым (1.28) выполнено для всех $s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$ и, кроме того, (1.31) выполнено для всех $m \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$.

Итак, функция q корректно определяется формулами (1.29) последовательно на всех промежутках $[t_1 + sl, t_1 + sl + l]$, $s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$. При этом для любого $s \in \mathcal{S}(t_1, t_2, l)$ и всех $t \in [t_1 + sl, t_1 + sl + l]$ имеем

$$\varphi(t) = I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t) =$$

$$= I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); 0, t_1 + sl) + I((p - q)E(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + sl, t) =$$

$$= I^s(t_1, t_2) - I(pE(q_2 - q_1; 0, u); t, t_2) - I(qE(q_2 - q_1; 0, u); t_1 + sl, t).$$

Оценим интеграл $I(pE(q_2-q_1;0,u);t,t_2)$. Пусть s таково, что $sl\in[\varkappa l_0,\varkappa l_0+l_0)$, тогда, используя оценку (1.26), заменяя t_1 на $t_1+\varkappa l_0$, получаем

$$I(E(q_2-q_1;0,u);t,t_2)\le I(E(q_2-q_1;0,u);t_1+\varkappa l_0,t_2)\le a^{-1}E(q_2-q_1;0,t_1+\varkappa l_0).$$

Поэтому, так как $\alpha\le a^2l_0/(4N)=a^2l/4$, имеем

$$|I(pE(q_2-q_1;0,u);t,t_2)|\le\alpha I(E(q_2-q_1;0,u);t,t_2)\le alE(q_2-q_1;0,t_1+\varkappa l_0)/4.$$

Кроме того, в силу (1.28) и (1.30) имеем $|I^s(t_1,t_2)|\le 2aI_s(t_1)$ и $|I(qE(q_2-q_1;0,u);t_1+sl,t)|\le$ $\le I(|q|E(q_2-q_1;0,u);t_1+sl,t)\le I(|q|E(q_2-q_1;0,u);t_1+sl,t_1+sl+l)=aI_s(t_1)$. Таким образом,

$$|\varphi(t)|\le 3aI_s(t_1)+alE(q_2-q_1;0,t_1+\varkappa l_0)/4\le$$

$$\le E(q_2-q_1;0,t_1+sl)(3aI(E(q_2-q_1;t_1+sl,u);t_1+sl,t_1+sl+l)+alE(q_1-q_2;t_1+\varkappa l_0,t_1+sl)/4)\le$$
$$\le E(q_2-q_1;0,t_1+sl)(3al+0.25al\exp(8al_0/3)).$$

Поскольку $\exp(8al_0/3)\le 1.5$ (см. (1.1)), то $|\varphi(t)|\le 4alE(q_2-q_1;0,t_1+sl)$. Тогда для модуля функции $F(t)$ справедлива оценка

$$|F(t)|=|\varphi(t)E(q_1-q_2;0,t)|=|\varphi(t)|E(q_1-q_2;0,t_1+sl)E(q_1-q_2;t_1+sl,t)\le$$
$$\le|\varphi(t)|E(q_1-q_2;0,t_1+sl)\exp(8al/3)\le 4al\exp(8al/3).$$

Используя неравенство (1.1), окончательно получаем, что неравенство $|F(t)|\le 6al$ выполняется для всех $t\in[t_1,t_2]$.

Следовательно, если $t_2=+\infty$, то требуемая функция q будет построена на всем $\mathbb{R}_+$. Если же $t_2=rl$, то в силу (1.31) при $m=\max\mathcal{S}(t_1,t_2,l)$ имеем

$$|I((p-q)E(q_2-q_1;0,u);0,t_2)|\le aI(E(q_2-q_1;0,u);t_2-l,t_2)=$$

$$=aE(q_2-q_1;0,t_2)E(q_1-q_2;t_2-l,t_2)I(E(q_2-q_1;t_2-l,u);t_2-l,t_2)\le aE(q_2-q_1;0,t_2)\exp(8al/3)l.$$

Итак, $I((p-q)E(q_2-q_1;0,u);0,t_2)=\gamma E(q_2-q_1;0,t_2)$, где $|\gamma|\le al\exp(8al/3)$, т.е. требуемая функция q построена на отрезке $[t_1,t_2]$ так, что в точке t_2 выполнено условие А.

III. Осталось проверить выполнение условий А и Б в нуле. Если $(0,\eta)$ – промежуток первого типа, то очевидно выполнение условия А в нуле. Если же $(0,\eta)$ – промежуток второго типа, то из (1.22) и (1.24) при $t_1=0$ следует, что

$$|I(pE(q_2-q_1;0,u);0,\eta)|=|I^0(0,\eta)|\le 2aI_0(0)=2aI(E(q_2-q_1;0,u);0,l),$$

т.е. условие Б выполнено в нуле.

Таким образом, мы можем последовательно строить на $\mathbb{R}_+$ требуемую функцию $q\in\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$ поочередно на промежутках первого и второго типа. Теорема доказана.

2. Основной результат. Рассмотрим две системы линейных уравнений

$$\dot x=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+,\tag{2.1}$$

$$\dot y=B(t)y,\quad y\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+,\tag{2.2}$$

где элементы матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ – локально интегрируемые ограниченные на $\mathbb{R}_+$ функции. Систему (2.1) будем называть треугольной, если $a_{ij}(t)=0$ для всех $t\in\mathbb{R}_+$ при $i>j$.

Следуя [6], системы (2.1) и (2.2) назовем асимптотически эквивалентными, если существует такая матрица Ляпунова S, что преобразование

$$x=Sy,\quad \max\{\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|S(t)\|,\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|S^{-1}(t)\|,\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|\dot S(t)\|\}<+\infty,$$

переводит систему (2.1) в систему (2.2).

Теорема 2.1. *Для любой треугольной системы (2.1) с локально интегрируемыми ограниченными на* $\mathbb{R}_+$ *коэффициентами существует асимптотически эквивалентная система (2.2) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными на* $\mathbb{R}_+$ *коэффициентами, производные которых также ограничены (каждая своим числом) на* $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Пусть коэффициенты системы (2.1) принадлежат множеству $\mathbf{P}_a(\mathbb{R}_+)$. Обозначим $N = [256n\exp(8al_0)] + 1$ ($[\alpha]$ – целая часть α), $l_i = N^{i-n}l_0$ ($i = 1, \ldots, n-1$), $\lambda = a\exp(-8al_0)l_0/(8N^{n-1}) < 1$, $c_j = \lambda^{j-1}c_1$ ($j = 2, \ldots, n$), где c_1 и l_0 – некоторые положительные действительные числа, причем $l_0 \le (\ln 2)/(16a)$. Пусть X, Y – фундаментальные нормированные в нуле матрицы решений систем (2.1) и (2.2) соответственно, а постоянная невырожденная матрица $C = \operatorname{diag}\{c_1, \ldots, c_n\}$. Тогда матрица перехода от (2.1) к (2.2) имеет вид $S(t) = X(t)CY^{-1}(t)$, т.е будет треугольной и ее ненулевые элементы S_{ij}, $i \le j$, могут быть представлены в виде (см., например, [7])

$$S_{ii}(t) = c_i E(a_{ii} - b_{ii}; 0, t), \quad S_{ij}(t) = c_i E(a_{ii} - b_{ii}; 0, t)F_{ij}(t), \tag{2.3}$$

где

$$F_{i,i+1} = E(b_{ii} - b_{i+1,i+1}; 0, t)\times$$

$$\times I\left(\left(\frac{c_{i+1}}{c_i}a_{i+1,i+1}E(a_{i+1,i+1} - b_{i+1,i+1} + b_{ii} - a_{ii}; 0, u) - b_{i,i+1}\right)E(b_{i+1,i+1} - b_{ii}; 0, u); 0, t\right),$$

$$F_{ij}(t) = E(b_{ii} - b_{jj}; 0, t)I\left(\left(\sum_{k=i+1}^{j-1}\left(\frac{c_k}{c_i}a_{ik}E(a_{kk} - b_{kk} + b_{ii} - a_{ii}; 0, u)F_{kj} - b_{kj}F_{ik}\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{c_j}{c_i}a_{ij}E(a_{jj} - b_{jj} + b_{ii} - a_{ii}; 0, u) - b_{ij}\right)E(b_{jj} - b_{ii}; 0, u); 0, t\right), \quad j - i \ge 2.$$

В силу леммы 1.3 для каждой функции $a_{ii} \in \mathbf{P}_a(\mathbb{R}_+)$ существует такая функция из $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$, что для ее сужения b_{ii} на $\mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$|I(a_{ii} - b_{ii}; 0, t)| \le 4al_0, \tag{2.4}$$

откуда

$$S_{ii}(t) \le c_i \exp(4al_0) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.5}$$

Так как функция $F_{i,i+1}$ имеет вид функции F в теореме 1.1 и

$$|c_{i+1}c_i^{-1}a_{i,i+1}E(a_{i+1,i+1} - b_{i+1,i+1} + b_{ii} - a_{ii}; 0, u)| \le \lambda a\exp(8al_0) = a^2l_0/(8N^{n-1}) = a^2l_0/(4{\cdot}2N^{n-1}),$$

то для каждого $i = 1, \ldots, n-1$ из теоремы 1.1 следует существование такой функции из $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$, что для ее сужения $b_{i,i+1}$ на $\mathbb{R}_+$ выполнено неравенство $|F_{i,i+1}(t)| \le 6al_0/(2N^{n-1}) \le$ $\le 6al_0/(N^{n-1}) = 6al_1$, откуда в силу (2.3) и (2.4)

$$|S_{i,i+1}(t)| \le 6al_1c_i\exp(4al_0) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.6}$$

Заметим, что из доказательства теоремы 1.1 следует, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+}|b_{i,i+1}(t)| \le 8a/3$.

Предположим теперь, что для всех i, j, таких, что $j - i = 1, 2, \ldots, m-1 < n-1$, уже построены функции $b_{ij} \in \mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R}_+)$ так, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+}|b_{ij}(t)| \le 8a/3$ и выполнены неравенства

$$|F_{ij}(t)| \le 6al_{j-i}, \quad j - i = 1, 2, \ldots, m-1 < n-1. \tag{2.7}$$

Опять-таки, поскольку функции F_{ij} имеют вид функции F в теореме 1.1 и

$$\left|\sum_{k=i+1}^{j-1}\left(\frac{c_k}{c_i}a_{ik}E(a_{kk} - b_{kk} + b_{ii} - a_{ii}; 0, t)F_{kj} - b_{kj}F_{ik}\right) + \frac{c_j}{c_i}a_{ij}E(a_{jj} - b_{jj} + b_{ii} - a_{ii}; 0, t)\right| \le$$

$$\leq \sum_{k=i+1}^{j-1} (6a^2 \exp(8al_0)\lambda^{k-i} l_{j-k} + 16a^2 l_{k-i}) + \lambda^{j-i} a \exp(8al_0) \leq$$

$$\leq 16a^2 \exp(8al_0) \sum_{k=i+1}^{j-1} (l_{j-k} + l_{k-i}) + \lambda a \exp(8al_0) \leq 32a^2 \exp(8al_0) n l_{j-i-1} + a^2 l_0/(8N^{n-1}) =$$

$$= \frac{32 \exp(8al_0) n}{N} \frac{a^2 l_0}{N^{n-j+i}} + \frac{a^2 l_0}{8N^{n-1}} \leq \frac{a^2 l_0}{8N^{n-j+i}} + \frac{a^2 l_0}{8N^{n-j+i}} = \frac{a^2 l_0}{4N^{n-j+i}},$$

то в силу теоремы 1.1 для всех i, j $(j-i=m)$ существуют такие функции из $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R})$, что для их сужений b_{ij} на $\mathbb{R}_+$ выполнены неравенства $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |b_{ij}(t)| \leq 8a/3$ и

$$|F_{ij}(t)| \leq 6al_0/N^{n-j+i} = 6al_{j-i}, \quad j-i=m, \tag{2.8}$$

откуда в силу (2.3) и (2.5)

$$|S_{ij}(t)| \leq 6al_{j-i} c_i \exp(4al_0) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.9}$$

для всех i, j, таких, что $j-i=m$. Таким образом, индукцией по $j-i$ показано, что (2.8), а следовательно, и (2.9) выполнены для всех i, j.

Из (2.5)–(2.9) следует, что все элементы матрицы S ограничены на $\mathbb{R}_+$. Ограниченность матрицы S^{-1} на $\mathbb{R}_+$ следует теперь из отделенности от нуля в силу (2.4) определителя $\det S(t) = E(\sum_{i=1}^n (a_{ii} - b_{ii}); 0, t) \det C \geq \exp(-4al_0 n) \det C \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}_+$. Ограниченность же производной $\dot{S}(t)$ следует из очевидного тождества $\dot{S}(t) = A(t)S(t) - S(t)B(t)$.

Таким образом, матрица S является матрицей Ляпунова и, следовательно, система (2.1) асимптотически эквивалентна системе (2.2) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Для любой линейной системы (2.1) с локально интегрируемыми ограниченными на* $\mathbb{R}_+$ *коэффициентами существует асимптотически эквивалентная ей система (2.2) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными вместе со своими производными коэффициентами из множества* $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство теоремы следует из теоремы Перрона о триангуляции (см., например, [8, с. 263] и теоремы 2.1.

Заметим, что основное отличие полученного результата от теоремы 29.2.1 [8, с. 400] состоит в принадлежности коэффициентов системы (2.2) множеству $\mathbf{Q}^\infty(\mathbb{R}_+)$, т.е. в ограниченности не только самих коэффициентов, но и всех их производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовская Т.Г., Храмцов О.В.* // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 2. С. 31–34.
2. *Красовская Т.Г.* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2003. № 1. С. 45–49.
3. *Красовская Т.Г.* // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3. С. 88–90.
4. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М., 1967.
5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб., 1997.
6. *Богданов Ю.С.* // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 6. С. 707–716.
7. *Мазаник С.А.* // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 5. С. 923–926.
8. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова. М., 1966.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
16.05.2004 г.