A. I. Perov, Yu. V. Trubnikov, Monotone differential equations. III,
Differ. Uravn., 1978, Volume 14, Number 2, 232–244

https://www.mathnet.ru/eng/de3300

ФЕВРАЛЬ 1978 г., ТОМ XIV, № 2

УДК 517.937

А. И. ПЕРОВ, Ю. В. ТРУБНИКОВ

МОНОТОННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. III

В статье доказано существование единственного ограниченного решения индефинитно монотонного уравнения в гильбертовом пространстве. Показано, что это ограниченное решение становится периодическим (почти периодическим), если дифференциальное уравнение является периодическим (почти периодическим). Изучена асимптотика ограниченных решений индефинитно монотонных уравнений с параметром. Приводятся различные оценки.

1. Напомним основные обозначения: R — вещественная прямая, H — гильбертово пространство (вещественное или комплексное) со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)$ и нормой $|\cdot|$, (H) — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих из H в H, $V\in(H)$ — самосопряженный обратимый положительно определенный оператор, $U\in(H)$ — самосопряженный обратимый индефинитный оператор. Напомним, что самосопряженный оператор называется индефинитным, если отвечающая ему квадратичная форма принимает значения разных знаков ([2]). Норма ограниченной функции $\varphi : T\to R$, $T\to H$, где T — некоторое множество, определяется равенством $|\varphi| = \sup |\varphi(t)|$ $(t\in T)$. Непрерывность, производная и интеграл понимаются в сильной топологии. Для оператора $A\in(H)$ самосопряженный оператор $\operatorname{Re} A$ определяется формулой $\operatorname{Re} A=(A+A^*)/2$. Определим функцию $f_0 : R\to H$ равенством $f_0(t)=f(t,\ 0)$ при $t\in R$.

Рассмотрим в H нелинейное дифференциальное уравнение

$$\dot{z}=f(t,\ z) \tag{1}$$

с непрерывной векторной функцией $f : R\times H\to H$, удовлетворяющей при некоторых $U\in(H)$, $V\in(H)$ условиям

$$\operatorname{Re}\,(U(z-\zeta),\ f(t,\ z)-f(t,\ \zeta))\leqslant-\varkappa|z-\zeta|^2 \quad (t\in R,\ z,\ \zeta\in H); \tag{2}$$

$$|\operatorname{Re}\,(V(z-\zeta),\ f(t,\ z)-f(t,\ \zeta))|\leqslant\lambda|z-\zeta|^2 \quad (t\in R,\ z,\ \zeta\in H), \tag{3}$$

где λ, $\varkappa$ — фиксированные положительные постоянные.

Для доказательства основных теорем нам потребуется изучить поведение вещественных дифференцируемых функций $u,\ v,\ w : R\to R$, удовлетворяющих системе неравенств:

$$|u(t)|\leqslant Mw(t), \tag{4}$$

$$0\leqslant nw(t)\leqslant v(t)\leqslant Nw(t), \tag{5}$$

$$\dot{u}(t)\leqslant-2\varkappa w(t), \tag{6}$$

$$|\dot{v}(t)|\leqslant2\lambda w(t), \tag{7}$$

где n, N, M, $\varkappa$, λ — положительные постоянные.

Решением такой системы неравенств называются дифференцируемые функции u, v, $w : R \to R$, удовлетворяющие ей в каждой точке $t \in R$.

В леммах 1—5 предполагается, что функции u, v, $w : R \to R$ являются решением системы неравенств (4)—(7).

Лемма 1. *Если в некоторой точке $\tau \in R$ функция v обращается в нуль, то*

$$u(t) = v(t) = w(t) = 0 \quad (t \in R). \tag{8}$$

Если функция v положительна и ограничена вправо, то функция u положительна при всех $t \in R$; если функция v положительна и ограничена влево, то функция u отрицательна при всех $t \in R$.

Доказательство. Из неравенства (7) вытекает, что

$$-2(\lambda/n)v(t) \leqslant \dot{v}(t) \leqslant 2(\lambda/n)v(t).$$

Интегрируя последние дифференциальные неравенства, получаем

$$e^{-2(\lambda/n)|t-\tau|}v(\tau) \leqslant v(t) \leqslant e^{2(\lambda/n)|t-\tau|}v(\tau),$$

т. е. если $v(\tau) = 0$, то и $v(t) = 0$ при $t \in R$, но тогда $u(t) = v(t) = w(t) = 0$ при $t \in R$. Если функция v положительна и ограничена вправо, то в силу неравенств (4), (5) функция u также ограничена вправо; кроме того, если бы в некоторой точке $\tau \in R$ функция u принимала отрицательное значение, она в силу неравенства (6) была бы неограниченной вправо. Таким образом, функция u неотрицательна, но если $u(\tau) = 0$ при некотором $\tau \in R$, то так как $\dot{u}(\tau) < 0$ (это следует из неравенства (6)), то найдется точка τ_* такая, что $u(\tau_*) < 0$, следовательно, функция u положительна. Аналогично доказывается последнее утверждение леммы.

Лемма 2. *Если функция u положительна при всех $t \in R$, то функция v ограничена вправо, стремится к нулю при $t \to \infty$, и имеют место оценки*

$$v(t) \leqslant (\lambda/\varkappa)u(t), \quad t \in R, \tag{9}$$

$$w(t) \leqslant \delta e^{-2\nu(t-s)}w(s), \quad s \leqslant t, \quad \delta = \lambda M/\varkappa n, \quad \nu = \varkappa/M. \tag{10}$$

Если же функция u отрицательна при всех $t \in R$, то функция v ограничена влево, стремится к нулю при $t \to -\infty$, и имеют место оценки

$$v(t) \leqslant -(\lambda/\varkappa)u(t), \quad t \in R, \tag{11}$$

$$w(t) \leqslant \delta e^{2\nu(t-s)}w(s), \quad t \leqslant s, \quad \delta = \lambda M/\varkappa n, \quad \nu = \varkappa/M. \tag{12}$$

Доказательство. Если функция u положительна, то из неравенств (4) и (6) вытекает оценка

$$u(t) \leqslant e^{-2\nu(t-\tau)}u(\tau), \quad \tau \leqslant t, \quad \tau \in R. \tag{13}$$

Из неравенств (6) и (7), умножая первое из них на λ, а второе — на $\varkappa$ и затем складывая, получаем

$$\lambda\dot{u}(t) + \varkappa|\dot{v}(t)| \leqslant 0. \tag{14}$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от τ до t $(\tau \leqslant t)$, а также учитывая положительность функции u, приходим к оценке

$$v(t) \leqslant (\lambda/\varkappa)u(\tau) + v(\tau), \quad \tau \leqslant t,$$

из которой вытекает, что функция v ограничена вправо.

Предположим теперь, что при некотором $\tau \in R$ неравенство (9) места не имеет, тогда $\lambda u(\tau) - \varkappa v(\tau) = -\varepsilon$, но это значит (интегрируя в пределах от τ до t $(\tau \leqslant t)$ неравенство $\lambda\dot{u}(t) - \varkappa\dot{v}(t) \leqslant 0$, немедленно вытекающее из (14)), что при всех $t \geqslant \tau$ выполняется неравенство $-\varkappa v(t) \leqslant \leqslant \lambda u(t) - \varkappa v(t) \leqslant \lambda u(\tau) - \varkappa v(\tau) = -\varepsilon < 0$. Последнее означает, что $v(t) \geqslant \varepsilon/\varkappa$ при $t \geqslant \tau$ и тогда $\dot{u}(t) \leqslant -2\varkappa w(t) \leqslant -2(\varkappa/N)v(t) = -2\varepsilon/N$, что противоречит положительности функции u. Неравенство (9) доказано.

Далее при $t \geqslant s$, учитывая (4), (5), (9) и (13), получаем

$$nw(t) \leqslant v(t) \leqslant (\lambda/\varkappa)u(t) \leqslant (\lambda/\varkappa)e^{-2\nu(t-s)}u(s) \leqslant (\lambda M/\varkappa)e^{-2\nu(t-s)}w(s),$$

откуда и вытекает оценка (10). Аналогично устанавливается справедливость оценок (11) и (12).

Лемма 3. *Если функция u меняет знак, то функции v, w экспоненциально стремятся к бесконечности при $|t| \to \infty$, причем имеют место оценки*

$$w(t) \geqslant (n/\delta N)\left(1 - e^{-2(\lambda/n)|t-\tau|}\right)w(\tau), \tag{15}$$

если $|t-\tau| \leqslant (n/2\lambda)\ln(1+\delta)$,

$$w(t) \geqslant (n/\delta N)e^{2\nu|t-\tau|}(1+\delta)^{-1/\delta}[1-(1+\delta)^{-1}]w(\tau), \tag{16}$$

если $|t-\tau| > (n/2\lambda)\ln(1+\delta)$,

$$\varliminf_{|t|\to\infty} \frac{\ln w(t)}{|t|} \geqslant 2\nu, \quad \nu = \varkappa/M, \quad \delta = \lambda M/\varkappa n, \tag{17}$$

где точка τ такова, что $u(\tau) = 0$.

Доказательство. Если функция u меняет знак, то существует точка τ, в которой $u(\tau) = 0$, причем так как $\dot{u}(\tau) < 0$, то $u(t) < 0$ при $t > \tau$ и $u(t) > 0$ при $t < \tau$. Пусть $t > \tau$, тогда из неравенств (5) и (7) вытекает, что

$$Nw(t) \geqslant v(t) \geqslant v(\tau)e^{-2(\lambda/n)(t-\tau)} \geqslant nw(\tau)e^{-2(\lambda/n)(t-\tau)}.$$

Далее, учитывая неравенство (6), получаем

$$|u(t)| \geqslant 2\varkappa\int_\tau^t w(s)\,ds \geqslant 2(\varkappa n/N)\int_\tau^t w(\tau)e^{-2(\lambda/n)(s-\tau)}ds =$$
$$= (\varkappa n^2/\lambda N)\left(1 - e^{-2(\lambda/n)(t-\tau)}\right)w(\tau)$$

и, таким образом, при $s \in (\tau, t]$ имеем

$$w(t) \geqslant |u(t)|/M \geqslant e^{2\nu(t-s)}|u(s)|/M \geqslant \mu(s)(n/\delta N)w(\tau), \tag{18}$$

где функция $\mu : (\tau, t] \to R$ определяется равенством

$$\mu(s) = e^{2\nu(t-s)}\left(1 - e^{-2(\lambda/n)(s-\tau)}\right).$$

Тогда если $t-\tau \leqslant (n/2\lambda)\ln(1+\delta)$, то функция μ принимает максимальное значение в точке $s = t$ и тогда справедлива оценка (15). Если же $t-\tau > (n/2\lambda)\ln(1+\delta)$, то функция μ принимает максимальное значение при $s = \tau + (n/2\lambda)\ln(1+\delta)$ и тогда справедлива оценка (16). При $t < \tau$ рассуждения проводятся аналогично.

Пусть, далее, $a = \inf\limits_s w(s)$ $(s \in R)$ и $\tau < t$, тогда

$$-u(t) \geqslant |u(t)| \geqslant 2\varkappa\int_\tau^t w(s)\,ds \geqslant 2\varkappa a(t-\tau)$$

и, следовательно, при $s \in (\tau, t]$ имеем

$$w(t) \geqslant |u(t)|/M \geqslant e^{2\nu(t-s)}|u(s)|/M \geqslant (2\varkappa a/M)\gamma(s), \tag{19}$$

где $\gamma(s)=e^{2\nu(t-s)}(s-\tau)$. Функция $\gamma:(\tau,t]\to R$ принимает максимальное значение при $s=t$, если $t-\tau<1/2\nu$, и при $s=\tau+(1/2\nu)$, если $t-\tau\geqslant 1/2\nu$. Подставляя максимальное значение γ в неравенство (19) и проведя аналогичные рассуждения для значений $t<\tau$, получаем неравенства

$$w(t)\geqslant(2a\varkappa/M)\,|t-\tau|,\quad |t-\tau|<M/2\varkappa, \tag{20}$$

$$w(t)\geqslant(a/e)\,e^{2\nu|t-\tau|},\quad |t-\tau|\geqslant M/2\varkappa,\quad u(\tau)=0. \tag{21}$$

Лемма 4. *Для любых $\alpha,\beta\in R$ $(\alpha<\beta)$ имеет место оценка*

$$\max_{\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta} w(\tau)\leqslant(\lambda N/\varkappa n^2)\,[u(\alpha)-u(\beta)]/\mu(\beta-\alpha), \tag{22}$$

где $\mu(s)=1-e^{-2(\lambda/n)s}$.

Доказательство. Интегрируя по t неравенство (6) в пределах от α до β с учетом неравенств (5) и (7), получаем при $\tau\in[\alpha,\beta]$

$$[u(\beta)-u(\alpha)]/2\leqslant-(\varkappa/N)\int_\alpha^\beta v(s)\,ds\leqslant-(\varkappa/N)\left[\int_\alpha^\tau e^{-2(\lambda/n)(\tau-s)}v(\tau)\,ds+\right.$$

$$\left.+\int_\tau^\beta e^{-2(\lambda/n)(s-\tau)}v(\tau)\,ds\right]=(n\varkappa/2\lambda N)\,[e^{2(\lambda/n)(\alpha-\tau)}+e^{-2(\lambda/n)(\beta-\tau)}-2]\,v(\tau). \tag{23}$$

Из неравенства (23), а также в силу того, что

$$\min_{\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta}[2-e^{2(\lambda/n)(\alpha-\tau)}-e^{-2(\lambda/n)(\beta-\tau)}]=\mu(\beta-\alpha),$$

вытекает неравенство (22). Лемма доказана.

Обозначим далее

$$1-e^{-2(\lambda/n)s}=\mu(s),\quad \max_{\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta}|u(\tau)|=a,\quad \nu=\varkappa/M.$$

Лемма 5. *Для любых $\alpha_1,\beta_1:\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta$ имеет место оценка*

$$\max_{\alpha_1\leqslant\tau\leqslant\beta_1} w(\tau)\leqslant 2(\lambda N/\varkappa n^2)\,a\max\{e^{-2\nu(\beta-\beta_1)},\ e^{-2\nu(\alpha_1-\alpha)}\}/\mu(\beta_1-\alpha_1). \tag{24}$$

Доказательство. Пусть в некоторой точке $t\in[\alpha,\beta]$ функция u положительна, тогда из неравенств (4) и (6) вытекает, что

$$u(s)\geqslant u(t)\,e^{-2\nu(s-t)},\quad \alpha\leqslant s\leqslant t, \tag{25}$$

$$u(s)\leqslant u(t)\,e^{2\nu(s-t)},\quad t\leqslant s\leqslant\beta, \tag{26}$$

т. е. неравенство (25) влечет при $s=\alpha$

$$u(t)\leqslant ae^{-2\nu(t-\alpha)}, \tag{27}$$

причем неравенство (27) выполняется автоматически для тех значений $t\in[\alpha,\beta]$, в которых функция u принимает неположительные значения. Аналогично из неравенства (26) получаем

$$u(t)\geqslant-ae^{-2\nu(\beta-t)}. \tag{28}$$

Из неравенств (22), (27) и (28) немедленно вытекает оценка (24).

Далее нам потребуется изучить следующую систему неравенств:

$$|u(t)|\leqslant Mw(t), \tag{29}$$

$$0\leqslant nw(t)\leqslant v(t)\leqslant Nw(t), \tag{30}$$

$$\dot{u}(t) \leqslant -2\varkappa w(t) + 2cM\sqrt{w(t)}, \tag{31}$$

$$|\dot{v}(t)| \leqslant 2\lambda w(t) + 2cN\sqrt{w(t)}, \tag{32}$$

где $c, \lambda, n, N, \varkappa, M$ — положительные постоянные.

Решением такой системы неравенств называются дифференцируемые функции $u, v, w : [\alpha, \beta] \to R\,(R \to R)$, удовлетворяющие ей в каждой точке $t \in [\alpha, \beta]$ $(t \in R)$.

Зафиксируем теперь произвольное положительное δ.

Лемма 6. *Существует положительная постоянная $K = K(n, N, c, \lambda, \varkappa, M)$ такая, что если дифференцируемые функции $u, v, w : [\alpha, \beta] \to R\,(\beta - \alpha \geqslant 2\delta)$ удовлетворяют системе неравенств (29)—(32), причем*

$$u(\alpha) \leqslant 0, \quad u(\beta) \geqslant 0, \tag{33}$$

то справедлива оценка

$$\max_{\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta} w(\tau) \leqslant K, \tag{34}$$

где постоянная K не зависит от длины и расположения отрезка $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Из неравенств (30) и (32) следует, что

$$-\frac{2cN\sqrt{v(t)}}{\sqrt{n}} - \frac{2\lambda v(t)}{n} \leqslant \dot{v}(t) \leqslant \frac{2\lambda v(t)}{n} + \frac{2cN\sqrt{v(t)}}{\sqrt{n}},$$

откуда в свою очередь получаем оценку

$$v(t) \geqslant \{[\sqrt{v(\tau)} + h]e^{-(\lambda/n)|t-\tau|} - h\}^2 \overset{\mathrm{def}}{=} \sigma(|t-\tau|), \tag{35}$$

справедливую на отрезке $t \in [\tau - d_*, \tau + d_*] \cap [\alpha, \beta]$, где d_* — наименьший положительный корень уравнения $\sigma(d) = 0$, $h = cN\sqrt{n/\lambda}$.

Предположим, что в некоторой точке $\tau \in [\alpha, \beta]$ имеет место неравенство

$$\sqrt{v(\tau)} > (\sqrt{bN} + h)e^{\delta\lambda/n} - h, \tag{36}$$

где $b = c^2M^2[1 + (1 + (cM/\varkappa\delta))^{1/2}]^2/4\varkappa^2$. Неравенство (36) означает, что

$$d_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{n}{\lambda} \ln \frac{\sqrt{v(\tau)} + h}{\sqrt{bN} + h} > \delta. \tag{37}$$

Так как d_0 — это наименьший положительный корень уравнения $\sigma(d) = bN$, то на отрезке $[\alpha_1, \beta_1] = [\tau - d_0, \tau + d_0] \cap [\alpha, \beta]$ $(\beta_1 - \alpha_1 \geqslant \delta)$ выполняется неравенство

$$w(t) \geqslant \sigma(|t - \tau|)/N \geqslant \sigma(d_0)/N = b, \quad t \in [\alpha_1, \beta_1]. \tag{38}$$

Из неравенства (38) вытекает, что при $t \in [\alpha_1, \beta_1]$

$$-2\varkappa w(t) + 2cM\sqrt{w(t)} \leqslant -3\frac{M}{\delta}\left(\frac{cM}{\varkappa}\right)^2. \tag{39}$$

Проинтегрируем теперь с учетом неравенства (39) неравенство (31) по t в пределах от α_1 до β_1

$$u(\beta_1) - u(\alpha_1) \leqslant \int_{\alpha_1}^{\beta_1} [-2\varkappa w(t) + 2cM\sqrt{w(t)}]\,dt \leqslant$$

$$\leqslant -3\frac{M}{\delta}\left(\frac{cM}{\varkappa}\right)^2 (\beta_1 - \alpha_1) \leqslant -3M(cM/\varkappa)^2. \tag{40}$$

С другой стороны, неравенство (31) и условие (33) обеспечивают справедливость оценки

$$-M(cM/\varkappa)^2 \leqslant u(t) \leqslant M(cM/\varkappa)^2, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{41}$$

Действительно, предположив, что $u(s) < -M(cM/\varkappa)^2$, из неравенства (31) получаем, что

$$u(t) \leqslant -\{e^{(\varkappa/M)(t-s)}[\sqrt{|u(s)|} - (cM^{3/2}/\varkappa)] + (cM^{3/2}/\varkappa)\}^2, \quad t \geqslant s. \tag{42}$$

Последнее означает, что неравенство $u(\beta) \geqslant 0$ не может иметь места. Аналогично доказывается правая часть неравенства (41).

Таким образом, неравенство (41) означает, что

$$-2M(cM/\varkappa)^2 \leqslant u(\beta_1) - u(\alpha_1).$$

Это противоречит неравенству (40), и, следовательно, неравенство (36) неверно, значит,

$$v(\tau) \leqslant [(\sqrt{bN} + h)e^{\delta\lambda/n} - h]^2. \tag{43}$$

Правая часть оценки (43) может быть взята в качестве постоянной K. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть функции u, v, $w : R \to R$ являются решением системы (29)—(32) и ограничены. Тогда справедлива оценка*

$$|w|^{1/2} \leqslant c\sqrt{\frac{N}{n}}\left(at_* + \frac{M}{\varkappa}\right) \leqslant c\sqrt{\frac{N}{n}}\left[h + \frac{M}{\varkappa} + (h^2 + ab)^{1/2}\right], \tag{44}$$

где

$$a = \frac{M}{\varkappa} + \frac{\sqrt{Nn}}{\lambda}, \quad b = \frac{\lambda}{an}\left(\frac{M}{\varkappa}\right)^3, \quad h = \sqrt{Nn}/\lambda, \tag{45}$$

t_* — единственный положительный корень уравнения

$$at^2 - 2ht + 2h\ln(t+1) = b. \tag{46}$$

Доказательство. Возможны два случая: либо при всех $t \in R$ выполняется неравенство $v(t) \leqslant N(cM/\varkappa)^2$, либо найдется такое значение τ, что $v(\tau) > N(cM/\varkappa)^2$. Предполагая, что имеет место второй случай, обозначим через d наименьший положительный корень уравнения $\sigma(s) = N(cM/\varkappa)^2$ (σ — то же, что и в лемме 6), тогда для значений $t \in [\tau - d, \tau + d]$ неравенство (31) примет следующий вид:

$$\dot u(t) \leqslant -2(\varkappa/N)\sigma(|t-\tau|) + 2(cM/\sqrt{N})\sqrt{\sigma(|t-\tau|)}.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по t в пределах от $\tau - d$ до $\tau + d$ и учитывая, что в силу ограниченности функции u справедливо неравенство $-2M(cM/\varkappa)^2 \leqslant u(\tau + d) - u(\tau - d)$, получаем

$$as^2 - 2hs + 2h\ln(s+1) \leqslant b, \tag{47}$$

где

$$s = \frac{\sqrt{v(\tau)} + cN\sqrt{n}\lambda^{-1}}{ca\sqrt{N}} - 1.$$

Уравнение $as^2 - 2hs + 2h\ln(s+1) = b$ имеет единственный положительный корень t_*, а неравенство (47) означает, что $s \leqslant t_*$. Подставляя вместо s его выражение через $v(\tau)$, получаем оценку (44). Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть функции u, v, w являются решением системы не-*

равенств (29)—(32) на полуоси $t \geqslant \tau$ ($t \leqslant \tau$), ограничены вправо (влево), причем

$$u(\tau) \leqslant M(cM/\varkappa)^2, \tag{48}$$

если функции u, v, w ограничены вправо, и

$$u(\tau) \geqslant -M(cM/\varkappa)^2, \tag{49}$$

если функции u, v, w ограничены влево. Тогда справедлива следующая оценка:

$$|w|^{1/2} \leqslant c\sqrt{\frac{N}{n}}\left(at_* + \frac{M}{\varkappa}\right) \leqslant c\sqrt{\frac{N}{n}}\left[h + \frac{M}{\varkappa} + (h^2+2ab)^{1/2}\right], \tag{50}$$

где постоянные a, b и h даются равенствами (45), t_* — единственный положительный корень уравнения

$$at^2 - 2ht + 2h\ln(t+1) = 2b. \tag{51}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.

Ниже нам потребуется известная лемма (см. [6]) о разрешимости уравнения $F(z)=k$ в конечномерном банаховом пространстве E с оператором $F: E \to E$, удовлетворяющем условию

$$\|F(z)-F(\zeta)\| \geqslant \varepsilon\|z-\zeta\|, \quad \varepsilon>0, \quad z, \zeta \in E. \tag{52}$$

Лемма 9. *Пусть непрерывный оператор $F: E \to E$, где E — конечномерное банахово пространство, при всех $z, \zeta \in E$ удовлетворяет неравенству (52) с положительной постоянной ε. Тогда уравнение*

$$F(z) = k \tag{53}$$

имеет при любом $k \in E$ единственное решение.

2. Итак, нашей ближайшей целью будет доказательство теоремы о существовании единственного ограниченного решения $\varphi_0: R \to H$ уравнения (1). Введем в пространстве H новые скалярные произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $[\cdot,\cdot]$ и новую норму $\|\cdot\|$ следующим образом:

$$\langle z, \zeta\rangle = (Uz, \zeta), \quad [z, \zeta] = (Vz, \zeta), \quad \|z\|^2 = [z, z]. \tag{54}$$

Пусть H_+ и H_- — инвариантные подпространства оператора U, отвечающие положительным и отрицательным частям его спектра, P_+ и P_- — соответствующие ортопроекторы. В силу свойств операторов U и V существуют такие положительные числа m_+, m_-, M_+, M_-, n, N, что справедливы неравенства

$$m_+|x|^2 \leqslant \langle x, x\rangle \leqslant M_+|x|^2, \quad x \in H_+, \tag{55}$$

$$-M_-|y|^2 \leqslant \langle y, y\rangle \leqslant -m_-|y|^2, \quad y \in H_-, \tag{56}$$

$$n|z|^2 \leqslant \|z\|^2 \leqslant N|z|^2, \tag{57}$$

причем $|U| = \max(M_+, M_-) = M$, $m = \min(m_+, m_-)$,

$$(m/M)^{1/2}|U| \leqslant \|U\| \leqslant (M/m)^{1/2}|U|, \tag{58}$$

$$m|z|^2 \leqslant m_+|x|^2 + m_-|y|^2 \leqslant \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle \leqslant M_+|x|^2 + M_-|y|^2 \leqslant M|z|^2. \tag{59}$$

Теорема 1. *Пусть непрерывная функция $f: R \times H \to H$ удовлетворяет неравенствам (2) и (3), $|f_0| < \infty$ и, кроме того, хотя бы одно из подпространств H_+ или H_- конечномерно. Тогда уравнение (1) имеет* *единственное ограниченное решение* $\varphi_0 : R \to H$. *Это решение удовлетворяет оценке*

$$|\varphi_0| \leqslant |f_0| \sqrt{\frac{N}{n}} \left(at_* + \frac{M}{\varkappa} \right) \leqslant |f_0| \sqrt{\frac{N}{n}} \left[h + \frac{M}{\varkappa} + (h^2+ab)^{1/2} \right], \tag{60}$$

где a, b и h даются формулами (45), а t_* — единственный положительный корень уравнения (46).

Доказательство. В силу непрерывности функции f, условия (3) и теоремы 1 из [7] существует при всех $t \in R$ единственное решение уравнения (1) $\varphi(t, \tau, \xi, \eta)$ такое, что $\varphi(\tau) = \xi + \eta$, $\xi \in H_+$, $\eta \in H_-$. Для определенности будем считать, что конечномерным является подпространство H_+.

Покажем, что отображение $F_{t\tau} : H_+ \to H_+$, определяемое как $F_{t\tau}(\xi) = P_+\varphi(t, \tau, \xi, 0)$ при всех $t, \tau \in R$ $(t \leqslant \tau)$, отображает H_+ на себя гомеоморфно. Положим $\varphi_1(t) = \varphi(t, \tau, \xi_1, 0)$, $\varphi_2(t) = \varphi(t, \tau, \xi_2, 0)$, $u(t) = \langle \varphi_1(t) - \varphi_2(t), \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \rangle$. Так как функция u удовлетворяет неравенству $\dot{u} \leqslant -2(\varkappa/M)u(t)$, то справедлива оценка

$$|F_{t\tau}(\xi_1) - F_{t\tau}(\xi_2)| \geqslant (m_+/M_+)^{1/2} e^{(\varkappa/M)(t-\tau)} |\xi_1 - \xi_2|, \quad t \leqslant \tau. \tag{61}$$

В силу леммы 9 все операторы $F_{t\tau}$ осуществляют гомеоморфное отображение H_+ на себя. Таким образом, уравнение $F_{t\tau}(\xi) = 0$ при любом $t \leqslant \tau$ имеет единственное решение $\xi(t, \tau)$. Пусть $\alpha = t < \tau = \beta$, тогда функции $u(t) = \langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle$, $v(t) = [\varphi(t), \varphi(t)]$, $w(t) = |\varphi(t)|^2$, где $\varphi(s) = \varphi(s, \beta, \xi(\alpha, \beta), 0)$ $(\alpha \leqslant s \leqslant \beta)$ удовлетворяют всем условиям леммы 6, и, следовательно, все функции φ ограничены одной и той же постоянной при любых α и β $(\beta - \alpha \geqslant 2\delta > 0)$.

Таким образом, для любых α и β существует решение $\varphi_{\alpha\beta}$ уравнения (1), ограниченное на $[\alpha, \beta]$ фиксированной постоянной. Для натурального j положим $z_j(t) = \varphi_{-jj}$, тогда при любом натуральном p последовательность функций $\{z_j\}$ $(j \geqslant p)$ равномерно сходится на отрезке $[-p, p]$. Действительно, пусть $p < i < j$, тогда функции

$$u_{ij}(t) = \langle z_i(t) - z_j(t), z_i(t) - z_j(t) \rangle,$$
$$v_{ij}(t) = [z_i(t) - z_j(t), z_i(t) - z_j(t)],$$
$$w_{ij}(t) = |z_i(t) - z_j(t)|^2$$

удовлетворяют всем условиям леммы 5, следовательно, имеет место неравенство

$$\max_{-p \leqslant \tau \leqslant p} w_{ij}(\tau) \leqslant 2(\lambda N/\varkappa n^2) \alpha e^{-2\nu(i-p)}/\mu(2p),$$

где $\alpha = \max |u_{ij}(\tau)|$ $(-i \leqslant \tau \leqslant i)$, причем в силу леммы 6 и неравенства (29) α не зависит от длины промежутка $[-i, i]$, а функция μ определяется так же, как и в формуле (22). Из последнего неравенства вытекает, что последовательность $\{z_j\}$ равномерно сходится на отрезке $[-p, p]$.

Пусть $\varphi_0(t) = \lim z_j(t)$ при $j \to \infty$. Нетрудно видеть, что $\varphi_0 : R \to H$ — ограниченное решение уравнения (1). Функции $u_0(t) = \langle \varphi_0(t), \varphi_0(t) \rangle$, $v_0(t) = [\varphi_0(t), \varphi_0(t)]$, $w_0(t) = |\varphi_0(t)|^2$ удовлетворяют всем условиям леммы 7, поэтому справедлива оценка (60). Единственность ограниченного решения вытекает из условия (2) и леммы 1. Теорема доказана.

3. Говорят, что функция $f : R \times H \to H$ равномерно почти периодична на шаре $S \subset H$, если из любой последовательности сдвигов $f(t + h_n, z)$

можно выделить равномерно сходящуюся на $R\times S$ подпоследовательность $f(t+k_n, z)$.

Обозначим через S шар

$$|z|\leqslant|f_0|(N/n)^{1/2}[at_*+(M/\varkappa)], \tag{62}$$

где a и t_* такие же, как и в неравенстве (60).

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, функция f равномерно почти периодична на шаре S. Тогда дифференциальное уравнение (1) имеет единственное почти периодическое решение $\varphi_0: R\to S$, причем*

$$\operatorname{mod}\varphi_0\subseteq\operatorname{mod}(f/K)\quad(K=\overline{\varphi_0(R)}). \tag{63}$$

Других ограниченных решений уравнение (1) не имеет.

Здесь $\operatorname{mod}\varphi_0$ *есть модуль почти периодической функции* φ_0 (*см.* [4], *стр.* 126), *а* $\operatorname{mod}(f/K)$ *есть модуль почти периодической функции* $f/K: R\to\mathfrak{S}(K)$, *определяемой равенством* $f/K(t)=f(t, z)$ *при* $t\in R$, $z\in K$ ($\mathfrak{S}(K)$ *есть банахово пространство всех непрерывных отображений* K *в* K).

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность сдвигов $\varphi_n(t)=\varphi_0(t+h_n)$. Нетрудно видеть, что функции $\varphi_n: R\to S$ являются ограниченными решениями уравнений $\dot z=f_n(t, z)$, где $f_n(t, z)=f(t+h_n, z)$. В силу равномерной почти периодичности функции f из последовательности сдвигов $f_n(t, z)$ извлечем равномерно сходящуюся на $R\times S$ подпоследовательность $f(t+k_n, z)$ (можно считать, что $\{h_n\}$ этому условию удовлетворяет). Тогда функции $u_{mn}(t)=\langle\varphi_n(t)-\varphi_m(t), \varphi_n(t)-\varphi_m(t)\rangle$, $v_{mn}(t)=[\varphi_n(t)-\varphi_m(t), \varphi_n(t)-\varphi_m(t)]$, $w_{mn}(t)=|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|^2$ удовлетворяют системе неравенств (29)—(32), причем $c_{mn}=\sup|f_n(t, z)-f_m(t, z)|$ $(t\in R,\ z\in K)$. В силу оценки (44) получаем

$$|w_{mn}|^{1/2}\leqslant c_{mn}(N/n)^{1/2}[h+(M/\varkappa)+(h^2+ab)^{1/2}], \tag{64}$$

где a, b, h даны формулами (45).

Из неравенства (64) и того, что $c_{mn}\to0$ при $m, n\to\infty$, вытекает равномерная на оси сходимость последовательности φ_n и тем самым в силу критерия Бохнера (см. [1], стр. 307) — почти периодичность функции φ_0. Включение (63) вытекает из того, что сходимость последовательности $f/K(t+h_n)$ влечет сходимость последовательности $\varphi_0(t+h_n)$. Здесь также можно воспользоваться оценкой (64).

4. Изучим асимптотику при $\mu\to0$ ограниченного решения φ_μ дифференциального уравнения

$$\dot z=\mu f(t, \mu),\quad \mu>0. \tag{65}$$

Предположим, что при любом $z\in H$ существует равномерное среднее

$$g(z)=\lim_{0<t-\tau\to\infty}\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t f(s, z)\,ds. \tag{66}$$

Построенная векторная функция $g: H\to H$ в силу (2) удовлетворяет условию индефинитной $(U, \varkappa)$-монотонности

$$\operatorname{Re}\langle z-\zeta,\ g(z)-g(\zeta)\rangle\leqslant-\varkappa|z-\zeta|^2. \tag{67}$$

Потребуем еще, чтобы функция g была непрерывной (этого можно добиться, предположив, например, f непрерывной по z равномерно относительно t). Тогда по теореме 6 из [8] уравнение $g(z)=0$ имеет единственное решение z_0. Положим $\varphi_0(t)=z_0$ при всех $t\in R$. Пусть S — шар, определенный неравенством $|z|\leqslant(M/\varkappa)|f_0|$.

Теорема 3. *Пусть векторная функция $f: R\times H\to H$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и при каждом $z\in H$ существует равномерное среднее (66), кроме того, f ограничена на $R\times S$ и непрерывна по $z\in H$ равномерно относительно $t\in R$.*

Тогда $\varphi_\mu\to z_0$ равномерно на всей оси при $0<\mu\to 0$.

Доказательство. Положим $\psi_\mu(t)=\varphi_\mu(t/\mu)$ при $\mu>0$ и $\psi_0(t)=z_0$ при всех $t\in R$. В силу очевидного равенства $|\varphi_\mu-z_0|=|\psi_\mu-z_0|$ нам достаточно показать, что $|\psi_\mu-z_0|\to 0$ при $0<\mu\to 0$. Заметив, что функция ψ_μ (при $\mu>0$) является ограниченным решением уравнения $\dot z=f((t/\mu), z)$, введем в рассмотрение функцию

$$\chi_\mu(t)=z_0+\int_{-\infty}^{t} e^{-\varkappa(t-s)} f\left(\frac{s}{\mu},\ z_0\right) ds. \tag{68}$$

При любом $\mu>0$ эта функция непрерывна и ограничена. Более того, так как функция $f(t, z_0)$ ограничена и ее равномерное среднее равно нулю, то по лемме Боголюбова (см. [3], стр. 256) разность $\chi_\mu(t)-z_0$ стремится к нулю равномерно на всей оси при $0<\mu\to 0$.

Функции $u(t)=\langle\chi_\mu(t)-\psi_\mu(t), \chi_\mu(t)-\psi_\mu(t)\rangle$, $v(t)=\|\chi_\mu(t)-\psi_\mu(t)\|^2$, $w(t)=|\chi_\mu(t)-\psi_\mu(t)|^2$ удовлетворяют системе неравенств (29)—(32) при

$$c=c(\mu)=\varkappa\sup_{t\in R}|\chi_\mu(t)-z_0|+\sup_{t\in R}\left|f\left(\frac{t}{\mu},\ \chi_\mu(t)\right)-f\left(\frac{t}{\mu},\ z_0\right)\right|$$

и являются ограниченными на всей оси, следовательно, в силу леммы 7 справедлива оценка

$$|w|^{1/2}\leqslant c(\mu)\,(N/n)^{1/2}[h+(M/\varkappa)+(h^2+ab)^{1/2}],$$

где a, b, h определяются формулами (45). Нетрудно видеть, что $c(\mu)\to 0$ при $\mu\to 0$. Таким образом, при $\mu\to 0$

$$|\psi_\mu-z_0|\leqslant|\psi_\mu-\chi_\mu|+|\chi_\mu-z_0|\to 0.$$

5. Изучим теперь асимптотическое поведение ограниченного решения φ_μ уравнения (65) при $\mu\to\infty$ (или, что то же самое, уравнения $\varepsilon\dot z=f(t, z)$ с малым параметром при производной). Предположим, что выполнены все условия теоремы 1, тогда уравнение $f(t, z)=0$ имеет при каждом $t\in R$ единственное решение $z=\varphi(t)$.

Лемма 10. *Пусть векторная функция $f: R\times H\to H$ непрерывна, удовлетворяет условию (2) и $|f_0|<\infty$. Тогда функция $\varphi: R\times H\to H$ непрерывна. Она становится предкомпактной и равномерно непрерывной (почти периодической), если f предкомпактна и равномерно непрерывна по $t\in R$ (почти периодична по t) и непрерывна по $z\in H$ равномерно относительно $t\in R$. В почти периодическом случае справедливо включение*

$$\operatorname{mod}\varphi\subseteq\operatorname{mod}(f/K),$$

где K есть замыкание множества значений функции φ.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4 из статьи авторов [8].

Теорема 4. *Пусть векторная функция $f: R\times H\to H$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и, кроме того, предкомпактна и равномерно непрерывна по $t\in R$ (при каждом $z\in H$) и непрерывна по z равно-*

мерно относительно $t \in R$. *Тогда* $\varphi_\mu(t) \to \varphi(t)$ *при* $\mu \to \infty$ *равномерно на всей оси* R.

Доказательство. Пусть χ_h есть усреднение по Стеклову функции φ, т. е.

$$\chi_h(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varphi(s)\,ds.$$

По лемме 10 функция φ предкомпактна и потому замкнутая выпуклая оболочка K множества ее значений является компактным выпуклым множеством, кроме того, $\chi_h(t) \in K$ при любых $t \in R$ и $h > 0$. Так как на $R \times K$ функция f ограничена, то ограничена по t невязка $\chi_h(t) - \mu f(t, \chi_h(t))$ при любых фиксированных h и μ.

Функции $u(t) = \langle \varphi_\mu(t) - \chi_h(t),\ \varphi_\mu(t) - \chi_h(t) \rangle$, $v(t) = \|\varphi_\mu(t) - \chi_h(t)\|^2$, $w(t) = |\varphi_\mu(t) - \chi_h(t)|^2$ удовлетворяют системе неравенств

$$\dot u(t) \leqslant -2\varkappa\mu w(t) + 2M\sqrt{w(t)}\,\mu c(\mu),$$
$$|\dot v(t)| \leqslant 2\lambda\mu w(t) + 2N\sqrt{w(t)}\,\mu c(\mu),$$
$$|u(t)| \leqslant M w(t), \quad n w(t) \leqslant v(t) \leqslant N w(t),$$

где $c(\mu) = \sup |f(t, \chi_h(t))| + \mu^{-1} \sup |\dot\chi_h(t)|$ и являются ограниченными на всей оси, следовательно, в силу леммы 7 справедлива оценка

$$|w|^{1/2} \leqslant c(\mu)\,(N/n)^{1/2} [a t_* + (M/\varkappa)] \overset{\text{def}}{=} c(\mu) d_*, \tag{69}$$

где a, t_* определяются с помощью (45) и (46).

Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функции φ можно указать такое $h > 0$, что

$$|\chi_h(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon/3 \quad (t \in R). \tag{70}$$

Найденное h будем считать настолько малым, чтобы одновременно было выполнено неравенство

$$\sup |f(t, \chi_h(t))| \leqslant \varepsilon/3d_* \quad (t \in R). \tag{71}$$

Фиксируя указанное h, подберем теперь $\mu_\infty > 0$ таким образом, чтобы

$$\sup |\dot\chi_h(t)| \leqslant \varepsilon\mu/3d_* \quad (\mu \geqslant \mu_\infty,\ t \in R). \tag{72}$$

Тогда, согласно (69)—(72), получаем

$$|\varphi_\mu - \varphi| \leqslant |\varphi_\mu - \chi_h| + |\chi_h - \varphi| \leqslant (2\varepsilon/3) + (\varepsilon/3) = \varepsilon$$

для $t \in R$ при всех $\mu \geqslant \mu_\infty$. Теорема доказана.

6. Приведем теперь некоторое обобщение теоремы 1. Пусть U, $V : R \to (H)$ — операторные функции, принимающие значения в подпространстве самосопряженных операторов, причем при любом $t \in R$ $U(t)$ — самосопряженный обратимый индефинитный оператор, $V(t)$ — самосопряженный положительно определенный оператор. Пусть $H_+(t)$ и $H_-(t)$ — инвариантные подпространства, отвечающие положительным и отрицательным частям спектра оператора $U(t)$, а $P_+(t)$ и $P_-(t)$ — соответствующие ортопроекторы. Введем в пространстве H новые скалярные произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$, $[\cdot, \cdot]_t$ и новую норму $\|\cdot\|_t$ следующим образом:

$$\langle z, \zeta \rangle_t = (U(t) z, \zeta), \quad [z, \zeta]_t = (V(t) z, \zeta), \quad \|z\|_t = [z, z]_t^{1/2}. \tag{73}$$

Будем предполагать, что существуют положительные числа m_+, m_-, M_+, M_-, n, N такие, что справедливы неравенства

$$m_+|x|^2\leqslant\langle x, x\rangle_t\leqslant M_+|x|^2,\quad x\in H_+(t),\quad t\in R, \tag{74}$$
$$-M_-|y|^2\leqslant\langle y, y\rangle_t\leqslant -m_-|y|^2,\quad y\in H_-(t),\quad t\in R, \tag{75}$$

$$n|z|^2\leqslant\|z\|_t^2\leqslant N|z|^2,\quad z\in H,\quad t\in R. \tag{76}$$

Относительно функций U, V предположим следующее: а) операторные функции $U, V: R\to(H)$ непрерывны по t в равномерной операторной топологии; б) существуют операторные функции $\dot U, \dot V: R\to(H)$, непрерывные по t в сильной операторной топологии, такие, что

$$\dot U(t)z=\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)^{-1}[U(t+\Delta t)-U(t)]z,$$

$$\dot V(t)z=\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)^{-1}[V(t+\Delta t)-V(t)]z,\quad z\in H.$$

Рассмотрим в H нелинейное дифференциальное уравнение, в котором непрерывное отображение $f: R\times H\to H$ удовлетворяет условиям

$$2\mathrm{Re}\langle z-\zeta, f(t, z)-f(t, \zeta)\rangle_t+(\dot U(t)(z-\zeta), z-\zeta)\leqslant -2\varkappa|z-\zeta|^2, \tag{77}$$

$$|2\mathrm{Re}[z-\zeta, f(t, z)-f(t, \zeta)]_t+(\dot V(t)(z-\zeta), z-\zeta)|\leqslant 2\lambda|z-\zeta|^2, \tag{78}$$

где $\varkappa$, λ — положительные постоянные.

Теорема 5. *Пусть непрерывная векторная функция $f: R\times H\to H$ удовлетворяет условиям (77), (78) с операторными функциями U, V, для которых выполнены неравенства (74)—(76) и условия а), б), причем при некотором $\tau\in R$ одно из подпространств $H_+(t)$ или $H_-(t)$ конечномерно, кроме того, $|f_0|<\infty$. Тогда уравнение (1) имеет единственное ограниченное решение $\varphi_0: R\to H$. Это решение удовлетворяет оценке (60).*

7. Теорема 1 в случае вещественного гильбертова пространства H и липшицевости функции f была доказана А. И. Перовым в работе [5] без приведения оценки (60). Примененный там метод построения семейства обратимых операторов существенно использовал липшицевость функции f. Распространение этого метода для случая произвольного гильбертова пространства и несколько более широкого класса функций f, все же удовлетворяющих условию Липшица, было сделано в работе Ю. В. Трубникова [10]. Доказательство теоремы 1 без предположения липшицевости функции f потребовало существенного изменения рассуждений, применяемых в [5] и [10], и было приведено в случае конечномерного H в работе авторов [9] (теорема 1). В настоящей статье данная теорема обобщается в направлении отказа от конечномерности одного из подпространств H_+ или H_- и постоянства операторов U и V.

Обобщение теоремы 3 из [5] в конечномерном H было получено В. М. Чересизом при несколько иных по сравнению с теоремой 1 из [9] предположениях и приведено в работах [11] и [12].

Литература

1. Данфорд Н. и Шварц Дж. Т. Линейные операторы. М., ИЛ, 1962.
2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970.
3. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. М., «Наука». 1970.

4. Левитан Б. М. Почти периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953.
5. Перов А. И. ДАН СССР, **132**, № 3, 1960.
6. Кибенко А. В., Перов А. И. Труды семинара по функциональному анализу. Воронеж, ВГУ, вып. 7, 1963.
7. Перов А. И., Трубников Ю. В. Дифференц. уравнения, **10**, № 5, 1974.
8. Перов А. И., Трубников Ю. В. Дифференц. уравнения, **12**, № 7, 1976.
9. Перов А. И., Трубников Ю. В. Труды ин-та математики ВГУ, вып. VII. Воронеж, 1973.
10. Трубников Ю. В. Сб. трудов аспирантов матем. факультета ВГУ. Воронеж, 1972.
11. Чересиз В. М. ДАН СССР, **173**, № 2, 1967.
12. Чересиз В. М. Сибир. матем. журнал, т. XV, № 1, 1974.

Поступила в редакцию
20 января 1976 г.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола