А. А. Кириллов, Кэлерова структура на K-орбитах группы диффеоморфизмов окружности, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 2, 42–45

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 2, 42—45

УДК 514.76 + 517.98

КЭЛЕРОВА СТРУКТУРА НА K-ОРБИТАХ ГРУППЫ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ

А. А. Кириллов

1. Постановка задачи

Среди бесконечномерных симплектических многообразий, возникающих как орбиты коприсоединенного представления бесконечномерной группы Ли, одним из простейших и в то же время наиболее важным примером является многообразие (см. [2, 3])

$$M = \mathrm{Diff}_+ (S^1)/\mathrm{Rot}\,(S^1). \tag{1}$$

Здесь $\mathrm{Diff}_+ (S^1)$ означает подгруппу диффеоморфизмов единичной окружности S^1, сохраняющих ориентацию, а $\mathrm{Rot}\,(S^1)$ — подгруппу вращений окружности. Я уже неоднократно высказывал гипотезу о том, что на M существует $\mathrm{Diff}_+ (S^1)$ — инвариантная комплексная структура, которая вместе с симплектической структурой на M превращает M в однородное кэлерово многообразие. Ниже будет показано, что это действительно так.

Первоначальный вариант этой статьи содержится в [1].

Напомним, как обычно строится комплексная структура на однородном многообразии $X = G/H$, где G и H — обычные (конечномерные) группы Ли (ср. [4]). Пусть x_0 — начальная точка в X, отвечающая смежному классу H, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп G и H соответственно, $\mathfrak{g}^c$ и $\mathfrak{h}^c$ — их комплексификации. Пространство $\mathfrak{g}^c/\mathfrak{h}^c$ естественно отождествляется с комплексификацией $T^c_{x_0}X$ касательного пространства к X в x_0. На этом пространстве действует группа H.

Предположим, что существует H-инвариантное разложение

$$T^c_{x_0}X = V_+ \oplus V_- \tag{2}$$

в сумму двух комплексных подпространств, комплексно сопряженных друг другу. Тогда на X есть почти комплексная структура, инвариантная относительно G. Чтобы эта структура была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы прообразы $\mathfrak{p}_\pm$ в $\mathfrak{g}^c$ пространств $V_\pm \subset \mathfrak{g}^c/\mathfrak{h}^c$ были подалгебрами Ли. Доказательство достаточности получается с помощью погружения пространства X в комплексное однородное многообразие G^c/P_-, где G^c, P_- — группы Ли, соответствующие алгебрам Ли $\mathfrak{g}^c$, $\mathfrak{p}_-$. Если в G^c есть комплексное подмногообразие N, трансверсальное к P_- в точке e, то G^c/P_- локально отождествляется с N, и погружение X в N задается формулой

$$X = G/H \ni gH \mapsto gP_- \ni n \in N. \tag{3}$$

В качестве N часто можно выбрать подгруппу в G^c с алгеброй Ли $\mathfrak{n}$, дополнительной к $\mathfrak{p}_+$. В нашем случае легко указать аналоги $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}^c$, $\mathfrak{p}_\pm$ и $\mathfrak{n}$. А именно, $\mathfrak{g} = \mathrm{Vect}\,(S^1)$ — алгебра Ли векторных полей на окружности, $\mathfrak{h}$ — одномерная подалгебра постоянных полей, $\mathfrak{g}^c$ — алгебра Ли комплекснозначных векторных полей, $\mathfrak{p}_+$ $(\mathfrak{p}_-)$ — подалгебра полей

$v(z)zd/dz$, для которых функции $v(z)$ допускают голоморфное продолжение внутрь (вне) единичного круга, $\mathfrak{n}$ — подалгебра в $\mathfrak{p}_+$, состоящая из тех полей, для которых продолжение функции $v(z)$ обращается в нуль в центре круга. Однако в этом случае не существует аналога группы G^c, а аналоги N и P_- — существуют лишь как группы ростков преобразований окрестностей 0 и ∞ соответственно, которые могут не иметь общей области определения. Тем не менее приведенную выше конструкцию можно «спасти» и построить искомое вложение M в виде области в комплексное многообразие N.

2. Пять реализаций M

Формула (1) задает алгебраическую реализацию многообразия M. В [2 и 3] приведена симплектическая реализация M в виде орбиты коприсоединенного представления группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ и ее центрального расширения. Существует также вероятностная реализация M как пространства всех гладких вероятностных мер на окружности. Мы приведем здесь еще две замечательные реализации.

Аналитическая реализация. Рассмотрим совокупность $\mathcal{F}$ всех голоморфных и однолистных в единичном круге D функций f, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и гладких вплоть до границы.

Геометрическая реализация. Пусть $\mathcal{K}$ означает совокупность всех гладких несамопересекающихся контуров K на комплексной плоскости, охватывающих точку $z = 0$ и имеющих конформный радиус 1 (см. [5]) относительно этой точки [1]). Пусть f — конформное отображение единичного круга D на внутренность контура K. (По теореме Римана такое отображение существует, а по теореме Лиувилля оно продолжается до гладкого отображения границы D на K (см. [5]).)

Для любого контура K отображение f можно нормировать так, чтобы выполнялись условия $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$. Тогда оно определено однозначно, и мы обозначим его f_K. По определению $K \in \mathcal{K}$, если $f'_K(0) = 1$, т. е. $f_K \in \mathcal{F}$. Отметим, что из каждого семейства гомотетичных контуров ровно один лежит в $\mathcal{K}$. Легко видеть также, что соответствие $K \leftrightarrow f_K$ устанавливает биекцию между $\mathcal{K}$ и $\mathcal{F}$.

Далее, для каждого $K \in \mathcal{K}$ однозначно определена функция g_K, голоморфная во внешности единичного круга, отображающая ее на внешность контура K и нормированная условиями $g_K(\infty) = \infty$, $g'_K(\infty) > 0$. Обозначим через γ_K диффеоморфизм единичной окружности, задаваемый формулой

$$\gamma_K = f_K^{-1} \circ g_K,$$

где f_K^{-1} — функция, обратная к f_K.

Л е м м а. *Соответствие* $K \mapsto \gamma_K \,\mathrm{Rot}\,(S^1)$ *задает биекцию* $\mathcal{K}$ *на* $M = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{Rot}\,(S^1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим обратное отображение из M в $\mathcal{K}$. Пусть $\gamma \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$. Зададим на $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \bigsqcup \{\infty\}$ новую комплексную структуру следующим образом [2]). Пусть D_+ (D_-) — внутренность (внешность) единичного круга, $\overline{D}_\pm$ — их замыкания. Рассмотрим дизъюнктное объединение $\overline{D}_+ \bigsqcup \overline{D}_-$ и отождествим в нем точки $z \in \overline{D}_+$ с $\gamma^{-1}(z) \in \overline{D}_-$, $z \in S^1$. Ясно, что полученное множество $\overline{\mathbf{C}}_\gamma$ диффеоморфно $\overline{\mathbf{C}}$. Из результатов [6] (см. также [7]) следует, что на $\overline{\mathbf{C}}_\gamma$ существует единственная комплексная структура, совпадающая со стандартной на D_+ и D_-. Поскольку

---

[1]) Эту нормировку можно выразить через значение кернфункции Бергмана области, ограниченной контуром, в точке $z = 0$.

[2]) Автор благодарит В. Г. Дринфельда, указавшего на работу Сулливана, в которой был использован такой способ задания комплексной структуры на двумерной поверхности.

все комплексные структуры на двумерной сфере эквивалентны, существует голоморфное отображение $F\colon \overline{\mathbf{C}}_\gamma \to \overline{\mathbf{C}}$, которое можно нормировать условиями $F(0)=0$, $F'(0)=1$, $F(\infty)=\infty$. Вспоминая определение $\overline{\mathbf{C}}_\gamma$, видим, что задание отображения F равносильно заданию пары функций (f, g), определенных в $\overline{D}_\pm$ и связанных условием $f=g\circ\gamma^{-1}$ на S^1. Из построения F следует, что $f\in\mathcal{F}$.

Пусть f переводит единичную окружность в контур $K\in\mathcal{K}$. Тогда $f=f_K$, а g отличается от g_K, быть может, умножением справа на поворот. Поэтому $\gamma=f^{-1}\circ g\equiv f_K^{-1}\circ g_K$ и $\gamma\equiv\gamma_K \bmod \mathrm{Rot}\,(S^1)$. Лемма доказана.

Заметим, что соответствие $\gamma_K\,\mathrm{Rot}\,(S^1)\to f_K$ является прямым аналогом отображения (3).

3. Комплексная и кэлерова структура на M

В алгебраической реализации касательные пространства к точкам M отождествляются с пространством $\mathrm{Vect}_0\,(S^1)$ вещественных векторных полей с нулевым средним на окружности, т. е. с пространством вещественных 2π-периодических функций $v\,(t)$ на прямой с нулевым средним по периоду.

В аналитической реализации $M\approx\mathcal{F}$ лежит в аффинном комплексном пространстве, и касательные пространства к его точкам отождествляются с комплексным пространством Φ голоморфных функций $\varphi\,(z)$ в круге, гладких вплоть до границы и нормированных условием $\varphi\,(0)=0$. А именно, вектору $\varphi\in\Phi$ соответствует прямая $f_t\,(z)=f\,(z)+tz\varphi\,(z)$ в $\mathcal{F}$. Связь между этими двумя реализациями касательного пространства для начальной точки имеет вид (ср. [8, гл. 4, п. 63]):

$$2\,\mathrm{Re}\,\varphi\,(e^{it})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{v\,(s)-v\,(t)}{\mathrm{tg}\,\frac{s-t}{2}}\,ds. \tag{4}$$

Преобразование Гильберта, стоящее в правой части этой формулы играет роль умножения на i в алгебраической реализации касательного пространства. В аналитической реализации ему соответствует обычное умножение на i. Поэтому формула (4) равносильна более простому соотношению

$$v\,(t)=-2\,\mathrm{Im}\,\varphi\,(e^{it}). \tag{4$'$}$$

Напомним, что простейшая симплектическая структура (отвечающая нулевому значению центрального заряда) в алгебраической реализации имеет вид

$$\langle v_1, v_2\rangle=\frac{1}{}\int_0^{2\pi}v_1\,(t)\,dv_2\,(t). \tag{5}$$

В аналитической реализации она переписывается так:

$$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Re}\iint\limits_{|z|<1}d\varphi_1\wedge d\overline{\varphi}_2=\frac{4}{\pi}\,\mathrm{Im}\iint\limits_{|z|<1}\varphi_1'\overline{\varphi}_2'\,dx\,dy. \tag{6}$$

Отсюда видно, что соответствующая кэлерова метрика имеет вид

$$(\varphi_1, \varphi_2)=\frac{4}{\pi}\iint\limits_{|z|<1}\varphi_1'\overline{\varphi}_2'\,dx\,dy=4\sum_{k\geqslant 1}ka_k^{(1)}\overline{a}_k^{(2)}, \tag{7}$$

где $a_k^{(i)}$ — коэффициенты степенного разложения φ_i, $i=1, 2$.

В общем случае множитель k в правой части (7) меняется на $\alpha k+\beta k^3$.

Т е о р е м а. *Комплексная структура на M, определяемая аналитической реализацией, инвариантна относительно действия группы* $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ *на M.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нужно показать, что при действии $\gamma \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$ производное отображение γ_* является комплексно-линейным.

Рассмотрим кривую в пространстве M с параметром ε. Ей соответствуют кривые $\gamma_\varepsilon \operatorname{Rot}(S^1)$, K_ε, f_ε и g_ε в алгебраической, геометрической и аналитической реализациях соответственно.

Пусть с точностью до $o(\varepsilon)$ $\gamma_\varepsilon = \gamma_0(1 + \varepsilon v)$, $f_\varepsilon = (1 + \varepsilon z\varphi) \circ f_0$, где $\varphi \in \Phi$, $g_\varepsilon = (1 + \varepsilon\psi) \circ g_0$. Тогда справедливы равенства $f_0^{-1} \circ g_0 = \gamma_0$, $f_\varepsilon^{-1} \circ g_\varepsilon = \gamma_\varepsilon$, откуда следует, что

$$\psi - z\varphi = (g_0' \cdot v) \circ g_0^{-1}. \tag{8}$$

Отображение γ переводит кривую $\gamma_\varepsilon \operatorname{Rot}(S^1)$ в $\gamma\gamma_\varepsilon \operatorname{Rot}(S^1)$. Пусть в аналитической реализации этой кривой соответствуют функции $\tilde f_\varepsilon = (1 + \varepsilon z\tilde\varphi) \circ \tilde f_0$ и $\tilde g_\varepsilon = (1 + \varepsilon\tilde\psi) \circ \tilde g_0$. Тогда $\tilde f_0^{-1} \circ \tilde g_0 = \gamma\gamma_0$ и $\tilde f_\varepsilon^{-1} \circ \tilde g_\varepsilon = \gamma\gamma_\varepsilon$, откуда

$$\tilde\psi - z\tilde\varphi = (\tilde g_0' \cdot v) \circ \tilde g_0^{-1}. \tag{9}$$

Условимся для функции F на контуре K через F_K^+ (F_K^-) обозначать голоморфную функцию внутри (вне) контура так, что выполняются равенства $F = F_K^+ + F_K^-$ и $F_K^+(0) = 0$. Тогда из определения $\tilde g_\varepsilon$ следует, что $\tilde\psi_K^+ = 0$ и из (9) вытекает равенство $z\tilde\varphi = -[(\tilde g_0' \cdot v) \circ \tilde g_0^{-1}]_K^+$. Далее, по тем же соображениям $[(\tilde g_0 \circ g_0^{-1})\,\psi \circ g_0 \circ \tilde g_0^{-1}]_K^+ = 0$, и поэтому из (8) получаем

$$z\tilde\varphi = [(\tilde g_0 \circ g_0^{-1})'\, z\varphi \circ g_0 \circ \tilde g_0^{-1}]_K^+. \tag{10}$$

Полученное выражение, очевидно, комплексно-линейно по φ, что и доказывает теорему.

К сожалению, действие группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ в аналитической и геометрической реализациях задаются лишь неявно. Однако действие подгруппы $\operatorname{Rot}(S^1)$ вполне наглядно: в геометрической реализации оно означает обычный поворот всех контуров $K \in \mathcal{K}$ вокруг точки $z = 0$. Можно также дать явную формулу для векторного поля Ли L_v на $\mathcal{F}$, соответствующего элементу $v \in \operatorname{Vect}(S^1)$:

$$L_v(f) = -i\,[(f' \cdot v) \circ f^{-1}]_K^+ \circ f. \tag{11}$$

Очень интересно было бы использовать найденную здесь кэлерову структуру для построения явных реализаций представлений группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ и других бесконечномерных групп.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кириллов А. А., Голенищева-Кутузова М. И.* Геометрия моментов для группы диффеоморфизмов. Препринт. Ин-та прикл. мат. им. М. В. Келдыша АН СССР № 101. 1986.
2. *Kirillov A. A.* Infinite dimensional Lie groups; their orbits, invariants and representations. // Lect. Notes in Math. № 970. Springer, 1982. P. 101—123.
3. *Кириллов А. А.* Метод орбит и представления бесконечномерных групп Ли // Геометрия и топология в глобальных нелинейных задачах. Воронеж, 1984. С. 49—67.
4. *Кобаяси М., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Ч. 2. М.: Наука, 1981.
5. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.— Л., 1959.
6. *Ahlfors L., Bers L.* Riemann' mapping theorem for variable metrics // Ann. of Math.— 1960.— V. 72, № 2.— P. 385—404.
7. *Лаврентьев М. А.* Sur une classe des representations continues // Мат. сб.— 1935.— Т. 42.— С. 407—424.
8. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
3 декабря 1986 г.