V. I. Vladimirov, Yu. A. Gorshkov, A. S. Umanskii, Задача нестационарной теплопроводности в эксцентрическом кольце, *TVT*, 1972, Volume 10, Issue 3, 558–564

https://www.mathnet.ru/eng/tvt9664

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР
Том 10 1972 № 3

УДК 536.212

ЗАДАЧА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОМ КОЛЬЦЕ

В. И. Владимиров, Ю. А. Горшков, А. С. Уманский

Решено уравнение теплопроводности с граничными условиями первого и второго рода для области, ограниченной двумя эксцентрично расположенными окружностями. Решение получено с использованием конформного отображения рассматриваемой области на концентрическое кольцо. Получающееся при этом нелинейное уравнение решается методом возмущения. Проанализировано влияние эксцентриситета на временные постоянные задачи. Показано, что собственные числа — четная функция эксцентриситета. При этом поправка на эксцентриситет тем больше (при той же величине эксцентриситета), чем больше отношение радиусов внутренней и внешней окружностей.

Нестационарная задача теплопроводности в концентрическом кольце является, по существу, одной из классических задач теории теплопроводности. Ее решение хорошо известно [1, 2] и др. и широко используется для практических расчетов *. Поскольку в реальных системах всегда в той или иной степени присутствует эксцентриситет, небезынтересно оценить его влияние на временные постоянные системы.

В данной работе решается нестационарная задача теплопроводности в области, ограниченной двумя окружностями с радиусами $\rho = R_p < 1$ и $\rho = 1$, имеющими эксцентриситет ε_p (рис. 1,*а*). На границах области предполагается равенство нулю избыточной температуры t или теплового потока (независимо для каждой из границ Γ_1 и Γ_2).

Температура в области подчиняется уравнению

$$[(\partial/\partial\tau) - aZ_{xy}]t(x, y, \tau) = 0. \quad (1)$$

Здесь $Z_{xy} = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2)$; a — коэффициент температуропроводности. Граничные условия запишем в виде

$$\alpha_1 t(\Gamma_1, \tau) + \alpha_2(\partial/\partial \mathrm{n})t(\Gamma_1, \tau) = 0, \quad (2)$$

$$\beta_1 t(\Gamma_2, \tau) + \beta_2(\partial/\partial \mathrm{n})t(\Gamma_2, \tau) = 0, \quad (3)$$

где в каждом граничном условии только один из коэффициентов принимает ненулевое значение.

Начальные условия $t = t(x, y, 0)$ считаем произвольными.

Для того чтобы записать граничные условия как функцию одной пространственной координаты, проведем замену переменных, построенную на базе конформного преобразования [4]

$$\omega = (z - \varepsilon)/(1 - \varepsilon z); \; z = x + iy; \; \omega = \alpha + i\beta = r(\cos\theta + i\sin\theta). \quad (4)$$

Теперь исследуемая область ограничена соосными окружностями $r = R$ и $r = 1$ (рис. 1,*б*). Связь между величинами ε, ε_p, R, R_p для $\varepsilon \ll 1$ будет показана ниже.

* Совершенно идентичной является задача о кольцевом волноводе [3], поэтому для нее справедливы все выводы данной работы.

Выражение (1) в координатах r, θ имеет вид

$$[(\partial/\partial\tau) - ae^{-2}Z_{r,\theta})]t(r, \theta, \tau) = 0, \tag{1а}$$

где

$$Z_{r,\theta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}; \quad e = \frac{1-\varepsilon^2}{1+2\varepsilon r\cos\theta+\varepsilon^2 r^2}.$$

Граничные условия (2), (3) сведутся к виду

$$\alpha_1 t(R, \theta, \tau) + \alpha_2 e^{-1}(R)(\partial/\partial r)t(R, \theta, \tau) = 0, \tag{2а}$$

$$\beta_1 t(r=1, \theta, \tau) + \beta_2 e^{-1}(1)(\partial/\partial r)t(r=1, \theta, \tau) = 0. \tag{3а}$$

Проведем теперь разделение переменных в (1а), (2а) и (3а), записывая как обычно $t = U(\tau)V(R,\theta)$, тогда $U = \mathrm{const}\cdot\exp(-\lambda^2\tau)$

и

$$[(1+s)Z + \Lambda^2]V(r, \theta) = 0, \tag{5}$$

где

$$\Lambda^2 = \lambda^2 a^{-1}(1-\varepsilon^2)^2, \tag{5а}$$

$$s = s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} + s^{(4)}, \quad s^{(1)} = 4\varepsilon r\cos\theta,$$

$$s^{(2)} = (2r^2 + 4r^2\cos^2\theta)\varepsilon^2, \quad s^{(3)} = 4\varepsilon^3 r^3\cos\theta, \quad s^{(4)} = \varepsilon^4 r^4. \tag{5б}$$

Граничные условия, очевидно, сведутся к виду

$$\alpha_1 V(R, \theta) + \alpha_2 e^{-1}(R, \theta)(\partial/\partial r)V(R, \theta) = 0, \tag{2б}$$

$$\beta_1 V(1, \theta) + \beta_2 e^{-1}(1, \theta)(\partial/\partial r)V(1, \theta) = 0. \tag{3б}$$

Используя условие $\varepsilon \ll 1$, получим решение задачи (5), (2б), (3б), пользуясь методами теории возмущения. Предварительно заметим, что

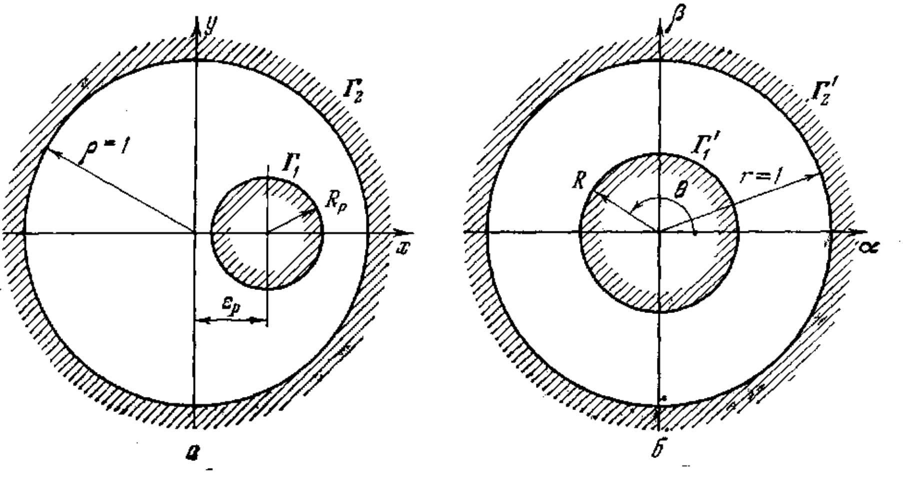

Рис. 1. Геометрия системы (*а*) и геометрия системы после конформного преобразования (4) (*б*)

поскольку вращение системы координат не должно влиять на релаксационные свойства системы, собственные числа являются четной функцией ε_p.

В качестве невозмущенного используем уравнение

$$[Z + (\Lambda^0)^2]\varphi^{(0)}(r, \theta) = 0. \tag{6}$$

Задача (6), (2б), (3б) подробно рассмотрена в [1, 2]. Собственные числа этой задачи, которые находятся из характеристического уравнения, [1] вида $\Phi(\Lambda_m^0, R) = 0$ обозначим через Λ_{mn}^0, а собственные функции — через $\varphi_{mn}^{(0,1)}$ и $\varphi_{mn}^{(0,2)}$.

Применение теории возмущения в случае $m = 0$ и $m \neq 0$ различно, поскольку при $m \neq 0$ собственные функции двукратно вырождены. Здесь мы рассматриваем наиболее интересный случай $m = 0$ *, поскольку он включает наименьшее собственное число задачи Λ_1, определяющее в основном поведение системы во времени. (Индекс $m = 0$ в дальнейшем опускаем.)

Считаем, как обычно, что собственные функции и собственные значения задачи (5), (2б), (3б) можно разложить в ряд по параметру η, принимающему значения на отрезке [0, 1], а возмущающую добавку в уравнении (5) записать в виде

$$s = \eta s^{(1)} + \eta^2 s^{(2)} + \eta^3 s^{(3)} + \eta^4 s^{(4)}, \tag{7}$$

$$\psi_n = \varphi_n^{(0)} + \eta\varphi_n^{(1)} + \eta^2\varphi_n^{(2)} + \ldots, \tag{8}$$

$$\Lambda_n^2 = [\Lambda_n^0] + \eta[\Lambda_n^1] + \eta^2[\Lambda_n^2] + \ldots. \tag{9}$$

Подставляя (8), (9) в возмущенное уравнение (5), записанное с учетом (7), приравняем нулю коэффициенты при степенях η, тогда наряду с (6) получим

$$\eta^1: s^{(1)}Z\varphi_n^{(0)} + Z\varphi_n^{(1)} + [\Lambda_n^{(1)}]^2\varphi_n^{(0)} + [\Lambda_n^{(0)}]^2\varphi_n^{(1)} = 0, \tag{10}$$

$$\eta^2: s^{(2)}Z\varphi_n^{(0)} + s^{(1)}Z\varphi_n^{(1)} + Z\varphi_n^{(2)} + [\Lambda_n^{(2)}]^2\varphi_n^{(0)} +$$

$$+ [\Lambda_n^{(1)}]\varphi_n^{(1)} + [\Lambda_n^0]\varphi_n^{(2)} = 0, \tag{11}$$

$$\eta^n \equiv 0 \qquad n > 2. \tag{12}$$

С учетом того, что функция $\varphi_n^{(1)}$ есть функция сравнения [6], умножаем (10) на $r\varphi_n^{(0)}$ и интегрируя по области r, θ получаем

$$[\Lambda_n^{(1)}]^2 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_R^1 \varphi_n^{(0)} s^{(1)} Z\varphi_n^{(0)}\, r dr\, d\theta. \tag{13}$$

Так как $s^{(1)} = 4\varepsilon r\cos\theta$, интегрирование по углу дает, как и следовало ожидать, $[\Lambda_n^1] = 0$.

Из (11) с учетом $[\Lambda_n^1] = 0$ аналогично получаем

$$[\Lambda_n^{(2)}] = -\left[\int\limits_{r,\theta} s^{(1)}\varphi_n^{(0)} Z\varphi_n^{(1)} r dr\, d\theta + \int\limits_{r,\theta} s^{(2)}\varphi_n^{(0)} Z\varphi_n^{(0)} r dr\, d\theta\right]. \tag{14}$$

Первая возмущенная собственная функция $\varphi_n^{(1)}$ является решением уравнения (10), которое с учетом вида $s^{(1)}$ (5б) и невозмущенного уравнения (6), а также условия $\Lambda_n^1 = 0$ сведется к виду

$$Z\varphi_n^{(1)} + [\Lambda_n^0]^2\varphi_n^{(1)} = 4\varepsilon r[\Lambda_n^0]^2\varphi_n^{(0)}\cos\theta. \tag{10а}$$

Решение уравнения (10а) ищем в виде

$$\varphi_n^{(1)} = 4\varepsilon[\Lambda_n^0]^2\xi_n(r)\cos\theta. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (10а), получаем относительно функции $\xi_n(r)$ уравнение Бесселя первого порядка с правой частью

$$Z\xi_n(r) + [\Lambda_n^0]^2\xi_n(r) - (1/r^2)\xi_n(r) = \varphi_n^{(0)} \tag{10б}$$

* В случае вырождения применение теории возмущения подробно рассмотрено в [5].

Решение уравнения (10б) для конкретных граничных условий может быть легко получено методом вариации постоянных (см., например, [6]).

Используя (5б), (6), (10а) и (15) окончательно запишем выражение (14) в виде

$$\left[\frac{\Lambda_n^{(2)}}{\Lambda_n^0}\right]^2 = \varepsilon^2\left[-8\pi\int\limits_r r^3[\varphi_n^{(0)}]^2\,dr + 4\pi\int\limits_\tau \varphi_n^{(0)}\xi_n r^2 dr\right]. \tag{16}$$

Легко проверить, рассматривая дальнейшие приближения теории возмущений, что $\Lambda^{(3)}$ и вообще все $\Lambda_n^{(2k-1)}$ $(k = 1, 2\ldots)$, т. е. члены пропорциональные нечетным степеням ε, обращаются в нуль аналогично $\Lambda_n^{(1)}$. Последнее объясняется (с учетом записанной ниже формулы (17)) четностью зависимости $\Lambda_n = f(\varepsilon_p)$, о которой говорилось выше.

При условии $\varepsilon_p = 0$ задача (5), (2б), (3б) соответствует, очевидно, задаче о концентрическом кольце радиуса R_p в отличие от невозмущенной задачи (6), (2б), (3б). Обозначим собственные числа задачи (5), (2б), (3б) при $\varepsilon_p = 0$ через k_n.

При условии $\varepsilon \ll 1$ из (4) непосредственно следует

$$\varepsilon \approx [\varepsilon_p/(1-R_p^2)] + 0(\varepsilon_p^2) \quad \text{и} \quad R - R_p = R_p(1-R_p^2)\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^4). \tag{17}$$

Вид характеристического уравнения задачи (5), (2б), (3б) при $\varepsilon_p = 0$ $\Phi(k_n R_p) = 0$ идентичен виду уравнения (6а), поэтому, пользуясь гладкостью функции $\Phi(k_n R_p)$ и выражением (17), из которого следует $R - R_p \ll 1$ при $\varepsilon \ll 1$, можно записать

$$[\Lambda_n^0]^2 \approx [k_n(R_p)]^2[1 + (R-R_p)(d/dR_p)[k_n]^2]$$

или с учетом (17) и (15а)

$$[\Lambda_n^0]^2 \approx [k_n]^2[1 + 2R_p(1-R_p^2)\varepsilon^2 k_n(d/dR_p)k_n](1-\varepsilon^2). \tag{18}$$

Теперь, используя (18), (16), можно окончательно выразить собственные числа рассматриваемой задачи $\Lambda_n^{(2)}$ об эксцентрическом кольце радиуса R_p через собственные числа задачи о концентрическом кольце того же радиуса k_n *

$$\left[\frac{\Lambda_n^{(2)}}{k_n}\right]^2 = 1 + 2\varepsilon^2\Big[(1-R_p^2)\frac{dk_n}{dR_p} +$$

$$+ 1 - 4\pi\int\limits_{R_p}^1 r^3[\varphi_n^{(0)}]^2\,dr + 2\pi\int\limits_{R_p}^1 \varphi_n^{(0)}\xi_n r^2\,dr\Big] + 0(\varepsilon^4). \tag{19}$$

В качестве примера, пользуясь (19), проведем оценку влияния эксцентриситета на собственные числа задачи с граничными условиями

$$t(\Gamma_1, \tau) = 0; \quad t(\Gamma_2, \tau) = 0. \tag{2в}$$

Здесь (2б), (3б), очевидно, сводятся к

$$V(R) = 0 \quad \text{и} \quad V(1) = 0. \tag{2г}$$

Собственные функции невозмущенной задачи (6), (2в) имеют вид [1]

$$\varphi_{mn}^{(0,1)} = I_{mn}[J_m(\Lambda_n^0 r)N_m(\Lambda_n^0) - J_m(\Lambda_n^0)N(\Lambda_n^0 r)I\sin(m\theta)],$$

$$\varphi_{mn}^{(0,2)} = I_{mn}[J_m(\Lambda_n^0 r)N_m(\Lambda_n^0) - J_m(\Lambda_n^0)N(\Lambda_n^0 r)I\cos(m\theta)].$$

* В интегралах выражения (19) R всюду заменено на R_p, а Λ_n^0 на k_n. Вносимая при этом суммарная погрешность, которую легко оценить, пропорциональна ε^4, поэтому с требуемой здесь точностью до величин порядка ε^2 ею можно пренебречь.

В случае $m = 0$

$$\varphi_n^0 = I_n[J_0(\Lambda_n^0 r)N_0(\Lambda_n^0) - J_0(\Lambda_n^0)N(\Lambda_n^0 r)], \tag{20}$$

где

$$I_n^2 = \frac{\pi}{4}[\Lambda_n^0]^2 J_0(\Lambda_n^0)[J_0^2(\Lambda_n^0 R) - J_0^2(\Lambda_n^0)]^{-1}$$

— нормировочный множитель; $J_m(\alpha)$, $N_m(\alpha)$ — функции Бесселя первого и второго рода m-го порядка от действительного аргумента. Используя (20), из уравнения (10б) получаем

$$\xi(r) = \frac{J_1(\Lambda_n^0 r)N_1(\Lambda_n^0 R) - J_1(\Lambda_n^0 R)N_1(\Lambda_n^0 r)}{J_1(\Lambda_n^0 R)N_1(\Lambda_n^0) - J_1(\Lambda_n^0)N_1(\Lambda_n^0 R)}\Omega_R^1 + \Omega_R^r, \tag{21}$$

где

$$\Omega_R^\alpha = \frac{\pi}{2}\int_R^\alpha [J_1(\Lambda_n^0\alpha)N_1(\Lambda_n^0 X) - N_1(\Lambda_n^0\alpha)J_1(\Lambda_n^0 X)] \times$$

$$\times \varphi_n^{(0)}(x)x^2dx.$$

Характеристическое уравнение (6а) задачи (6), (2в) имеет вид [1]

$$\Phi(\Lambda_n^0 R) = J_0(\Lambda_n^0 R)N_0(\Lambda_n^0) - J_0(\Lambda_n^0)N_0(\Lambda_n^0 R) = 0. \tag{22}$$

Соответственно, как указывалось выше, собственные числа исходной задачи при $\varepsilon_p = 0$ суть корни идентичного уравнения

$$\Phi(k_n R_p) = 0. \tag{22a}$$

Согласно известной формуле дифференцирования неявных функций, из (22а) следует

$$(dk_n/dR_p) = (-k_n/R_p)J_0^2(k_n)[J_0^2(k_n) - J_0^2(k_n R_p)]^{-1}. \tag{23}$$

Окончательно для задачи (1), (2в) получаем

$$[\Lambda_n^{(2)}/k_n]^2 = 1 + 2\varepsilon^2\Big\{(1 - R_p^2)J_0^2(k_n)[J_0^2(k_n R_p) -$$

$$- J_0^2(k_n)]^{-1} + 1 - 4\pi\int_{R_p}^1 r^3[\varphi_n^{(0)}]^2 dr + 2\pi\int_{R_p}^1 \varphi_n^{(0)}\xi_n r^2 dr\Big\} + 0(\varepsilon^4), \tag{19a}$$

где $\varphi_n^{(0)}$ k_n и ξ_n определены соответственно в (20), (22а) и (21).

Рассмотрим теперь асимптотический характер формулы (19а) для наибольшего собственного числа задачи $\Lambda_1^{(2)}$ в наиболее интересной для нас области $R_p \ll 1$. Пользуясь асимптотиками функций Бесселя, полностью, аналогично тому, как это сделано в [8] *, из трансцендентного уравнения (22а) для зависимости $k_1(R_p)$ получаем

$$k_1 \approx {}^3/_4\pi(1 - {}^2/_3\ln^{-1}\mu R_p), \tag{24}$$

где $\mu = 3\pi\gamma/8$; $\gamma = 1{,}7811\ldots$ (24) справедливо в области, ограниченной неравенством

$$0 \leqslant R_p \ll (1/\mu)\exp(-{}^2/_3) = 0{,}24459\ldots \tag{24a}$$

* Трансцендентное уравнение (22), (22а) является, как легко видеть, частным случаем уравнения, рассматриваемого в [8], которое сводится к (22) при стремлении к бесконечности отношения объемных теплоемкостей внутренней и внешней областей.

В правой части области $0 \leqslant R \leqslant 1$ соответственно получаем соотношение

$$k_1 \approx \pi / (1 - R_p), \tag{25}$$

справедливое в области

$$0{,}24145\ldots = 1 / (1 + \pi) \leqslant R \leqslant 1. \tag{25а}$$

Из (24) и (25) следует (рис. 2), что на всем отрезке R_p [0, 1] справедливо неравенство

$$k_1(R_p) \geqslant {}^3/_4\pi. \tag{26}$$

Последнее обстоятельство позволяет с достаточной для качественного анализа точностью заменить бесселевы функции с аргументом k_1r и k_1 в подынтегральных выражениях (19а) их асимптотиками [7]

$$J_0(\alpha) \approx (2/\pi\alpha)^{1/2}\cos(\alpha - \pi/4); \quad N_0(\alpha) = (2/\pi\alpha)^{1/2}\sin(\alpha - \pi/4) \tag{27}$$

справедливыми при $\alpha \gg 1$. Неравенство $k_1r \gg 1$, естественно, нарушается при $R_p \to 0$, однако возникающая при этом ошибка в величине интеграла мала, поскольку область $k_1r < 1$ сравнительно узка, что легко показать, используя (25), а величина подынтегрального выражения в обоих интегралах в указанной области относительно мала, так как в силу граничного условия (2г) $\xi_n \to 0$ и $\varphi_n^{(0)} \to 0$ при $r \to R$.

Проводя интегрирование в (19а), и заменив в силу условия $R \ll 1$ и (24) функции Бесселя с аргументами (k_1R_p) и (k_1) их разложениями с точностью до чле-

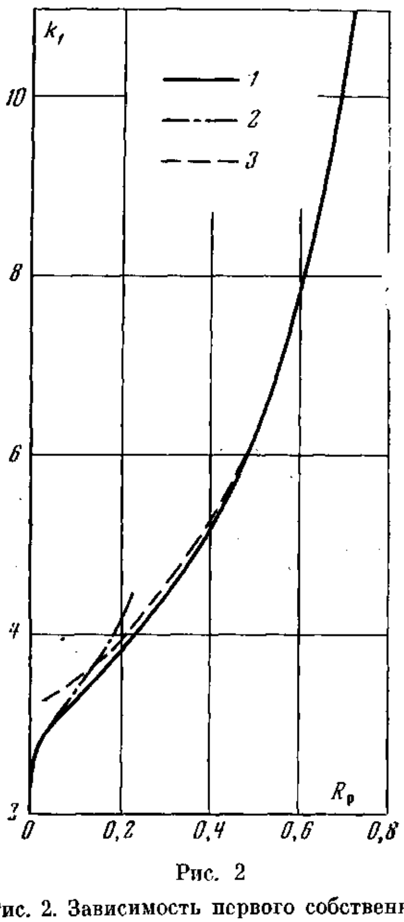

Рис. 2

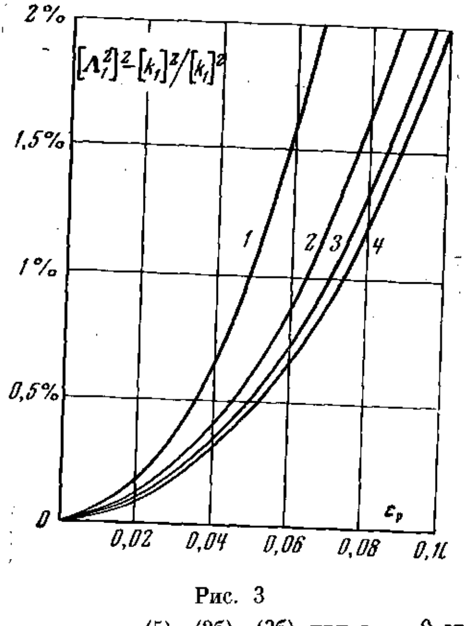

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость первого собственного числа задачи (5), (2б), (3б) при $\varepsilon_p = 0$ от радиуса R_p:

1 — численный расчет по (22а); 2 — расчет по (24); 3 — расчет по (25)

Рис. 3. Характер зависимости собственных чисел задачи от величины эксцентриситета (расчет по формуле (28)):

1 — $R_p = 0{,}3$; 2 — 0,2; 3 — 0,1; 4 — 0

нов первого порядка, в окрестности точек $k_1 R_p = 0$ и $k_1(0) = {}^3/_4\pi$, окончательно получаем

$$\left[\frac{\Lambda_1^{(2)}}{k_1}\right]^2 \approx 1 + 2\varepsilon^2\left[1 + \left(\frac{4}{3\pi}\ln^{-1}\frac{3\gamma\pi}{8}R_p\right)^2\right]$$

или с учетом (17)

$$\left[\frac{\Lambda_1^{(2)}}{k_1}\right]^2 \approx 1 + \frac{2\varepsilon_p^2}{(1-R_p^2)^2}\left[1 + \left(\frac{4}{3\pi}\ln^{-1}\frac{3\gamma\pi}{8}R_p\right)^2\right]. \qquad (28)$$

Выражение (28) справедливо в области (24а). Пользуясь (28), легко найти ограничение на величину эксцентриситета ε_p, при котором справедливо приближение, рассматриваемое в данной работе: из условия $2\varepsilon^2\left[1 + \left(\frac{4}{3\pi}\ln^{-1}\frac{3\gamma\pi}{8}R_p\right)^2\right] \ll 1$ следует

$$\varepsilon_p^2 \ll 1 - R_p^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3\pi}\ln^{-1}\frac{3\gamma\pi}{8}R_p\right)^2. \qquad (28a)$$

На (рис. 3) приведен результат расчета, проведенного по соотношению (28) для $R_p = 0$; 0,1; 0,2; 0,3. Видно, что влияние эксцентриситета растет с увеличением радиуса внутренней окружности. Однако и в случае $R_p = 0$ (линейный источник) эксцентриситет оказывает существенное влияние на временные характеристики.

Авторы выражают благодарность И. А. Брину за постоянный интерес к работе.

Институт высоких температур
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
13 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. С. Карслоу, О. К. Егер. Теплопроводность твердых тел. «Наука», 1964.
2. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. «Высшая школа», 1967.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. «Наука», 1965.
4. Л. Коллатц. Задачи на собственные значения. «Наука», 1968.
5. А. Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. «Наука», 1967.
6. Г. Джеффрис, Б. Свирлс. Методы математической физики. «Мир», 1969—1970.
7. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. «Наука», 1964.
8. А. С. Уманский, В. М. Дубнер, Ю. А. Горшков. Докл. АН СССР, 186, № 1, 1969.