В. Ю. Попков, Д. Каревски, Г. М. Шютц, Точные результаты для изотропной цепочки Гейзенберга спина 1/2 с диссипацией на границах, *ТМФ*, 2019, том 198, номер 2, 341–362

DOI: 10.4213/tmf9556

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 198, № 2
февраль, 2019

 В. Ю. Попков[*,†], **Д. Каревски**[‡], **Г. М. Щютц**[‡,§]

ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ ЦЕПОЧКИ ГЕЙЗЕНБЕРГА СПИНА 1/2 С ДИССИПАЦИЕЙ НА ГРАНИЦАХ

Исследуется открытая изотропная квантовая цепочка Гейзенберга со спином $1/2$ и конечным числом N узлов, взаимодействующая на концах с диссипативной средой, которая вызывает поляризацию граничных спинов в разных направлениях. Используется анзац матричного произведения, который дает точную приведенную матрицу плотности цепочки Гейзенберга. Матричная алгебра, вытекающая из анзаца матричного произведения, изучена более подробно, чем в предыдущей работе авторов. Получены точные результаты для неравновесной статистической суммы, касающиеся влияния квантовых флуктуаций на граничные таргет-состояния и на корреляции тока и намагниченности в стационарном состоянии. Граничные состояния остаются чистыми с точностью до порядка $o(N^{-2})$. Показано, что локальная намагниченность и локальный ток, перпендикулярный плоскости, натянутой на граничные поляризации, имеют дальнодействующие корреляции, а локальные корреляции намагниченности с локальными токами в плоскости строго запрещены.

Ключевые слова: неравновесные стационарные состояния, спиновая цепочка Гейзенберга, управляемые системы, точные результаты.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9556

Посвящается памяти Людвига Дмитриевича Фаддеева

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы покажем, что изотропная квантовая спиновая цепочка Гейзенберга со спином $1/2$ и N узлами поддерживается в неравновесном стационарном состоянии (НСС) диссипативным взаимодействием граничных спинов с окружа-

Работа частично поддержана CNRS и DFG.

[*]Helmholtz Institute for Radiation and Nuclear Physics, University of Bonn, Bonn, Germany. E-mail: vladipopkov@gmail.com

[†]Institute of Theoretical Physics, University of Cologne, Cologne, Germany

[‡]Laboratoire de Physique et Chimie Théoriques, Université de Lorraine, CNRS, Vandoeuvre les Nancy, France

[§]Institute of Complex Systems, Forschungszentrum Jülich, Germany

ющей средой, которая стремится поляризовать граничные спины в разных направлениях с эффективным углом кручения θ между ними. Это кручение генерирует ток намагничивания $\vec{j}_N(\theta)$, что свидетельствует о неравновесном характере приведенной матрицы плотности $\rho_N(\theta)$ для этой открытой квантовой системы [1]–[4]. Более того, как точные результаты [4]–[6] для максимального угла кручения $\theta = \pi$, так и аналогичное поведение в классических гранично-управляемых диффузионных системах [7], [8] предполагают возникновение дальнодействующих корреляций в токопроводящем НСС. По этим причинам мы сосредоточимся здесь на влиянии этого кручения на граничные таргет-спины и на корреляции между локальными токами и локальной намагниченностью в НСС.

Мы получили точные результаты для приведенной матрицы плотности $\rho_N(\theta)$ для произвольного размера системы N из анзаца матричного произведения (АМП) [1], [3], [4] (см. общий обзор с точки зрения физики [6], работу [9] о связи с квантовой интегрируемостью цепочки Гейзенберга [10], [11] и работу [12] о математически строгом применении АМП для квантовых цепочек). В рамках этого подхода сначала строится ненормализованная приведенная матрица плотности $\tilde{\rho}_N(\theta) = Z_N(\theta)\rho_N(\theta)$, где след $Z_N(\theta) = \operatorname{Tr}\tilde{\rho}_N(\theta)$ можно рассматривать как неравновесную статистическую сумму открытой квантовой системы. Из величины $Z_N(\theta)$ непосредственно получается стационарный вектор тока $\vec{j}(N,\theta)$, связанный с тремя сохраняющимися компонентами ожидаемой локальной намагниченности $\vec{m}_k(N,\theta) \propto \operatorname{Tr}(\vec{\sigma}_k\rho_N(\theta))$ изотропной цепочки Гейзенберга. Дальнейшие алгебраические манипуляции позволяют вывести рекуррентные соотношения для локальных наблюдаемых.

Мы используем результаты наших предыдущих работ [1] [2], [12] и выходим за их пределы, изучая влияние объемных квантовых флуктуаций на граничные поляризации. Для этого мы точно вычисляем разность между приведенными матрицами граничной плотности и таргет-состояниями, которые окружающая среда пытается установить на границах. Оказывается, что и граничные состояния цепочки могут быть выражены непосредственно через токи и, следовательно, через $Z_N(\theta)$. Более того, мы будем использовать АМП, чтобы показать, что локальная намагниченность и ток, перпендикулярный плоскости, натянутой на таргет-поляризации, обычно имеют дальнодействующие корреляции – явление, возникающее также в классических неравновесных состояниях гранично-управляемых твердотельных частиц, которое может быть описано с помощью различных АМП [13]–[15]. Однако корреляции с токами в плоскости, натянутой на векторы таргет-поляризации, строго запрещены.

Работа имеет следующую структуру. После изложения в разделе 2 задачи в точной форме мы рассмотрим в разделе 3 АМП, основываясь на результатах трех статей [1], [2], [12]. Чтобы сделать статью самодостаточной и объяснить некоторые важные технические вопросы, которые обсуждаются в достаточно отрывочной форме в этих статьях, мы приводим соответствующий материал более подробно, чем ранее. Новые результаты представлены в следующих двух разделах: в разделе 4 мы получаем новые алгебраические соотношения между матрицами, возникающими из АМП, в разделе 5 мы вычисляем приведенную матрицу плотности для граничных спинов и сравниваем ее с таргет-состояниями, которые стремится установить окружающая среда. На следующем шаге мы используем алгебраические выкладки для обсуждения локальных корреляций тока намагниченности. В разделе 6 мы приводим некоторые аналогии с системами классических частиц на одномерной решетке.

2. ОТКРЫТАЯ XXX-ЦЕПОЧКА ГЕЙЗЕНБЕРГА СО СПИНОМ 1/2 И С ДИССИПАЦИЕЙ НА ГРАНИЦЕ

Для описания открытых квантовых систем с диссипацией имеется мастер-уравнение Линдблада для приведенной матрицы плотности $\rho(t)$ [16]–[19]. Эволюция по времени $\dot{\rho}(t) = \mathcal{L}(\rho(t))$ определяется лиувиллианом $\mathcal{L}$, состоящим из унитарной части, включающей гамильтониан H рассматриваемой квантовой системы, и диссипативной части $\mathcal{D}$, описывающей взаимодействие с окружающей средой. Для $\hbar = 1$ имеем

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \mathcal{D}(\rho), \tag{1}$$

где диссипативная часть

$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_i \Gamma_i \mathcal{D}_i(\rho) \tag{2}$$

задается в терминах оператора Линдблада L_i как

$$\mathcal{D}_i(\rho) = L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2}(L_i^\dagger L_i \rho + \rho L_i^\dagger L_i). \tag{3}$$

Константы Γ_i описывают силу диссипативного взаимодействия. Такая форма диссипатора является наиболее общей, это гарантирует, что величина $\rho(t)$ остается эрмитовой и сохраняет след и положительность для всех t. Оператор Линдблада L_i может быть неэрмитовым.

Нас интересует НСС краевого гранично-управляемого изотропного спина 1/2 цепочки Гейзенберга [11], [20], [21] (XXX-цепочка) с N узлами, связанной с окружающей средой, которая благоприятствует поляризации граничных спинов вдоль заранее определенных единичных векторов $\vec{n}_{\mathrm{L}}$, $\vec{n}_{\mathrm{R}}$ с левого конца (узел 1) и с правого конца (узел N) цепочки. Другими словами, мы хотим получить стационарное решение ρ^{NESS} уравнения

$$-i[H, \rho^{\mathrm{NESS}}] + \Gamma_1 \mathcal{D}_1(\rho^{\mathrm{NESS}}) + \Gamma_N \mathcal{D}_N(\rho^{\mathrm{NESS}}) = 0 \tag{4}$$

из (1) с гамильтонианом H XXX-цепочки и два граничных рассеивателя, задаваемых операторами Линдблада L_1 и L_N. В частности, мы рассматриваем случай с равными силами взаимодействия

$$4\Gamma := \Gamma_1 = \Gamma_N. \tag{5}$$

Предполагая, что Γ не будет играть ключевой роли в нашем исследовании, мы отбрасываем зависимость от Γ во всех физических наблюдаемых и обозначаем $\rho^{\mathrm{NESS}} = \rho_N(\theta)$.

Чтобы определить гамильтониан H и операторы Линдблада L_1 и L_N, мы сначала фиксируем обозначения. Введем двумерную единичную матрицу и матрицы Паули

$$\sigma^0 \equiv \mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

из которых, используя произведение Кронекера $\otimes$, можно построить локальные тензорные операторы

$$\sigma_k^\alpha = \mathbb{1}^{\otimes(k-1)} \otimes \sigma^\alpha \otimes \mathbb{1}^{\otimes(N-k)}, \qquad \alpha \in \{1, 2, 3\}, \tag{7}$$

действующие на 2^N-мерном комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^{2^N}$ с каноническим базисом $|s\rangle = |s_1\rangle \otimes \cdots \otimes |s_N\rangle$, где $s_k \in \{\pm 1\}$, $k \in \{1, \ldots, N\}$, – собственные значения σ_k^3. По соглашению $A^{\otimes 0} := 1$ для всех матриц A, где 1 – это число, а не единичная матрица. Для дальнейшего использования мы также вводим линейные комбинации $\sigma^{\pm} = (\sigma^1 \pm i\sigma^2)/2$ и аналогично $\sigma_k^{\pm}$. Более того, мы определяем матричнозначные трехмерные векторы $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ (и аналогично $\vec{\sigma}_k$) со скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b} := \sum_{i=1}^3 a_i b_i$ и векторным произведением $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$: $c_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k$, где ε_{ijk} – полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты. Транспонирование матрицы (или вектора) обозначается надстрочным индексом T, комплексное сопряжение – звездочкой $*$, эрмитово сопряжение – надстрочным индексом $\dagger$.

Обеспечивая пространство $\mathbb{C}^{2^N}$ стандартным скалярным произведением, мы получаем физическое гильбертово пространство $\mathfrak{P}$ размерности 2^N, на котором действуют матрица плотности $\rho_N(\theta)$, гамильтониан H и операторы Линдблада $L_{1,N}$. Обозначим единичную матрицу, действующую на $\mathfrak{P}$, через $\mathbf{1}$, т. е. $\mathbf{1} = \mathbb{1}^{\otimes N}$. Чтобы различать объемные и граничные свойства системы, введем для $N \geqslant 2$ разложение

$$\mathfrak{P} \cong \mathfrak{P}_{\mathrm{L}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathrm{bulk}} \otimes \mathfrak{P}_{\mathrm{R}} \tag{8}$$

на объемную часть без рассеяния $\mathfrak{P}_{\mathrm{bulk}}$ для спинов в узлах $2, 3, \ldots, N-1$ и две граничные части $\mathfrak{P}_{\mathrm{L,R}}$ для левого и правого граничных спинов соответственно. В качестве гильбертовых пространств выбираем $\mathfrak{P}_{\mathrm{bulk}} \cong (\mathbb{C}^2)^{\otimes(N-2)}$ и $\mathfrak{P}_{\mathrm{L}} \cong \mathfrak{P}_{\mathrm{R}} \cong \mathbb{C}^2$ с соответствующими стандартными скалярными произведениями. Приведенные граничные матрицы плотности определяются выделением из полного НСС $\rho_N(\theta)$ остающейся неграничной части $\mathfrak{P}$, т. е.

$$\rho_{\mathrm{L}}(N, \theta) := \mathrm{Tr}_{\mathrm{bulk,R}}\, \rho_N(\theta), \qquad \rho_{\mathrm{R}}(N, \theta) := \mathrm{Tr}_{\mathrm{L,bulk}}\, \rho_N(\theta). \tag{9}$$

Эти (2×2)-матрицы полностью описывают граничные состояния. Они явно зависят от размера N системы, угла кручения θ и силы взаимодействия Γ, где, как и выше, зависимость от Γ в наших обозначениях опущена.

С этими определениями мы имеем

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} \vec{\sigma}_k \cdot \vec{\sigma}_{k+1}, \tag{10}$$

где без ограничения общности мы установили силу спинового обменного взаимодействия, равную единице. Гамильтониан симметричен относительно вращений в $\mathbb{R}^3$. Поэтому только угол θ между диссипативными граничными поляризациями $\vec{n}_{\mathrm{L}}$, $\vec{n}_{\mathrm{R}}$ вместе с длиной N цепочки и силой взаимодействия Γ определяют физические свойства НСС. Чтобы зафиксировать систему координат, мы выбираем таргет-векторы $\vec{n}_{\mathrm{L}}$, $\vec{n}_{\mathrm{R}}$, порождающие (x, y)-плоскость, и направляем вектор $\vec{n}_{\mathrm{L}}$ вдоль оси x. Таким образом,

$$\vec{n}_{\mathrm{L}} = (1, 0, 0), \qquad \vec{n}_{\mathrm{R}} = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{11}$$

с $|\vec{n}_{\mathrm{L}}| = |\vec{n}_{\mathrm{R}}| = 1$ и $\theta = \arccos(\vec{n}_{\mathrm{L}} \cdot \vec{n}_{\mathrm{R}})$. Свойства $\rho_N(\theta)$ для отрицательных значений θ вытекают из следующего свойства симметрии:

$$\rho_N(-\theta) = Q_1 \rho_N(\theta) Q_1, \tag{12}$$

где $Q_\alpha = (\sigma^\alpha)^{\otimes N}$.

Рассеиватели $\mathcal{D}_{1,N}$, которые способствуют релаксации граничных спинов вдоль направлений $\vec{n}_{\rm L}$, $\vec{n}_{\rm R}$, определяются требованием, что они должны иметь в качестве стационарных решений таргет-состояния $\tilde{\rho}_{\rm L,R}$, заданные матрицами плотности $\tilde{\rho}_{\rm L} = \rho_{\rm L}^{\rm target} \otimes \rho_0$ и $\tilde{\rho}_{\rm R} = \rho_0' \otimes \rho_{\rm R}^{\rm target}$ с

$$\rho_{\rm L}^{\rm target} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{n}_{\rm L} \cdot \vec{\sigma}), \qquad \rho_{\rm R}^{\rm target} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{n}_{\rm R} \cdot \vec{\sigma}), \tag{13}$$

где ρ_0, ρ_0' являются произвольными приведенными матрицами плотности для остальных $N-1$ спинов. Другими словами, таргет-состояния $\tilde{\rho}_{\rm L,R}$ являются решениями мастер-уравнения Линдблада (4) в отсутствие унитарной квантовой части эволюции времени. В этом смысле их можно рассматривать как полуклассические состояния.

Для каждой границы существуют два семейства локальных операторов Линдблада с требуемым свойством $\mathcal{D}_1 \tilde{\rho}_{\rm L} = 0 = \mathcal{D}_N \tilde{\rho}_{\rm R}$. Для левой границы можно найти $L_1 = a(\sigma_1^2 + i\sigma_1^3) + b(\mathbf{1} - \sigma_1^1)$ и $L_1' = a'\mathbf{1} + b'\sigma_1^1$ с произвольными константами a, a', b, b' [12]. Следуя [1], [2], мы выбираем L_1 с нормализацией $a = 1/2$ и $b = 0$ так, что $\operatorname{Tr} L_1 = 0$. Аналогично мы выбираем для правого граничного узла N повернутые операторы Линдблада, в результате чего получаем

$$L_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + i\sigma_1^3), \qquad L_N = \frac{1}{2}(\sigma_N^2 \cos\theta - \sigma_N^1 \sin\theta + i\sigma_N^3). \tag{14}$$

Тогда в отсутствие унитарного члена в выражении (1) граничные спины экспоненциально быстро убывают к полуклассическим таргет-состояниям $\tilde{\rho}_{\rm L}$, $\tilde{\rho}_{\rm R}$ (13) с характерными временами $\propto \Gamma^{-1}$ [12].

Дадим краткие комментарии для коллинеарных граничных состояний $\vec{n}_{\rm L} = \vec{n}_{\rm R} := \vec{n}$, соответствующий значению $\theta = 0$. В этом случае стационарное мастер-уравнение Линдблада (4) решается для всех Γ с помощью соотношения

$$\rho_N(0) = \left(\frac{\mathbb{1} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}\right)^{\otimes N}. \tag{15}$$

В настоящей постановке, где $\vec{n} = \vec{n}_{\rm L}$ задается в (11), это чистое состояние вида

$$\rho_N(0) = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \tag{16}$$

где $|\Psi\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N}$ и $|\psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|1\rangle + |-1\rangle)^{\rm T}$. Флуктуирующие граничные состояния $\rho_{\rm L,R}(N,0)$ (9) в этом факторизованном чистом состоянии такие же, как полуклассические граничные таргет-состояния (13) для всех N. Токов и корреляций между спинами на разных участках нет, что несколько напоминает состояние равновесия с бесконечной температурой. Отметим, однако, что стационарная матрица плотности (16) не соответствует равновесному состоянию цепочки Гейзенберга ни при какой температуре. Действительно, весьма примечательно, что, несмотря на диссипативное взаимодействие, существует чисто стационарное состояние с энтропией фон Неймана $S = 0$, которое резко контрастирует с максимально смешанным состоянием бесконечной температуры, которое имеет максимальную энтропию фон Неймана $S = N$ (см. [22]).

Ниже мы приводим новые точные результаты, касающиеся решения уравнения (4) для ненулевого угла кручения $\theta \in (0, \pi]$ и произвольной силой взаимодействия Γ. Для этого мы сначала рассмотрим АМП.

3. АНЗАЦ МАТРИЧНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Определим $p = i\Gamma^{-1}$. Решение $\rho^{\text{NESS}} \equiv \rho_N(\theta) = \tilde{\rho}_N(\theta)/Z_N(\theta)$ уравнения (4) записывается в виде [1], [2]

$$\tilde{\rho}_N(\theta) = S_N(p,\theta)S_N^\dagger(p,\theta), \qquad Z_N(\theta) = \mathrm{Tr}(S_N(p,\theta)S_N^\dagger(p,\theta)), \tag{17}$$

где мы восстановили зависимость НСС от Γ в правой части в терминах параметра p, который оказывается центральной величиной в АМП. Чтобы определить матрицу $S_N(p,\theta)$, мы должны ввести некоторые обозначения. Существует компромисс между простотой обозначений и ясностью определений. Так как при рассмотрении матричных произведений, произведений Кронекера и внутренних произведений в разных пространствах легко может возникать путаница, мы выбираем ясность за счет простоты обозначений. Более того, для большей ясности мы часто будем прямо указывать, в каком пространстве матрицы, которые мы строим таким образом, действуют как эндоморфизмы.

3.1. Физическое пространство. Отметим, что наше определение θ связано с определением из работы [1] заменой $\theta \to \pi - \theta$. Более того, операторы Линдблада (14) отличаются от операторов, рассмотренных в работе [1], циклической перестановкой, которая описывается унитарным преобразованием. С этой целью построим из матриц Паули (6) унитарную матрицу

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \tag{18}$$

которая выполняет циклическую перестановку матриц Паули, т.е. $U\sigma^\alpha U^\dagger = \sigma^{\alpha+1}$, $\alpha = 1,2,3 \pmod 3$.

Мы также определим

$$\mathbf{U} := U^{\otimes N}, \tag{19}$$

что является эндоморфизмом на пространстве $\mathfrak{P}$, который поднимает циклическую перестановку матриц Паули σ^α на локальные операторы σ_k^α.

3.2. Вспомогательное пространство. Далее мы вводим счетно бесконечномерное комплексное векторное пространство $\mathfrak{A}$ с каноническим базисом $\{|n\rangle, n \in \mathbb{N}_0\}$ и со стандартным скалярным произведением. Мы будем называть $\mathfrak{A}$ *вспомогательным пространством*.

Рассмотрим новую алгебру Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, определенную коммутационными соотношениями

$$[S^z, S^\pm] = \pm S^\pm, \qquad [S^+, S^-] = 2S^z. \tag{20}$$

Матрицы бесконечномерного представления $\Omega^z(p)$, $\Omega^\pm(p)$ алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ и единичная матрица I на $\mathfrak{A}$ имеют вид

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|, & \Omega^z(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} (p-n)|n\rangle\langle n|, \\ \Omega^+(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|n\rangle\langle n+1|, & \Omega^-(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2p-n)|n+1\rangle\langle n| \end{aligned} \tag{21}$$

для любого $p \in \mathbb{C}$. Заметим, что $\Omega^-(p) \neq (\Omega^+(p))^\dagger$.

Из $\Omega^-(p)$ мы строим для $\theta \in (0,\pi]$ когерентное состояние

$$|R(p,\theta)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^n\frac{(\Omega^-)^n}{n!}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^n\binom{2p}{n}|n\rangle, \tag{22}$$

где

$$\binom{2p}{n} := \frac{\Gamma(2p+1)}{n!\,\Gamma(2p+1-n)} = \frac{2p(2p-1)\ldots(2p-n+1)}{n!} \tag{23}$$

– обобщенный биномиальный коэффициент. Заметим, что для любого p

$$|R(p,\pi)\rangle = |0\rangle.$$

Когерентное состояние удовлетворяет соотношениям [1]

$$\begin{aligned}
\Omega^z|R(p,\theta)\rangle &= \left(p + \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,\Omega^-\right)|R(p,\theta)\rangle,\\
\Omega^+|R(p,\theta)\rangle &= -\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\left(2p + \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,\Omega^-\right)|R(p,\theta)\rangle.
\end{aligned} \tag{24}$$

Более того, поскольку $[d\operatorname{ctg}(\theta/2)/d\theta]^{-1} = 2\sin^2(\theta/2)$, имеем

$$\begin{aligned}
\Omega^-|R(p,\theta)\rangle &= -\frac{d}{d\operatorname{ctg}(\theta/2)}|R(p,\theta)\rangle \;=\; 2\sin^2\frac{\theta}{2}\frac{d}{d\theta}|R(p,\theta)\rangle,\\
\Omega^+|R(p,\theta)\rangle &= -\left(2p\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + 2\cos^2\frac{\theta}{2}\frac{d}{d\theta}\right)|R(p,\theta)\rangle,\\
\Omega^z|R(p,\theta)\rangle &= \left(p + \sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)|R(p,\theta)\rangle.
\end{aligned} \tag{25}$$

3.3. Составные пространства.

3.3.1. *Одно вспомогательное пространство.* Определим (2×2)-матрицы $\Omega(p)$, $\Omega^{\mathrm{T_P}}(p)$ с матричнозначными элементами

$$\Omega(p) := \sigma^z\otimes\Omega^z(p) + \sigma^+\otimes\Omega^+(p) + \sigma^-\otimes\Omega^-(p) = \begin{pmatrix}\Omega^z(p) & \Omega^+(p)\\ \Omega^-(p) & -\Omega^z(p)\end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\Omega^{\mathrm{T_P}}(p) := \sigma^z\otimes\Omega^z(p) + \sigma^-\otimes\Omega^+(p) + \sigma^+\otimes\Omega^-(p) = \begin{pmatrix}\Omega^z(p) & \Omega^-(p)\\ \Omega^+(p) & -\Omega^z(p)\end{pmatrix}, \tag{27}$$

которые по определению произведения Кронекера являются эндоморфизмами на составном пространстве $\mathbb{C}^2\otimes\mathfrak{A}$. В определении (27) мы ввели надстрочный индекс $\mathrm{T_P}$, чтобы обозначить транспозицию на физическом пространстве $\mathfrak{P}$ (для одного узла в данном случае).

Мы также представим произведение Кронекера $\otimes_{\mathrm{P}}$ как

$$(\sigma^\alpha\otimes\Omega^\beta(p))\otimes_{\mathrm{P}}(\sigma^{\alpha'}\otimes\Omega^{\beta'}(p')) := \sigma^\alpha\otimes\sigma^{\alpha'}\otimes\Omega^\beta(p)\Omega^{\beta'}(p') = \sigma_1^\alpha\sigma_2^{\alpha'}\otimes\Omega^\beta(p)\Omega^{\beta'}(p'), \tag{28}$$

которое тензорирует только матрицы, действующие на $\mathbb{C}^2$, и, следовательно, определяет эндоморфизм на $\mathbb{C}^4\otimes\mathfrak{A}$. Во втором равенстве мы использовали формулу (7), что позволяет написать первое произведение Кронекера как обычное матричное произведение. Другими словами, внутри скобок в левой части и всюду в правой части определения (28) символ тензорного произведения $\otimes$ обозначает обычное произведение Кронекера, в отличие от символа $\otimes_{\mathrm{P}}$, который тензорирует только первый член произведения Кронекера матриц вида $a \otimes A$, где a действует на $\mathbb{C}^2$ и A действует на пространстве $\mathfrak{A}$. Произведение $\Omega^{\beta}(p)\Omega^{\beta'}(p')$ – обычное матричное произведение. Для иллюстрации мы выпишем явно:

$$\Omega(p) \otimes_{\mathrm{P}} \Omega(p) = \begin{pmatrix} (\Omega^z)^2 & \Omega^z\Omega^+ & \Omega^+\Omega^z & (\Omega^+)^2 \\ \Omega^z\Omega^- & -(\Omega^z)^2 & \Omega^+\Omega^- & -\Omega^+\Omega^z \\ \Omega^-\Omega^z & \Omega^-\Omega^+ & -(\Omega^z)^2 & -\Omega^z\Omega^+ \\ (\Omega^-)^2 & -\Omega^-\Omega^z & -\Omega^z\Omega^- & (\Omega^z)^2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Итерация тензорирования пространства $\mathbb{C}^2$ дает

$$\Omega_N(p) := \Bigl(\Omega(p)\Bigr)^{\otimes_{\mathrm{P}} N} = \sum_{\alpha_1 \in \{\pm, z\}} \dots \sum_{\alpha_N \in \{\pm, z\}} \sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_N^{\alpha_N} \otimes \Omega^{\alpha_1}(p) \dots \Omega^{\alpha_N}(p). \tag{30}$$

Таким образом, соотношение (30) может рассматриваться как квадратная матрица размерности 2^N, матричнозначные элементы которой суть N-кратные матричные произведения матриц представления $\Omega^{\alpha}(p)$ и которая поэтому определяет эндоморфизм на составном пространстве $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{A}$. Аналогично определяем $(\Omega^{\mathrm{T_P}}(p))^{\otimes_{\mathrm{P}} N}$. Заметим, что $(\Omega^{\mathrm{T_P}}(p))^{\otimes_{\mathrm{P}} N} = \Omega_N^{\mathrm{T_P}}(p)$.

Теперь определим

$$\widetilde{\Omega}(p) := (U \otimes I)\Omega(p) = \sum_{\alpha \in \{\pm, z\}} (U\sigma^{\alpha}) \otimes \Omega^{\alpha}(p), \qquad \widetilde{\Omega}_N(p) := (\widetilde{\Omega}(p))^{\otimes_{\mathrm{P}} N} \tag{31}$$

и

$$|R(\theta, p)\rangle_A := \mathbf{1} \otimes |R(\theta, p)\rangle, \qquad {}_A\langle 0| := \mathbf{1} \otimes \langle 0|. \tag{32}$$

Эти определения позволяют записать матрицу $S_N(p, \theta)$, появляющуюся в (17), как

$$S_N(p, \theta) = {}_A\langle 0|\widetilde{\Omega}_N(p)|R(\theta, p)\rangle_A = \mathbf{U}\, {}_A\langle 0|\Omega_N(p)|R(p, \theta)\rangle_A. \tag{33}$$

Здесь скалярное произведение ${}_A\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ определяется только на вспомогательном пространстве $\mathfrak{A}$. Следовательно, $S_N(p, \theta)$ – квадратная матрица,

$$S_N(p, \theta) = \mathbf{U} \sum_{\alpha_1 \in \{\pm, z\}} \dots \sum_{\alpha_N \in \{\pm, z\}} \sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_N^{\alpha_N} \langle 0|\Omega^{\alpha_1}(p) \dots \Omega^{\alpha_N}(p)|R(p, \theta)\rangle, \tag{34}$$

с матричными элементами $\langle 0|\widetilde{\Omega}^{\alpha_1}(p) \cdots \widetilde{\Omega}^{\alpha_N}(p)|R(\theta, p)\rangle \in \mathbb{C}$, и, таким образом, она определяет эндоморфизм на физическом пространстве $\mathfrak{P}$.

С учетом

$$\widetilde{\Omega}^{\dagger_{\mathrm{P}}}(p) := \Omega^{\mathrm{T_P}}(p^*)(U^{\dagger} \otimes I), \qquad \widetilde{\Omega}_N^{\dagger_{\mathrm{P}}}(p) := (\widetilde{\Omega}^{\dagger_{\mathrm{P}}}(p))^{\otimes_{\mathrm{P}} N} \tag{35}$$

это дает

$$\begin{aligned} S_N^{\dagger}(p, \theta) &= {}_A\langle 0|\widetilde{\Omega}_N^{\dagger_{\mathrm{P}}}(p)|R(\theta, p^*)\rangle_A = {}_A\langle 0|(\Omega^{\mathrm{T_P}})^{\otimes_{\mathrm{P}} N}(p^*)|R(\theta, p^*)\rangle_A \mathbf{U}^{\dagger} = \\ &= \sum_{\alpha_1 \in \{\pm, z\}} \dots \sum_{\alpha_N \in \{\pm, z\}} \sigma_1^{\alpha_1 \dagger} \dots \sigma_N^{\alpha_N \dagger} \langle 0|\Omega^{\alpha_1}(p^*) \dots \Omega^{\alpha_N}(p^*)|R(\theta, p^*)\rangle \mathbf{U}^{\dagger}. \end{aligned} \tag{36}$$

Матрицы (33) и (36) определяют стационарную матрицу плотности (17). Стационарность была доказана в работе [1].

3.3.2. *Удвоенное вспомогательное пространство.* Для анализа матрицы плотности удобно удвоить вспомогательное пространство и определить базисные векторы и когерентные состояния

$$|n,m\rangle := |n\rangle \otimes |m\rangle \in \mathfrak{A}^2, \qquad |R(\theta,p),R(\theta',p')\rangle := |R(\theta,p)\rangle \otimes |R(\theta',p')\rangle \in \mathfrak{A}^2, \quad (37)$$

а также матрицы представления

$$S^\alpha(p) := \Omega^\alpha(p) \otimes I, \qquad T^\alpha(p) := I \otimes \Omega^\alpha(p), \quad (38)$$

которые являются эндоморфизмами на пространстве $\mathfrak{A}^2$. Матрицы $T^{\pm,z}$ также удовлетворяют коммутационным соотношениям (20) и коммутируют со всеми операторами $S^{\pm,z}$, поскольку они действуют на разные вспомогательные пространства.

Представление расширенного пространства $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{A}^2$ мы можем определить по аналогии с представлением (28) произведения Кронекера $\otimes_A$ выражением

$$(\sigma^\alpha \otimes \Omega^\beta(p)) \otimes_A (\sigma^{\alpha'} \otimes \Omega^{\beta'}(p')) := \sigma^\alpha\sigma^{\alpha'} \otimes \Omega^\beta(p) \otimes \Omega^{\beta'}(p') = \sigma^\alpha\sigma^{\alpha'} \otimes S^\beta(p) T^{\beta'}(p'), \quad (39)$$

которое определяет эндоморфизм на $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{A}^2$. Внутри скобок в левой части определения и везде в правой части символы тензорного произведения $\otimes$ обозначают обычное произведение Кронекера, в отличие от символа $\otimes_A$, который тензорирует только ту часть произведения Кронекера, которая действует на $\mathfrak{A}$. Произведение $\sigma^\alpha\sigma^{\alpha'}$ – это обычное матричное произведение. Во втором равенстве мы использовали (38), что позволяет написать произведение Кронекера как обычное матричное произведение.

Для иллюстрации явно выпишем следующий пример:

$$\begin{aligned}\Omega(p) \otimes_A \Omega^{\mathrm{T_P}}(p') &= \sum_{\alpha\in\{\pm,z\}} \sum_{\alpha'\in\{\pm,z\}} \sigma^\alpha \sigma^{\alpha' T} \otimes \Omega^\alpha(p) \otimes \Omega^{\alpha'}(p') = \\ &= \begin{pmatrix} S^z(p)T^z(p') + S^+(p)T^+(p') & S^z(p)T^-(p') - S^+(p)T^z(p') \\ S^-(p)T^z(p') - S^z(p)\Omega^+(p') & S^-(p)T^-(p') + S^z(p)T^z(p') \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

Формально это обычное матричное произведение (2×2)-матриц Ω и $\Omega^{\mathrm{T_P}}$, но его матричные элементы являются произведениями Кронекера во вспомогательном пространстве $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$. С матрицами

$$\overline{\Omega}(p) = \begin{pmatrix} S^z(p) & S^+(p) \\ S^-(p) & -S^z(p) \end{pmatrix}, \qquad \overline{\overline{\Omega}}(p) = \begin{pmatrix} T^z(p) & T^-(p) \\ T^+(p) & -T^z(p) \end{pmatrix}, \quad (41)$$

которые являются эндоморфизмами на $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{A}^2$ (в отличие от матрицы $\Omega(p)$, являющейся эндоморфизмом на $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{A}$), можно записать

$$\Omega(p) \otimes_A \Omega^{\mathrm{T_P}}(p') = \overline{\Omega}(p)\overline{\overline{\Omega}}(p') = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{3} \sigma^\alpha \otimes A_\alpha(p,p'), \quad (42)$$

$A_+(p,p') = S^z(p)T^-(p') - S^+(p)T^z(p')$ и $A_-(p,p') = S^-(p)T^z(p') - S^z(p)T^+(p')$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} A_0(p,p') &= 2S^z(p)T^z(p') + S^+(p)T^+(p') + S^-(p)T^-(p'), \\ A_1(p,p') &= S^z(p)(T^-(p') - T^+(p')) + (S^-(p) - S^+(p))T^z(p'), \\ A_2(p,p') &= i(S^z(p)(T^+(p') + T^-(p')) - (S^+(p) + S^-(p))T^z(p')), \\ A_3(p,p') &= S^+(p)T^+(p') - S^-(p)T^-(p'). \end{aligned} \tag{43}$$

Применяя преобразование U на $\mathbb{C}^2$, мы вводим

$$\mathbf{\Omega}(p,p') := (U \otimes I \otimes I)\overline{\Omega}(p)\overline{\overline{\Omega}}(p')(U^\dagger \otimes I \otimes I). \tag{44}$$

В терминах разложения (42) имеем

$$\mathbf{\Omega}(p,p') = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{3} \sigma^\alpha \otimes B_\alpha(p,p'), \tag{45}$$

где

$$\begin{aligned} B_0(p,p') &= 2S^z(p)T^z(p') + S^+(p)T^+(p') + S^-(p)T^-(p'), \\ B_1(p,p') &= S^+(p)T^+(p') - S^-(p)T^-(p'), \\ B_2(p,p') &= (S^-(p) - S^+(p))T^z(p') + S^z(p)(T^-(p') - T^+(p')), \\ B_3(p,p') &= i(S^z(p)(T^+(p') + T^-(p')) - (S^+(p) + S^-(p))T^z(p')). \end{aligned} \tag{46}$$

Наконец, определим удвоенное когерентное состояние

$$|R(\theta,p), R_\theta(p')\rangle_A := \mathbf{1} \otimes |R(\theta,p), R_\theta(p')\rangle, \qquad {}_A\langle 0,0| := \mathbf{1} \otimes \langle 0,0|, \tag{47}$$

и оператор

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_N(p,p') &:= \mathbf{\Omega}^{\otimes_{\mathrm{P}} N}(p,p') = \\ &= \frac{1}{2^N}\sum_{\alpha_1=0}^{3} \cdots \sum_{\alpha_N=0}^{3} \sigma_1^{\alpha_1} \ldots \sigma_N^{\alpha_N} \otimes B_{\alpha_1}(p,p') \ldots B_{\alpha_N}(p,p'), \end{aligned} \tag{48}$$

который является эндоморфизмом пространства $\mathfrak{V} = \mathfrak{P} \otimes \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$.

Теперь рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} &\langle 0|\Omega^{\alpha_1}(p)\ldots\Omega^{\alpha_N}(p)|R(\theta,p)\rangle\,\langle 0|\Omega^{\alpha_1}(p')\ldots\Omega^{\alpha_N}(p')|R(\theta',p')\rangle = \\ &= \langle 0,0|S^{\alpha_1}(p)T^{\alpha_1}(p')\ldots S^{\alpha_N}(p)T^{\alpha_N}(p')|R(\theta,p), R(\theta',p')\rangle, \end{aligned}$$

которое следует из мультилинейности произведения Кронекера и того, что по построению $[S^\alpha(p), T^\beta(p')] = 0$ для всех p, p'. Из (33) и (36) можно найти, что

$$\chi_N(p,p',\theta,\theta') := {}_A\langle 0,0|\mathbf{\Omega}_N(p,p')|R(\theta,p), R(\theta',p')\rangle_A \tag{49}$$

– эндоморфизм на пространстве $\mathfrak{P}$. Как показано ниже, $\chi_N(p,p',\theta,\theta')$ обеспечивает удобный способ записи матрицы плотности (17).

3.4. НСС в компактной форме матричного произведения. Пусть $\theta = \theta'$ и $p' = p^*$. Поскольку переменная $p = i\Gamma^{-1}$ чисто мнимая, имеем

$$S_N^\dagger(p,\theta) = {}_A\langle 0|\widetilde{\Omega}^{\otimes N}(-p)|R(\theta,-p)\rangle_A \tag{50}$$

и

$$\begin{aligned}|R(\theta,p),R_\theta(p^*)\rangle &= |R(\theta,p),R(\theta,-p)\rangle = \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}(-1)^{n+m}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^{n+m}\binom{2p}{n}\binom{-2p}{m}|n,m\rangle.\end{aligned} \tag{51}$$

С учетом (49) ненормированное НСС модели (1), (14) может быть записано в форме

$$\tilde{\rho}_N(\theta) = \chi_N(i\Gamma^{-1},-i\Gamma^{-1},\theta,\theta). \tag{52}$$

Упрощая обозначения, мы теперь опускаем зависимость от p и определяем

$$S^{\pm,z} := S^{\pm,z}(p), \qquad T^{\pm,z} := T^{\pm,z}(-p), \qquad B_\alpha := B_\alpha(p,-p) \tag{53}$$

и

$$|\theta,\bar{\theta}\rangle := |R(\theta,p),R(\theta,-p)\rangle. \tag{54}$$

С этими обозначениями имеем

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\{0,x,y,z\}}\sigma^\alpha B^\alpha, \tag{55}$$

и можно переписать (52) в компактной форме

$$\tilde{\rho}_N(\theta) = {}_A\langle 0,0|\mathbf{\Omega}^{\otimes_P N}|\theta,\bar{\theta}\rangle_A. \tag{56}$$

Это представление матрицы приведенной плотности создает основу для вычисления наблюдаемых.

4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ B-МАТРИЦЫ

В принципе, любая наблюдаемая может быть вычислена исходя из когерентных состояний $|\theta,\bar{\theta}\rangle$, определенных в (22), с учетом (37) и (47) и явных представлений матриц $S^{\pm,z}$ и $T^{\pm,z}$, определенных в (21), (38). Однако на практике это сложно. Вместо этого используются алгебраические соотношения

$$\begin{aligned}&[S^+,S^-] = 2S^z, \qquad [S^z,S^\pm] = \pm S^\pm,\\ &[T^+,T^-] = 2T^z, \qquad [T^z,T^\pm] = \pm T^\pm,\\ &[S^\alpha,T^\beta] = 0\end{aligned} \tag{57}$$

из $\mathfrak{sl}(2)\times\mathfrak{sl}(2)$, которым удовлетворяют матрицы $S^{\pm,z}$ и $T^{\pm,z}$. Из них можно генерировать рекуррентные соотношения для локальных средних [1], [2], [4], [5]. Чтобы получить новые результаты, мы вычисляем различные явные соотношения, на важность которых мы до сих пор не обращали внимания.

4.1. Определения. Удобно ввести

$$\begin{aligned} S_1 &:= \frac{1}{2}(S^+ + S^-), \qquad S_2 := \frac{1}{2i}(S^+ - S^-), \qquad S_3 := S^z, \\ T_1 &:= \frac{1}{2}(T^+ + T^-), \qquad T_2 := \frac{1}{2i}(T^+ - T^-), \qquad T_3 := T^z \end{aligned} \tag{58}$$

и $SU(2)$-операторы Казимира

$$\begin{aligned} C_S &= S^+S^- + (S^z)^2 - S^z = (S_1)^2 + (S_2)^2 + (S_3)^2, \\ C_T &= T^+T^- + (T^z)^2 - T^z = (T_1)^2 + (T_2)^2 + (T_3)^2. \end{aligned} \tag{59}$$

Они удовлетворяют альтернативной форме коммутационных соотношений (57):

$$[S_\alpha, S_\beta] = i\sum_{\gamma=1}^{3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma, \qquad [T_\alpha, T_\beta] = i\sum_{\gamma=1}^{3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma, \tag{60}$$

$$[S_\alpha, T_\beta] = 0, \qquad [C_S, S_\alpha] = [C_T, T_\alpha] = 0. \tag{61}$$

Отметим также смешанные коммутаторы $[S^\pm, S_1] = \pm S^z$, $[S^\pm, S_2] = iS^z$, аналогичные можно записать для T^α. В представлении, определяемом в (21), (38), имеем

$$C_S = p(p+1) I \otimes I, \qquad C_T = p(p-1) I \otimes I. \tag{62}$$

Напомним, что $p = i/\Gamma$.

Согласно определению (53) имеем

$$\begin{aligned} B_0 &= 2S^zT^z + S^+T^+ + S^-T^- = 2(S_3T_3 + S_1T_1 - S_2T_2), \\ B_1 &= S^+T^+ - S^-T^- = 2i(S_1T_2 + S_2T_1), \\ B_2 &= (S^- - S^+)T^z + S^z(T^- - T^+) = -2i(S_2T_3 + S_3T_2), \\ B_3 &= i(S^z(T^+ + T^-) - (S^+ + S^-)T^z) = 2i(S_3T_1 - S_1T_3). \end{aligned} \tag{63}$$

4.2. Коммутаторы B_α с S_μ и T_μ. Выражаем все коммутаторы в терминах S_μ и T_μ вместо $S^{\pm,z}$ и $T^{\pm,z}$.

А. Коммутаторы B_0. Используя коммутационные соотношения (20) для $SU(2)$, можно прямо показать, что

$$\begin{aligned} [B_0, S_1] &= -B_2, \qquad [B_0, T_1] = -B_2, \\ [B_0, S_2] &= B_3, \qquad [B_0, T_2] = -B_3, \\ [B_0, S_3] &= -B_1, \qquad [B_0, T_3] = -B_1. \end{aligned} \tag{64}$$

Следовательно,

$$[B_0, (S_1 - T_1)] = [B_0, (S_2 + T_2)] = [B_0, (S_3 - T_3)] = 0 \tag{65}$$

и

$$[B_0, (S_1 + T_1)] = -2B_2, \qquad [B_0, (S_2 - T_2)] = 2B_3, \qquad [B_0, (S_3 + T_3)] = -2B_1. \tag{66}$$

Б. Коммутаторы B_1. Имеем

$$\begin{aligned} &[B_1, S_1] = 2S_3T_1, \qquad [B_1, T_1] = 2S_1T_3, \\ &[B_1, S_2] = -2S_3T_2, \qquad [B_1, T_2] = -2S_2T_3, \\ &[B_1, S_3] = -2(S_1T_1 - S_2T_2) = [B_1, T_3]. \end{aligned} \tag{67}$$

Следовательно,

$$[B_1, (S_1 - T_1)] = -iB_3, \qquad [B_1, (S_2 + T_2)] = -iB_2, \qquad [B_1, (S_3 - T_3)] = 0. \tag{68}$$

В. Коммутаторы B_2. Имеем

$$\begin{aligned} &[B_2, S_1] = 2(S_2T_2 - S_3T_3) = [B_2, T_1], \\ &[B_2, S_2] = -2S_1T_2, \qquad [B_2, T_2] = -2S_2T_1, \\ &[B_2, S_3] = 2S_1T_3, \qquad [B_2, T_3] = 2S_3T_1. \end{aligned} \tag{69}$$

Следовательно,

$$[B_2, (S_1 - T_1)] = 0, \qquad [B_2, (S_2 + T_2)] = iB_1, \qquad [B_2, (S_3 - T_3)] = iB_3. \tag{70}$$

Г. Коммутаторы B_3. Имеем

$$\begin{aligned} &[B_3, S_1] = -2S_2T_1, \qquad [B_3, T_1] = 2S_1T_2, \\ &[B_3, S_2] = 2S_1T_1 + S_3T_3 = -[B_3, T_2], \\ &[B_3, S_3] = -2S_2T_3, \qquad [B_3, T_3] = 2S_3T_2. \end{aligned} \tag{71}$$

Следовательно,

$$[B_3, (S_1 - T_1)] = iB_1, \qquad [B_3, (S_2 + T_2)] = 0, \qquad [B_3, (S_3 - T_3)] = -iB_2. \tag{72}$$

4.3. Коммутаторы B_α с B_β. Используя общее коммутационное соотношение для произведений $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ полученные ранее коммутационные соотношения можно использовать для получения коммутаторов в виде $[B_\alpha, B_\beta]$. Несколько длинные, но простые вычисления дают

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[B_0, B_1] &= B_1 + B_0(T_3 + S_3) - 2S_3C_T - 2C_ST_3 = \\ &= B_1 + (B_0 - p^2)(T_3 + S_3) + 2p(S_3 - T_3) = \\ &= -B_1 + (T_3 + S_3)B_0 - 2S_3C_T - 2C_ST_3 = \\ &= -B_1 + (T_3 + S_3)(B_0 - p^2) + 2p(S_3 - T_3). \end{aligned} \tag{73}$$

Аналогичные соотношения найдены для коммутаторов с B_2 и B_3. Подчеркнем, что выражения в первой и третьей строках (73) и соответствующие им в коммутаторах B_0 с $B_{2,3}$ действительны на абстрактном алгебраическом уровне, определяемом формулой (60), в то время как выражения во второй и четвертой строках применяются только к заданному представлению с параметром s, в котором значение оператора Казимира $s(s+1)$.

Таким же образом доказываются соотношения

$$[B_1, B_2] = 2iB_0(S_2 + T_2), \tag{74}$$
$$[B_2, B_3] = 2iB_0(T_3 - S_3), \tag{75}$$
$$[B_3, B_1] = 2iB_0(S_1 - T_1) \tag{76}$$

и кубические соотношения

$$[B_0[B_0, B_i]] + 2\{B_0, B_i\} = 4(C_S + C_T)B_i, \qquad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{77}$$

С учетом $p = i/\Gamma$ находим формулу

$$[B_0[B_0, B_i]] + 2\{B_0, B_i\} = -\frac{8}{\Gamma^2}B_i, \qquad i \in \{1, 2, 3\}, \tag{78}$$

для матриц представления, определенного в (21), (38). Соотношения (74)–(78) были приведены без доказательства в работе [2][1)].

5. ГРАНИЧНЫЕ СПИНЫ И ЛОКАЛЬНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ НАМАГНИЧЕННОСТИ ТОКА

5.1. Нормирующий множитель как простой матричный элемент. Сначала мы покажем, как стационарные токи следуют из неравновесной статистической суммы $Z_N(\theta)$ для конечных N. В терминах B-операторов нормирующие множители принимают вид

$$\begin{aligned} Z_N(\theta) &= \operatorname{Tr}_A\langle 0, 0|\mathbf{\Omega}^{\otimes_{\mathrm{P}} N}|\theta, \bar{\theta}\rangle_A = \langle 0, 0|\operatorname{Tr}(\mathbf{\Omega}^{\otimes_{\mathrm{P}} N})|\theta, \bar{\theta}\rangle = \\ &= \langle 0, 0|(\operatorname{Tr}((\sigma^0 \otimes I \otimes I\mathbf{\Omega})^{\otimes_{\mathrm{P}} N})|\theta, \bar{\theta}\rangle = \langle 0, 0|B_0^N|\theta, \bar{\theta}\rangle. \end{aligned} \tag{79}$$

Поскольку оператор B_0 меняет оба квантовых числа $\langle k, l|$ одновременно на одинаковую величину, мы можем работать на одном вспомогательном пространстве $\mathfrak{B}$, натянутом на базисные векторы $|n\rangle\rangle := |n\rangle \otimes |n\rangle$ пространства $\mathfrak{A}^2$ и определить

$$C := \sum_{n=0}^{\infty}\bigl(2(n^2 - p^2)|n\rangle\rangle\langle\langle n| + (n+1)^2|n\rangle\rangle\langle\langle n+1| + (n^2 - 4p^2)|n+1\rangle\rangle\langle\langle n|\bigr), \tag{80}$$

$$|\theta\rangle\rangle := \sum_{n=0}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^{2n}\binom{2p}{n}\binom{-2p}{n}|n\rangle\rangle. \tag{81}$$

Таким образом, мы приходим к выражению

$$Z_N(\theta) = \langle\langle 0|C^N|\theta\rangle\rangle \tag{82}$$

для неравновесной статистической суммы.

1) Используя компьютерную алгебру, Прозен [4] получил для конкретного бесконечномерного представления $SU(2)$-генераторы, отличные от нашего соотношения (78), но не абстрактные коммутационные соотношения (77), которые чисто алгебраически следуют из (60).

Из (80) можно получить

$$C|n\rangle\rangle = \begin{cases} 2(n^2+\Gamma^{-2})|n\rangle\rangle + n^2|n-1\rangle\rangle + (n^2+4\Gamma^{-2})|n+1\rangle\rangle, & n \geqslant 1, \\ +2\Gamma^{-2}|0\rangle\rangle + 4\Gamma^{-2}|1\rangle\rangle, & n=0, \end{cases} \tag{83}$$

$$\langle\langle n|C = \begin{cases} 2(n^2+\Gamma^{-2})\langle\langle n| + (n+1)^2\langle n+1| + ((n-1)^2+4\Gamma^{-2})\langle\langle n-1|, & n \geqslant 1, \\ +2\Gamma^{-2}\langle\langle 0| + \langle 1|, & n=0. \end{cases} \tag{84}$$

Запишем матрицу C в явном виде:

$$C = \begin{pmatrix} 2\Gamma^{-2} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4\Gamma^{-2} & 2+2\Gamma^{-2} & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1+4\Gamma^{-2} & 8+2\Gamma^{-2} & 9 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 4+4\Gamma^{-2} & 18+2\Gamma^{-2} & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9+4\Gamma^{-2} & 32+2\Gamma^{-2} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{85}$$

Также отметим, что

$$a_n := \binom{2p}{n}\binom{-2p}{n} = \frac{(4\Gamma^{-2})(1+4\Gamma^{-2})(4+4\Gamma^{-2})\dots((n-1)^2+4\Gamma^{-2})}{(n!)^2}. \tag{86}$$

Этот коэффициент удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$a_{n+1} = \frac{n^2+4\Gamma^{-2}}{(n+1)^2}\, a_n. \tag{87}$$

Приведенные соотношения позволяют получить дифференциальное рекуррентное соотношение для нормировки. При $z = \operatorname{ctg}^2(\theta/2)$ можно получить из (80), (81) и (87)

$$\begin{aligned} C|\theta\rangle\rangle &= \left[(2+z^{-1}+z)\left(z\frac{d}{dz}\right)^2 + 2\Gamma^{-2}(1+2z)\right]|\theta\rangle\rangle = \\ &= \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta} + 2\Gamma^{-2}\left(1+2\,\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right]|\theta\rangle\rangle. \end{aligned} \tag{88}$$

Получаем соотношение

$$Z_N(\theta) = \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta} + 2\Gamma^{-2}\left(1+2\,\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right]Z_{N-1}(\theta) \tag{89}$$

с начальным условием $Z_0 = 1$.

5.2. Действие S_μ и T_μ во вспомогательном подпространстве $\mathfrak{B}$. Из (25) находим

$$\begin{aligned} (S_1+T_1)|\theta\rangle\rangle &= -\cos\theta\frac{d}{d\theta}\,|\theta\rangle\rangle, & (S_1-T_1)|\theta\rangle\rangle &= -2i\Gamma^{-1}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,|\theta\rangle\rangle, \\ (S_2+T_2)|\theta\rangle\rangle &= i\frac{d}{d\theta}\,|\theta\rangle\rangle, & (S_2-T_2)|\theta\rangle\rangle &= -2\Gamma^{-1}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,|\theta\rangle\rangle, \\ (S_3+T_3)|\theta\rangle\rangle &= \sin\theta\frac{d}{d\theta}\,|\theta\rangle\rangle, & (S_3-T_3)|\theta\rangle\rangle &= 2i\Gamma^{-1}\,|\theta\rangle\rangle. \end{aligned} \tag{90}$$

Эти формулы необходимы для вычисления токов и корреляционных функций. Также отметим, что

$$\langle\!\langle 0|(S_3 + T_3) = 0, \qquad \langle\!\langle 0|(S_3 - T_3) = 2i\Gamma^{-1}\langle\!\langle 0| \tag{91}$$

и $\langle\!\langle 0|S^- = \langle\!\langle 0|T^- = 0$.

5.3. Токи намагничивания в терминах $Z_N(\theta)$. Инвариантность гамильтониана Гейзенберга H (10) относительно вращения в пространстве $\mathbb{R}^3$ проявляется в симметрии $[H, S^\alpha] = 0$ под действием алгебры Ли (20) с матрицами представления

$$S^\alpha = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^\alpha. \tag{92}$$

Эти конечномерные матрицы представления не следует путать с бесконечномерными представлениями, определенными в (21).

Таким образом, компоненты спина локально сохраняются с соответствующими локально постоянными токами j_k^α, определяемыми действием присоединенного генератора

$$\mathcal{L}^\dagger(\sigma_k^\alpha) = -i[H, \sigma_k^\alpha] + 4\Gamma \sum_{j=1,N} \left(L_j^\dagger \sigma_k^\alpha L_j - \frac{1}{2}\{\sigma_k^\alpha, L_j^\dagger L_j\} \right) = j_{k-1}^\alpha - j_k^\alpha, \tag{93}$$

который дает

$$\vec{j}_k = 2\vec{\sigma}_k \times \vec{\sigma}_{k+1}, \qquad 1 \leqslant k < N, \tag{94}$$

и

$$\vec{j}_0 = 4\Gamma\left(L_1^\dagger \vec{\sigma}_1 L_1 - \frac{1}{2}\{\vec{\sigma}_1, L_1^\dagger L_1\} \right), \qquad \vec{j}_N = -4\Gamma\left(L_N^\dagger \vec{\sigma}_N L_N - \frac{1}{2}\{\vec{\sigma}_N, L_N^\dagger L_N\} \right). \tag{95}$$

Запишем также компоненты

$$j_k^\alpha = 2\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_k^\beta \sigma_{k+1}^\gamma, \qquad 1 \leqslant k < N, \tag{96}$$

для операторов объемного тока и

$$j_0^1 = 4\Gamma(\mathbb{1} - \sigma_1^1), \qquad j_0^2 = -2\Gamma\sigma_1^2, \qquad j_0^3 = -2\Gamma\sigma_1^3, \tag{97}$$

$$j_N^1 = -4\Gamma\left(\cos\theta - \frac{1+\cos^2\theta}{2}\,\sigma_N^1 - \frac{\cos\theta\sin\theta}{2}\,\sigma_N^2 \right), \tag{98}$$

$$j_N^2 = -4\Gamma\left(\sin\theta - \frac{\cos\theta\sin\theta}{2}\,\sigma_N^1 - \frac{1+\sin^2\theta}{2}\,\sigma_N^2 \right), \tag{99}$$

$$j_N^3 = 2\Gamma\sigma_N^3 \tag{100}$$

для операторов граничного тока.

В устойчивом состоянии средние значения токов не зависят от положения, что закодировано в АМП следующим образом. Из соотношения (96) мы находим, что стационарные токи намагниченности задаются формулой

$$j^{\alpha}(N,\theta) := \mathrm{Tr}(j_k^{\alpha}\rho_N(\theta)) = 2\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\langle\!\langle 0|B_0^{k-1}B_\beta B_\gamma B_0^{N-k-1})|\theta\rangle\!\rangle}{Z_N(\theta)}. \tag{101}$$

Заметим, что в правой части (101) есть коммутаторы вида $[B_\beta, B_\gamma]$.

Чтобы оценить $j^{\alpha}(N,\theta)$, мы используем формулы (74)–(76) и равенства (88), чтобы перенести действие $[B_\beta, B_\gamma]$ на когерентное состояние $|\theta\rangle\!\rangle$ (81). Тогда векторные соотношения (90) дают

$$j^1(N,\theta) = \frac{8}{\Gamma}\frac{Z_{N-1}(\theta)}{Z_N(\theta)}, \tag{102}$$

$$j^2(N,\theta) = -\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}j^1(N,\theta), \tag{103}$$

$$j^3(N,\theta) = -\frac{4}{Z_N(\theta)}\frac{d}{d\theta}Z_{N-1}(\theta). \tag{104}$$

Таким образом, все компоненты стационарного тока могут быть вычислены из нормировочного множителя $Z_N(\theta)$. В старшем порядке по $1/N$ находим, что для любого фиксированного Γ [2]

$$\frac{Z_{N-1}(\theta)}{Z_N(\theta)} = \frac{\theta^2}{4N^2}, \qquad 0<\theta<\pi, \tag{105}$$

откуда получаем поведение при больших N

$$Z_N \sim (N!)^2\left(\frac{2}{\theta}\right)^{2N} \tag{106}$$

и, следовательно,

$$j^1(N,\theta) = \frac{1}{\Gamma}\frac{2\theta^2}{N^2}, \qquad j^2(N,\theta) = -\frac{1}{\Gamma}\frac{2\theta^2}{N^2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}, \qquad j^3(N,\theta) = \frac{2\theta}{N}. \tag{107}$$

Заметим, что токи $j^{1,2}(N,\theta)$ в плоскости поляризации являются субдиффузионными и равны нулю в пределе Зенона $\Gamma\to\infty$ сильной связи, а перпендикулярный ток $j^3(N,\theta)$ является диффузионным и остается конечным.

В случае антипараллельного выравнивания $\theta=\pi$ система инвариантна относительно вращений вокруг оси x. Как следствие, стационарная матрица плотности имеет симметрию относительно переворота спина $\rho_N(\pi) = Q_1\rho_N(\pi)Q_1$ (12). Как указывалось в работах [23], [24], операторы j_k^2 и j_k^3 меняют знак под действием этой симметрии и, следовательно, $j^2(N,\pi) = j^3(N,\pi) = 0$ для любых значений Γ. Однако, поскольку оператор j_k^1 четный относительно действия Q_1, его среднее $j^1(N,\pi)$ не обращается в нуль при конечной силе диссипации Γ и задается выражением (107) при $\theta=\pi$ [4].

5.4. Точные граничные состояния. Учитывая средние значения и граничные соотношения (97), (98), представим точную информацию о средних значениях $\vec{m}_{1,N}(N,\theta) := \mathrm{Tr}(\vec{\sigma}_{1,N}\rho_N(\theta))$ граничных спинов при наличии единой динамики объема. Мы вычисляем и обсуждаем чистоту $P_{\mathrm{L}}(N,\theta)$ граничных состояний $\rho_{\mathrm{L,R}}(N,\theta))$ (9), которые являются квадратом нормы Фробениуса $\rho_{\mathrm{L,R}}(N,\theta)$. Так как любая матрица плотности является эрмитовой, имеем

$$P_{\mathrm{L,R}}(N,\theta) := \mathrm{Tr}\,\rho^2_{\mathrm{L,R}}(N,\theta) = \frac{1}{2}(1 + |\vec{m}_{1,N}(N,\theta)|^2). \tag{108}$$

Мы также рассматриваем расстояние

$$d_{\mathrm{L,R}}(N,\theta) = \sqrt{\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{L,R}}(N,\theta) - \rho^{\mathrm{target}}_{\mathrm{L,R}})^2} \tag{109}$$

между граничными состояниями и локальными таргет-состояниями $\rho^{\mathrm{target}}_{\mathrm{L,R}}$ (13) граничных рассеивателей $\mathcal{D}_{1,N}$.

Рассмотрим сначала левый граничный узел 1. Из (97), (102)–(104) и (107) находим точные и асимптотические соотношения

$$\begin{aligned}
m^1_1(N,\theta) &= 1 - \frac{2}{\Gamma^2}\frac{Z_{N-1}(\theta)}{Z_N(\theta)} \;=\; 1 - \frac{\theta^2}{2\Gamma^2N^2} + o(N^{-2}),\\
m^2_1(N,\theta) &= \frac{4}{\Gamma^2}\frac{Z_{N-1}(\theta)}{Z_N(\theta)}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2} \;=\; \frac{\theta^2}{\Gamma^2N^2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2} + o(N^{-2}),\\
m^3_1(N,\theta) &= \frac{2}{\Gamma Z_N(\theta)}\frac{d}{d\theta}Z_{N-1}(\theta) \;=\; -\frac{\theta}{\Gamma N} + o(N^{-1}).
\end{aligned} \tag{110}$$

Это дает условие чистоты граничных состояний

$$P_{\mathrm{L}}(N,\theta) = \frac{1}{2}\biggl(1 + 1 - \frac{\theta^2}{\Gamma^2N^2} + \frac{\theta^2}{\Gamma^2N^2} + o(N^{-2})\biggr) = 1 + o(N^{-2}). \tag{111}$$

Примечательно, что вклады от субдиффузионного тока в плоскости $j^1(N,\theta)$ и доминирующий диффузионный перпендикулярный ток $j^3(N,\theta)$ компенсируют друг друга и оставляют граничное состояние чистым до порядков меньше, чем $1/N^2$.

По определению приведенной матрицы граничной плотности $\rho_{\mathrm{L}}(N,\theta)$ (9) имеем $\vec{m}_1(N,\theta) := \mathrm{Tr}(\vec{\sigma}_1\rho_{\mathrm{L}}(N,\theta))$. Следовательно для больших N левое граничное состояние задается как

$$\rho_{\mathrm{L}}(N,\theta) = \rho^{\mathrm{target}}_{\mathrm{L}} - \frac{1}{2}\biggl(\frac{\theta^2}{2\Gamma^2N^2}\sigma^1 - \frac{\theta^2}{\Gamma^2N^2}\sigma^2\,\mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{\Gamma N}\sigma^3\biggr) + o(N^{-1}), \tag{112}$$

где $\rho^{\mathrm{target}}_{\mathrm{L}}$ – локальное целевое состояние (13) левого рассеивателя $\mathcal{D}_1$. Таким образом, в ведущем порядке имеем

$$d_{\mathrm{L}}(N,\theta) = \sqrt{\mathrm{Tr}\bigl(\rho_{\mathrm{L,R}}(N,\theta) - \rho^{\mathrm{target}}_{\mathrm{L,R}}\bigr)^2} = \frac{\theta}{\Gamma N} + o(N^{-2}). \tag{113}$$

В пределе Зенона $\Gamma \to \infty$ расстояние обращается в нуль.

Для правого граничного состояния N находим из (98) точные соотношения

$$\begin{aligned} m_N^1(N,\theta) &= \cos\theta + \frac{1}{4\Gamma}\big((1+\sin^2\theta)j^1(N,\theta) - \cos\theta\sin\theta j^2(N,\theta)\big),\\ m_N^2(N,\theta) &= \sin\theta + \frac{1}{4\Gamma}\big((1+\cos^2\theta)j^2(N,\theta) - \cos\theta\sin\theta j^1(N,\theta)\big),\\ m_N^3(N,\theta) &= \frac{1}{2\Gamma}j^3(N,\theta). \end{aligned} \tag{114}$$

Поэтому имеем следующие асимптотические соотношения:

$$\begin{aligned} m_N^1(N,\theta) &= \cos\theta + \left(1+\sin^2\theta + \cos\theta\sin\theta\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)\frac{\theta^2}{2\Gamma^2N^2} + o(N^{-2}),\\ m_N^2(N,\theta) &= \sin\theta - \left((1+\cos^2\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + \cos\theta\sin\theta\right)\frac{\theta^2}{2\Gamma^2N^2} + o(N^{-2}),\\ m_N^3(N,\theta) &= \frac{\theta}{\Gamma N} + o(N^{-1}). \end{aligned} \tag{115}$$

Для локального состояния на правой границе чистота

$$P_{\mathrm{R}}(N,\theta) = 1 + o(N^{-2}) \tag{116}$$

и расстояние

$$d_{\mathrm{R}}(N,\theta) = \frac{\theta}{\Gamma N} + o(N^{-2}) \tag{117}$$

имеют ту же асимптотику, что и на левой границе.

5.5. Корреляции тока и намагниченности. Рассмотрим корреляционные функции

$$C^{\alpha\beta}(k,l) := \langle j_k^\alpha \sigma_l^\beta\rangle - \langle j_k^\alpha\rangle\langle\sigma_l^\beta\rangle, \tag{118}$$

где

$$m_l^\beta(N,\theta) := \langle\sigma_l^\beta\rangle \tag{119}$$

– локальная средняя намагниченность на участке l в цепочке из N узлов. В терминах АМП имеем для $1 \leqslant k < l-1$

$$C^{\alpha\beta}(k,l) = 2\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\gamma\delta}\,\frac{\langle\!\langle 0|B_0^{k-1}B_\gamma B_\delta B_0^{l-k-2}B_\beta B_0^{N-l}|\theta\rangle\!\rangle}{Z_N(\theta)} - j^\alpha(N,\theta)\langle\sigma_l^\beta\rangle. \tag{120}$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha = 1$. Тогда по определению символа Леви-Чивиты и из соотношения (75) имеем

$$\begin{aligned} C^{1\beta}(k,l) &= 2\,\frac{\langle\!\langle 0|B_0^{k-1}[B_2,B_3]B_0^{l-k-2}B_\beta B_0^{N-l}|\theta\rangle\!\rangle}{Z_N(\theta)} - j^1(N,\theta)\langle\sigma_l^\beta\rangle =\\ &= 4i\,\frac{\langle\!\langle 0|B_0^{k}(T_3-S_3)B_0^{l-k-2}B_\beta B_0^{N-l}|\theta\rangle\!\rangle}{Z_N(\theta)} - j^1(N,\theta)\langle\sigma_l^\beta\rangle. \end{aligned} \tag{121}$$

Из (65) и (91) получаем

$$\begin{aligned} C^{1\beta}(k,l) &= \frac{8}{\Gamma}\,\frac{\langle\!\langle 0|B_0^{l-2}B_\beta B_0^{N-l}|\theta\rangle\!\rangle}{Z_N(\theta)} - j^1(N,\theta)m_l^\beta(N,\theta) =\\ &= j^1(N,\theta)\big(m_{l-1}^\beta(N-1,\theta) - m_l^\beta(N,\theta)\big), \end{aligned} \tag{122}$$

где во втором равенстве мы использовали формулу (102). Отметим, что эта корреляционная функция не зависит от k.

В частности, для $l = N$ из точных формул (114) находим

$$\begin{aligned}
C^{11}(k,N) &= \frac{j^1(N,\theta)}{4\Gamma}((1+\sin^2\theta)(j^1(N-1,\theta)-j^1(N,\theta)) - \\
&\quad - \cos\theta\sin\theta(j^2(N-1,\theta)-j^2(N,\theta))) \propto \frac{1}{N^5}, \\
C^{12}(k,N) &= \frac{j^1(N,\theta)}{4\Gamma}((1+\cos^2\theta)(j^2(N-1,\theta)-j^2(N,\theta)) - \\
&\quad - \cos\theta\sin\theta(j^1(N-1,\theta)-j^1(N,\theta))) \propto \frac{1}{N^5}, \\
C^{13}(k,N) &= \frac{j^1(N,\theta)}{2\Gamma}(j^3(N-1,\theta)-j^3(N,\theta)) \propto \frac{1}{N^4}.
\end{aligned} \tag{123}$$

Таким образом, корреляции, связанные с намагниченностью в плоскости, строго запрещены.

Далее исследуем корреляции локальной намагниченности с перпендикулярным током $\alpha = 3$. Из (74) получаем

$$\begin{aligned}
C^{3\beta}(k,l) &= 2\frac{\langle\!\langle 0|B_0^{k-1}[B_1,B_2]B_0^{l-k-2}B_\beta B_0^{N-l}|\theta\rangle\!\rangle}{Z_N(\theta)} - j^3(N,\theta)\langle\sigma_l^\beta\rangle = \\
&= 4i\frac{\langle\!\langle 0|B_0^{k}(S_2+T_2)B_0^{l-k-2}B_\beta B_0^{N-l}|\theta\rangle\!\rangle}{Z_N(\theta)} - j^3(N,\theta)\langle\sigma_l^\beta\rangle.
\end{aligned} \tag{124}$$

Используя (68)–(72), можно найти

$$\begin{aligned}
C^{31}(k,l) &= 4i\,\frac{\langle\!\langle 0|B_0^{k}(S_2+T_2)B_0^{l-k-2}B_1 B_0^{N-l}|\theta\rangle\!\rangle}{Z_N(\theta)} - j^3(N,\theta)\langle\sigma_l^1\rangle = \\
&= 4\,\frac{Z_{N-1}(\theta)}{Z_N(\theta)}\left(m_{l-1}^2(N-1,\theta) - \frac{d}{d\theta}\,m_{l-1}^1(N-1,\theta)\right) + \\
&\quad + j^3(N,\theta)(m_{l-1}^1(N-1,\theta) - m_l^1(N,\theta)), \\
C^{32}(k,l) &= 4i\frac{\langle\!\langle 0|B_0^{k}(S_2+T_2)B_0^{l-k-2}B_2 B_0^{N-l}|\theta\rangle\!\rangle}{Z_N(\theta)} - j^3(N,\theta)\langle\sigma_l^2\rangle = \\
&= -4\,\frac{Z_{N-1}(\theta)}{Z_N(\theta)}\left(m_{l-1}^1(N-1,\theta) + \frac{d}{d\theta}\,m_{l-1}^2(N-1,\theta)\right) + \\
&\quad + j^3(N,\theta)(m_{l-1}^2(N-1,\theta) - m_l^2(N,\theta)), \\
C^{33}(k,l) &= 4i\,\frac{\langle\!\langle 0|B_0^{k}(S_2+T_2)B_0^{l-k-2}B_3 B_0^{N-l}|\theta\rangle\!\rangle}{Z_N(\theta)} - j^3(N,\theta)\langle\sigma_l^2\rangle = \\
&= -4\,\frac{Z_{N-1}(\theta)}{Z_N(\theta)}\,\frac{d}{d\theta}m_{l-1}^3(N-1,\theta) + j^3(N,\theta)(m_{l-1}^3(N-1,\theta) - m_l^3(N,\theta)).
\end{aligned} \tag{125}$$

Для $l = N$ это дает старший порядок

$$C^{31}(k,N) = \frac{\theta^2}{N^2}\sin\theta, \qquad C^{32}(k,N) = -\frac{\theta^2}{N^2}\cos\theta, \qquad C^{33}(k,N) = \frac{\theta^2}{\Gamma N^3}. \tag{126}$$

Амплитуда порядка $1/N^2$ указывает на дальние корреляции, поскольку ток $j^3(N,\theta)$ сам имеет порядок $1/N$. Аналогично, дальний порядок появляется также в $C^{33}(k,N)$, так как амплитуды величин $j^3(N,\theta)$ и m_k^3 имеют порядок $1/N$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы обнаружили, что АМП позволяет вычислить точные выражения для стационарных токов, граничных состояний и локальных корреляций тока и намагниченности в терминах одной функции, а именно неравновесной статистической суммы $Z_N(\theta)$, которое является следом ненормированной матрицы плотности из АМП. Мы получили дифференциальное рекуррентное соотношение для $Z_N(\theta)$.

Основными новыми выводами, которые можно сделать из наших явных результатов, являются почти совершенная чистота граничных состояний при больших N для любой фиксированной силы диссипативной связи Γ и наличие дальних корреляций для тока, перпендикулярного плоскости кручения. Эти корреляции сохраняются также в пределе Зенона сильной диссипативной связи, за исключением корреляции с перпендикулярной намагниченностью, которая исчезает в пределе Зенона. Интересно отметить, что аналогичные корреляции, вплоть до формально сходных математических выражений, появляются в классических моделях решетчатого газа с граничным управлением, которые разрешимы с помощью АМП. Это следует из структуры матричной алгебры, найденной для этих систем [1]. Это соответствие удивляет и наводит на мысль о более глубоком сходстве между классическими и диссипативными квантовыми системами с граничным управлением. Было бы интересно понять, можно ли адаптировать макроскопическую теорию флуктуаций для классического случая, предсказывающего такие корреляции, к квантовому случаю. Для этого следует дополнительно исследовать подавление корреляций с токами в плоскости. Мы не знаем классического аналога такого поведения.

Благодарности. В. Попков и Г. М. Шютц благодарят Т. Прозена и К. Коллат за полезные обсуждения. Г. М. Шютц благодарен университету Лотарингии, где была проделана часть этой работы, за гостеприимство.

Список литературы

[1] D. Karevski, V. Popkov, G. M. Schütz, "Exact matrix product solution for the boundary-driven Lindblad XXZ chain", *Phys. Rev. Lett.*, **110**:4 (2013), 047201, 5 pp., arXiv: 1211.7010.

[2] D. Karevski, V. Popkov, G. M. Schütz, "Driven isotropic Heisenberg spin chain with arbitrary boundary twisting angle: exact results", *Phys. Rev. E*, **88**:6 (2013), 062118, 9 pp.

[3] T. Prosen, "Open XXZ spin chain: nonequilibrium steady state and a strict bound on ballistic transport", *Phys. Rev. Lett.*, **106**:21 (2011), 217206, 4 pp., arXiv: 1103.1350.

[4] T. Prosen, "Exact nonequilibrium steady state of a strongly driven open XXZ chain", *Phys. Rev. Lett.*, **107**:13 (2011), 137201, 5 pp., arXiv: 1106.2978.

[5] B. Buča, T. Prosen, "Connected correlations, fluctuations and current of magnetization in the steady state of boundary driven XXZ spin chains", *J. Stat. Mech.*, **2016**:2 (2106), 023102, 24 pp.

[6] T. Prosen, "Matrix product solutions of boundary driven quantum chains", *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:37 (2015), 373001, 68 pp.

[7] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio, C. Landim, “Macroscopic fluctuation theory”, *Rev. Modern Phys.*, **87**:2 (2015), 593–636, arXiv: 1404.6466.

[8] H. Spohn, “Long range correlations for stochastic lattice gases in a non-equilibrium steady state”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16**:18 (1983), 4275–4291.

[9] V. Popkov, T. Prosen, “Infinitely dimensional Lax structure for one-dimensional Hubbard model”, *Phys. Rev. Lett.*, **114**:12 (2015), 127201, 5 pp., arXiv: 1501.02230.

[10] L. D. Faddeev, “The inverse problem in the quantum theory of scattering”, *J. Math. Phys.*, **4**:1 (1963), 72–104.

[11] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга”, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 13–63.

[12] D. Karevski, V. Popkov, G. M. Schütz, “Matrix product ansatz for non-equilibrium quantum steady states.”, *From Particle Systems to Partial Differential Equations* (*PSPDE* 2015), Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **209**, eds. P. Gonçalves, A. Soares, Springer, Cham, 2017, 221–245.

[13] F. C. Alcaraz, S. Dasmahapatra, V. Rittenberg, “Stochastic models with boundaries and quadratic algebras”, *Phys. A*, **257**:1–4 (1998), 1–9.

[14] R. A. Blythe, M. R. Evans, “Nonequilibrium steady states of matrix-product form: a solver’s guide”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:46 (2007), R333–R441.

[15] B. Derrida, “An exactly soluble non-equilibrium system: the asymmetric simple exclusion process”, *Phys. Rep.*, **301**:1–3 (1998), 65–83.

[16] S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet (eds.), *Open Quantum Systems* II. *The Markovian Approach*, Lecture Notes in Mathematics, **1881**, Springer, Berlin, 2006.

[17] H.-P. Breuer, F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.

[18] A. Kossakowski, “On quantum statistical mechanics of non-Hamiltonian systems”, *Rep. Math. Phys.*, **3**:4 (1972), 247–274.

[19] G. Lindblad, “On the generators of quantum dynamical semigroups”, *Commun. Math. Phys.*, **48**:2 (1976), 119–130.

[20] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, 1982.

[21] W. Heisenberg, “Zur Theorie des Ferromagnetismus”, *Z. Phys.*, **49**:9–10 (1928), 619–636.

[22] V. Popkov, G. M. Schütz, “Solution of the Lindblad equation for spin helix states”, *Phys. Rev. E*, **95**:4 (2017), 042128, 11 pp.

[23] V. Popkov, “Alternation of sign of magnetization current in driven XXZ chains with twisted XY boundary gradients”, *J. Stat. Mech.*, **2012**:12 (2012), P12015, 18 pp.

[24] V. Popkov, R. Livi, “Manipulating energy and spin currents in non-equilibrium systems of interacting qubits”, *New J. Phys.*, **15** (2013), 023030, 13 pp.

Поступила в редакцию 20.02.2018,
после доработки 20.02.2018,
принята к публикации 23.04.2018