О. М. Фоменко, О распределении чисел с заданным количеством различных простых делителей, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1979, том 82, 158–162

О.М.Фоменко

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Р.Воган [I] предложил упрощенный вариант способа И.М.Виноградова (см. [2] , гл.IX) оценки тригонометрической суммы с простыми числами

$$S=\sum_{h=1}^{H}\Big|\sum_{p\leqslant N} e(\alpha h p)\Big| . \qquad (\mathrm{I})$$

Эта оценка применяется, в частности, в вопросе о распределении дробных частей значений функции αp , когда p пробегает простые числа, не превосходящие N (см. [2] , гл.XI). Используя решето Эратосфена, И.М.Виноградов связал сумму

$$\sum_{p\leqslant N} f(p)$$

с билинейной формой

$$\sum_{d_1,\dots,d_s\in\mathcal{D}} \mu(d_1)\dots\mu(d_s)\sum_{\substack{m_1,\dots,m_s\\ m_1\dots m_s d_1\dots d_s\leqslant N}} f(m_1\dots m_s d_1\dots d_s),$$

где μ - функция Мебиуса.

Р.Воган исходит из тривиально доказываемого тождества

$$\sum_n f(1,n)=\sum_{d\leqslant u}\sum_{r}\sum_{n}\mu(d)f(rd,n)-\sum_{m>u}\sum_{n}\sum_{\substack{d\mid m\\ d\leqslant u}}\mu(d)f(m,n), \qquad (2)$$

которое справедливо для любой двойной последовательности $f(m,n)$ комплексных чисел с условием, что первый ряд справа абсолютно сходится.

Пусть $\Lambda(n)$ - классическая функция Мангольдта. Полагая в (2) $f(m,n)=\Lambda(n)e(\alpha jmn)$, мы почти сразу связываем оценку тригонометрической суммы (I) с оценкой соответствующих двойных сумм и далее действуем по известной схеме И.М.Виноградова.

В работе [3] И.М.Виноградов применил свой метод к выводу оценки суммы

$$S=\sum_{h=1}^{H}\Big|\sum_{w\leqslant N} e(\alpha h w)\Big| ,$$

где w пробегает произведения, состоящие из l различных простых сомножителей, другими словами, w пробегает числа с условием $\mu^2(w)\cdot\nu(w)=l$; здесь $\nu(n)$ – количество различных простых делителей числа n . Оценка последней суммы позволила И.М.Виноградову получить информацию о распределении произведений w .

В настоящей заметке мы применяем тождество (2) к близкой задаче распределения чисел v с условием $\nu(v)=l$, то есть чисел v с заданным количеством различных простых делителей.

Введем сначала обобщение $\Lambda_l(n)$ классической функции Мангольдта. Функция $\Lambda_l(n)$ задается условием

$$\Lambda_l(n)=(\mu*\log^l)(n),$$

где $*$ – свертка Дирихле.

Сформулируем несколько свойств функции $\Lambda_l(n)$:

$\Lambda_l(n)=0$, если $\nu(n)>l$; $\Lambda_l(m_1m_2)=\sum_{h=0}^{l}\binom{l}{h}\Lambda_h(m_1)\Lambda_{l-h}(m_2)$, если $(m_1,m_2)=1$; $\Lambda_1=\Lambda$; $\Lambda_l\geqslant 0$; $\sum_{n|y}\Lambda_l(n)=\log^l y$.

Из доказываемой в настоящей заметке оценки тригонометрической суммы с числами v, $\nu(v)=l$ (см.теорему ниже) вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{x\}$ означает дробную часть числа x ; $(a,q)=1$, $|\alpha-a/q|\leqslant q^{-2}$, $0\leqslant\gamma<\gamma+\delta\leqslant 1$, $\mathcal{L}=\log(2Nq/\delta)$. Тогда

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ \gamma\leqslant\{\alpha n\}<\gamma+\delta}}\Lambda_l(n)-\delta\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\Lambda_l(n)\ll \tag{3}$$

$$\ll\mathcal{L}^{l+5}\left(Nq^{-1/2}+N^{3/4}+(\delta Nq)^{1/2}\right)+\delta^{2/5}N^{4/5}(Nq/\delta)^{\varepsilon}.$$

Для сравнения приведем аналогичный результат И.М.Виноградова (см. [3] , теорема 2):

Пусть $\sqrt{N}\leqslant\tau\leqslant Ne^{-\tau^{\varepsilon}}$, где $\tau=\log N$,

$$|\alpha-a/q|\leqslant\frac{1}{q\tau},\quad (a,q)=1,\ e^{\tau^{\varepsilon}}\leqslant q\leqslant\tau;$$

w пробегает произведения, состоящие из l различных простых сомножителей. Тогда

$$\sum_{\substack{1\leqslant w\leqslant N\\ \{\alpha w\}<\delta}}1-\delta\sum_{1\leqslant w\leqslant N}1\ll N\Delta;\quad \Delta=\left(\frac{1}{q}+\frac{q}{N}\right)^{0,5-\varepsilon_1}+N^{-0,2+\varepsilon_1}. \tag{4}$$

Здесь ε, ε_1 – сколь угодно малые положительные постоянные величины.

Последовательность чисел w в (4) несколько более редкая, чем последовательность чисел v, $\nu(v)=\ell$, в (3), однако в (3) выявлена зависимость остаточного члена от δ.

Переходим к оценке тригонометрической суммы с числами v, $\nu(v)=\ell$.

ТЕОРЕМА. Пусть $(a,q)=1$, $|\alpha-a/q|\leqslant q^{-2}$, $H\geqslant 1, N\geqslant 1$,

$$\mathcal{L}=\log 2HN \quad \text{и} \quad D=\max_{m\leqslant HN}\Big(\sum_{\substack{d|m\\ d\leqslant H}}1\Big).$$

Тогда

$$\sum_{h=1}^{H}\Big|\sum_{n=1}^{N}\Lambda_\ell(n)e(\alpha hn)\Big| \ll \ll \mathcal{L}^{\ell+4}\left(HNq^{-1/2}+HN^{3/4}+(HNq)^{1/2}+DH^{3/5}N^{4/5}\right). \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала сформулируем две леммы. По поводу их доказательства см. [I].

ЛЕММА I. Пусть $X\geqslant 1$, $Y\geqslant 1$, $(a,q)=1, |\alpha-a/q|\leqslant q^{-2}$, $L=\log 2XYq$ и

$$S=\sum_{x\leqslant X}\max_{Z\leqslant Y}\Big|\sum_{y\leqslant Z}a_x b_y e(\alpha xy)\Big|,$$

где a_x и b_y – комплексные числа. Тогда

$$S\ll L^{3/2}\Big(\sum_{x\leqslant X}|a_x|^2\sum_{y\leqslant Y}|b_y|^2\Big)^{1/2}\left(XYq^{-1}+X+Y+q\right)^{1/2}.$$

ЛЕММА 2. Пусть

$$T=\sum_{x\leqslant X}\max_{Z\leqslant XY/x}\Big|\sum_{y\leqslant Z}a_x e(\alpha xy)\Big|.$$

Тогда в предположениях леммы I имеем

$$T\ll L\left(XYq^{-1}+X+q\right)\max_{x\leqslant X}|a_x|.$$

Переходим к доказательству теоремы. Для простоты ограничимся случаем $H=1$. Достаточно предположить, что $1 \leqslant q \leqslant N$. Пусть $u = N^{2/5}$; возьмем $f(m,n)=\Lambda_\ell(n)\, e(\alpha m n)$, если $u<n\leqslant N/m$, и 0 в противном случае. Тогда на основании (2) имеем

$$\sum_{n=1}^{N} \Lambda_\ell(n) e(\alpha n) = S_1 - S_2 - S_3 + O(N^{1/2}), \qquad (6)$$

где

$$S_1 = \sum_{d\leqslant u} \sum_{r\leqslant N/d} \sum_{n\leqslant N/dr} \mu(d)\Lambda_\ell(n) e(\alpha d r n),$$

$$S_2 = \sum_{d\leqslant u} \sum_{n\leqslant u} \sum_{r\leqslant N/dn} \mu(d)\Lambda_\ell(n) e(\alpha d r n),$$

$$S_3 = \sum_{m>n} \sum_{u<n\leqslant N/m} \sum_{\substack{d|m \\ d\leqslant u}} \mu(d)\Lambda_\ell(n) e(\alpha m n).$$

Сначала оценим сумму S_3. Имеем

$$S_3 = \sum_{M} S(M),$$

где M принимает значения $u=N^{2/5}, 2u, 4u, \ldots$ вплоть до $M < Nu^{-1} = N^{3/5}$;

$$S(M) = \sum_{M<m\leqslant 2M} \sum_{u<n\leqslant N/m} \sum_{\substack{d|m \\ d\leqslant u}} \mu(d)\Lambda_\ell(n) e(\alpha m n).$$

Сделаем замену: $m=x$, $n=y$ и положим

$$a_x = \sum_{\substack{d|x \\ d\leqslant u}} \mu(d), \quad b_y = \Lambda_\ell(y).$$

Тогда

$$S(M) \ll \sum_{M<x\leqslant 2M} \Big| \sum_{u<y\leqslant N/m} a_x b_y e(\alpha x y) \Big| \ll$$

$$\ll \sum_{x\leqslant 2M} \max_{Z\leqslant N/M} \Big| \sum_{y\leqslant Z} a_x b_y e(\alpha x y) \Big|.$$

Положим $2M=X$, $N/M=Y$. Применяя лемму I, получим

$$S(M) \ll L^{3/2}\Big(\sum_{x\leqslant X}|a_x|^2\cdot\sum_{y\leqslant Y}|b_y|^2\Big)^{1/2}\times$$

$$\times\,(XYq^{-1}+X+Y+q)^{1/2}.$$

Здесь

$$L=\log 2Nq\ ;\ \sum_{y\leqslant Y}|b_y|^2\ll Y\log^{2\ell}Y\ .$$

В силу хорошо известного результата имеем

$$\sum_{x\leqslant X}|a_x|^2\ll X\log^3 X.$$

Собирая полученное, имеем

$$S_3\ll\mathcal{L}^{\ell+4}\,(Nq^{-\frac12}+(Nq)^{\frac12}+N^{\frac45})\,.$$

Рассмотрим сумму S_2 . Введем обозначение $dn=x$. Тогда

$$S_2=\sum_{x\leqslant u^2}\ \sum_{r\leqslant N/x}a_x e(\alpha x r),$$

где $a_x=\sum_{dn=x}\mu(d)\Lambda_\ell(n)$, причем в случае $d>u$ или $n>u$ a_x полагается равным 0 . Пусть $u^2=X,\ XY=N.$ Имеем

$$S_2\ll\mathcal{L}^{\ell}\sum_{x\leqslant X}\ \max_{Z\leqslant XY/x}\Big|\sum_{r\leqslant Z}e(\alpha x r)\Big|\,.$$

По лемме 2

$$S_2\ll\mathcal{L}^{\ell+1}(XYq^{-1}+X+q)=\mathcal{L}^{\ell+1}N\Big(\frac1q+\frac qN+N^{-1/5}\Big).$$

Оценим сумму S_1 . Положим $nr=y$. Тогда

$$S_1=\sum_{d\leqslant u}\mu(d)\sum_{y\leqslant N/d}\log^\ell y\cdot e(\alpha d y)\,.$$

Применяя абелево суммирование, получим

$$S_1\ll S_1'+S_1''\ ,$$

где

$$S_1' = \sum_{d\leqslant u} \sum_{t\leqslant \frac{N}{d}} \frac{\log^{l-1} t}{t} \left|\sum_{y\leqslant t} e(\alpha d y)\right|,$$

$$S_1'' = \sum_{d\leqslant u} \log^l \frac{N}{d} \left|\sum_{y\leqslant N/d} e(\alpha d y)\right| .$$

Имеем

$$S_1' \ll \sum_{d\leqslant u} \sum_{t\leqslant N} \frac{\log^{l-1} t}{t} \cdot \max_{Z\leqslant N/d} \left|\sum_{y\leqslant Z} e(\alpha d y)\right|.$$

Применяя лемму 2, имеем

$$S_1' \ll \mathcal{L}^{l+1}(Nq^{-1}+u+q) .$$

Аналогично,

$$S_1'' \ll \mathcal{L}^{l+1}(Nq^{-1}+u+q) .$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Нам необходима следующая

ЛЕММА 3. Пусть $(a,q)=1$, $|\alpha - a/q| \leqslant q^{-2}$, $0 \leqslant \Delta < \frac{1}{2}$, $\mathcal{L} = \log(Nq/\Delta)$ и $\varepsilon > 0$ - любое фиксированное число. Зададим функцию $f_\Delta(\theta)$ следующим образом: I) $f_\Delta(\theta) = 1$, если $-\Delta \leqslant \theta < \Delta$; 0, если $-1/2 \leqslant \theta < -\Delta$ или $\Delta \leqslant \theta < \frac{1}{2}$; 2) $f_\Delta(\theta+1) = f_\Delta(\theta)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{N} \Lambda_l(n)\left(f_\Delta(\alpha n - \beta) - 2\Delta\right) \ll \mathcal{L}^{l+5}\left(Nq^{-1/2} + N^{3/4} + (\Delta N q)^{1/2}\right) + \Delta^{2/5} N^{4/5} (Nq/\Delta)^{\varepsilon}. \tag{7}$$

Доказательство этой леммы опирается на теорему и хорошо известное разложение

$$f_\Delta(\theta) - 2\Delta = \sum_{1\leqslant |h| \leqslant H} \frac{\sin 2\pi h\Delta}{\pi h} e(h\theta) + O\left(\min\left(1, \frac{1}{H\|\theta+\Delta\|}\right) + \min\left(1, \frac{1}{H\|\theta-\Delta\|}\right)\right),$$

где $\|v\| = \min_{n\in\mathbb{Z}} |v - n|$. Подробности см. в [I].

Следствие тривиально вытекает из леммы 3.

P O S T   S C R I P T U M . Отметим, что имеет место формула

$$(-1)^{\ell} \frac{\zeta^{(\ell)}(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{\ell}(n)}{n^{s}} .$$

Поэтому рассмотренную в настоящей работе тригонометрическую сумму можно оценивать и с помощью плотностных теорем теории L -рядов Дирихле. Пусть

$$S_{\ell}(\alpha) = \sum_{n=1}^{N} \Lambda_{\ell}(n) e(\alpha n) .$$

Ограничимся случаем $\alpha = a/q$, $(a,q)=1$. Расширенная гипотеза Римана для L -рядов Дирихле непосредственно приводит к оценке

$$S_{\ell}\left(\frac{a}{q}\right) \ll \left(Nq^{-1/2} + N^{1/2}q^{1/2}\right)\mathcal{L}^{C} ,$$

где $\mathcal{L} = \log Nq$, $C > 0$ - некоторая константа.

Плотностные теоремы дают (ср. [4] , [5] , где трактуется случай $\ell = 1$):

$$S_{\ell}\left(\frac{a}{q}\right) \ll \left(Nq^{-1/2} + N^{3/4}q^{1/8} + N^{1/2}q^{1/2}\right)\mathcal{L}^{C} .$$

Литература

1. V a u g h a n R.C. On the distribution of αp modulo 1 .- Mathematika, 1977, vol.24, № 2, p.135-141.
2. В и н о г р а д о в И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. - Труды Мат.ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР, 1947, т.23, с.1-109; перепечатано в кн.: Виноградов И.М. Избранные труды. М., Изд-во АН СССР, 1952, с.237-331.
3. В и н о г р а д о в И.М. О распределении произведений простых чисел и значений функции Мебиуса. - Изв.АН СССР. Сер.мат., 1948, т.12, № 4, с.341-350; перепечатано в кн.: Виноградов И.М. Избранные труды. М., Изд-во АН СССР, 1952, с.332-340.
4. М о н т г о м е р и Г. Мультипликативная теория чисел. М., Мир, 1974. 160 с.
5. V a u g h a n R.C. Mean value theorems in prime number theory. - J.London Math.Soc.(2),1975,vol.10,№ 2,p.153-162.