УДК 514.755.3

А. В. Столяров

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОЛОС

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 25
§ 1. Полоса и ее обобщения 26
§ 2. Обзор работ по геометрии многомерных полос 30
§ 3. Линейные связности на оснащенных регулярных гиперполосах 37
§ 4. Приложения теории регулярных гиперполос 48
Библиография 50

ВВЕДЕНИЕ

Понятие полосы, введенное Бляшке в 1930 году, начиная с 50-х годов, привлекло внимание ряда геометров. В первую очередь, здесь следует отметить работу В. В. Вагнера [4], где дано значительное обобщение этого понятия и получено много результатов по теории многомерных гиперполос. Именно после работы [4] пробудился интерес к изучению геометрии полос (в основном, многомерных) и ее приложений. При этом следует заметить, что преимущественная роль в изучении геометрии многомерных полос принадлежит отечественным исследователям. Отметим также, что в последние годы применение сильного инвариантного аналитического метода Г. Ф. Лаптева [20] дифференциально-геометрических исследований погруженных многообразий, опирающегося на исчисление внешних дифференциальных форм и на теорию представлений конечных групп Ли, позволило получить ряд глубоких результатов в теории многомерных полос.

В настоящей работе, наряду с обзором наиболее существенных, с нашей точки зрения, результатов по теории полос, получен ряд новых результатов по проективной теории регулярных гиперполос $H_m \subset P_n$. Отметим, что в отличие от большинства других работ по этой тематике, выполненных методами тензорного анализа, результаты автора получены (в минимально канонизированном репере 1-го порядка) систематическим применением инвариантного метода продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева, что позволило получить дифференциально-геометрические факты, связанные с дифференциальными окрестностями высоких порядков; результаты § 3 получены с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г. Ф. Лаптевым [20], [21], [29]. Следует заметить также, что ряд полученных нами результатов справедлив (при некоторых предположениях) и для регулярных гиперполос H_m, погруженных в пространство проективной связности $P_{n,n}$.

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$I, K, L=\overline{1, n};\ u, v, w=\overline{m+1, n-1};\ \alpha, \beta, \gamma=\overline{m+1, n};$$
$$i, j, k, l, s, t=\overline{1, m};\ \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}=\overline{0, m}.$$

§ 1. ПОЛОСА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

1. Полоса и ее обобщения. Понятие полосы в трехмерном евклидовом пространстве E_3 ввел Бляшке [71], [72]; полосой он называет кривую линию в E_3, оснащенную полем касательных плоскостей. Задание поля касательных плоскостей линии $\bar{r}(t)$ в E_3 равносильно заданию поля нормального вектора $\bar{a}_3(t)$ полосы вдоль $\bar{r}(t)$: $\bar{a}_3 \cdot d\bar{r}=0$. Поэтому «полосу можно представить себе в виде узкой ленты, тянущейся вдоль линии $\bar{r}(t)$ и поворачивающейся так, чтобы все время оставаться перпендикулярной к вектору $\bar{a}_3(t)$» [72]. В указанных работах Бляшке [71], [72] находятся различные интегральные и дифференциальные инварианты полосы, изучаются специальные виды полос (коническая, асимптотическая, плоская, геодезическая полосы и полоса кривизны), а также рассматриваются деформация и изгибание полосы.

Некоторые вопросы теории полосы в трехмерном проективном пространстве P_3 излагаются в монографии Боля [73]. Вопросы эквиаффинной теории полосы (построение канонического репера полосы и его геометрическая характеристика, некоторые классы полос) в трехмерном пространстве рассматриваются Л. И. Магазинниковым [23].

Хошек [78], Гиринг [77], Вундерлих [83] продолжают дальнейшее изучение геометрии полос в евклидовом пространстве E_3; в частности, в работе [83] доказано, что только винтовые линии и кривые постоянной полной кривизны ($\sqrt{k^2+\varkappa^2}=\text{const}$) характеризуются тем, что поверхности главных нормалей их обладают соприкасающейся стрикционной полосой.

Вопросы геометрии полос в трехмерных неевклидовых пространствах нашли свое отражение в работах Г. Н. Гаюбова [11], Пендль [82], Франка [76]: в [11] выводятся формулы Френе и деривационные формулы полосы в пространстве Лобачевского; в [82] к полосе в пространстве Мёбиуса инвариантным образом присоединяются семейства окружностей и сфер и с помощью циклид Дюпена дается характеристика некоторых инвариантов полос; в [76] строится дифференциальная геометрия полос в пространственной геометрии Лагерра и рассматриваются поверхностные полосы на циклидах Дюпена.

Обобщая введенное Бляшке понятие полосы, В. В. Вагнер [4] m-мерной гиперполосой H_m в n-мерном центроаффинном пространстве A_n называет поверхность V_m, оснащенную полем касательных гиперплоскостей (полем главных касательных гиперплоскостей); при этом поверхность V_m для гиперполосы H_m называется базисной. Если характеристические плоскости семейства главных касательных гиперплоскостей не содержат направлений, касательных к базисной поверхности гиперполосы, то гиперполоса называется регулярной; условием ее регулярности является невырожденность главного фундаментального тензора Λ_{ij}^n 1-го порядка гиперполосы H_m.

В первой части указанной работы В. В. Вагнер изучает геометрию регулярной m-мерной гиперполосы $H_m \subset A_n$, а во второй ее части рассматривает теорию поля локальных регулярных гиперполос в дифференциально-геометрическом пространстве X_n и ее различные приложения.

М. М. Похила [45], [46] рассматривает обобщенные многомерные полосы; обобщенной m-мерной полосой он называет m-мерную поверхность V_m проективного (аффинного, евклидова, ...) пространства P_n, на которой задано поле геометрического объекта H, определяющего в текущей точке поверхности r-мерную плоскость (H), $m<r<n-1$, проходящую через касательную плоскость поверхности.

А. В. Столяров [49] вводит в рассмотрение и изучает геометрию регулярного гиперполосного распределения $\mathcal{H} \subset P_n$. Гиперполосным распределением автор называет дифференцируемое многообразие, представляющее собой пару распределений 1-го рода, состоящую из базисного распределения $\mathfrak{M} \subset P_n$ m-мерных линейных элементов $(m<n-1)$ и оснащающего распределения гиперплоскостных элементов с отношением инцидентности их соответствующих элементов в общем центре. Уравнение гиперполосного распределения $\mathcal{H} \subset P_n$ в точечном репере 1-го порядка $\{A_0, A_I\}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} &\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K, \quad \omega_i^v = \Lambda_{iK}^v \omega_0^K, \\ &\omega_v^n = A_{v\alpha}^n \omega_0^\alpha, \quad \omega_v^i = N_{vK}^i \omega_0^K. \end{aligned} \tag{1}$$

Заметим, что голономное распределение $\mathcal{H} \subset P_n$ представляет собой $(n-m)$-параметрическое семейство гиперполос $H_m \subset \subset P_n$; уравнение гиперполосы в репере 1-го порядка имеет вид (1), где $\omega_0^\alpha = 0$.

Фундаментальный объект порядка s распределения $\mathscr{H}$ содержит фундаментальный подобъект $\{\Lambda^n_{ij}, \Lambda^n_{ij_1j_2}, \ldots, \Lambda^n_{ij_1\ldots j_s}\}$. В силу этого, в той части геометрии регулярного ($|\Lambda^n_{ij}|\neq 0$) распределения $\mathscr{H}\subset P_n$, которая определяется фундаментальными подобъектами (с привлечением объектов $\{\Lambda^v_{ij}, \Lambda^n_{ij}\}$, $\{N^i_{vj}\}$), имеется аналогия с геометрией регулярных гиперполос $H_m\subset P_n$; но геометрия распределений $\mathscr{H}$ богаче геометрии гиперполос, ибо содержит построения, не имеющие смысла для последних.

2. Поля фундаментальных геометрических объектов регулярного гиперполосного распределения. В работе [49] автором в репере 1-го порядка построены поля фундаментальных геометрических объектов гиперполосного распределения и объектов, ими охваченных, до 3-го порядка включительно; приведем охваты необходимых нам для дальнейшего изложения компонент геометрических объектов распределения $\mathscr{H}\subset P_n$.

Компоненты главного фундаментального тензора $\Lambda_{ij}{}^n$ (вообще говоря, несимметрического) 1-го порядка распределения $\mathscr{H}\subset P_n$ удовлетворяют уравнениям

$$d\Lambda^n_{ij}+\Lambda^n_{ij}(\omega^0_0+\omega^n_n)-\Lambda^n_{ik}\omega^k_j-\Lambda^n_{kj}\omega^k_i=\Lambda^n_{ijK}\omega^K_0; \tag{2}$$

этим тензором охватывается симметрический тензор $a^n_{ij}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}(\Lambda^n_{ij}+\Lambda^n_{ji})$; отметим, что в случае гиперполосы $H_m\subset P_n$ имеет место $\Lambda^n_{ij}=a^n_{ij}$. В силу регулярности распределения $\mathscr{H}\subset P_n$, тензор невырожден: $|\Lambda^n_{ij}|\neq 0$, а следовательно, существует взаимный тензор 1-го порядка $\Lambda^{ik}_n:\Lambda^{ik}_n\Lambda^n_{kj}=\Lambda^{ki}_n\Lambda^n_{jk}=\delta^i_j$; в общем случае невырожденным является также и симметрический тензор $a^n_{ij}:a^{ik}_n a^n_{kj}=\delta^i_j$.

Каждая из систем величин

$$a^v_n\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{m}\Lambda^v_{ij}a^{ij}_n,\quad a^0_v\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{m}N^i_{vi} \tag{3}$$

есть квазитензор, соответственно, первого и второго порядков, а системы величин

$$c^v_{ij}\overset{\text{def}}{=}\Lambda^v_{ij}-a^v_n a^n_{ij},\quad b^{ij}_{nv}\overset{\text{def}}{=}N^i_{vk}a^{kj}_n-a^0_v a^{ij}_n \tag{4}$$

— тензоры соответствующих порядков; имеем также следующие тензоры 2-го порядка:

$$\begin{gathered} b^i_{vk}\overset{\text{def}}{=}b^{ij}_{nv}a^n_{jk},\quad b_{uv}\overset{\text{def}}{=}b^i_{uk}b^k_{vi},\quad b^v_{nu}\overset{\text{def}}{=}b^{ij}_{nu}c^v_{ij},\\ B^n_{uv}\overset{\text{def}}{=}-\frac{1}{2}(\tilde{b}^{nw}_u b_{wv}+\tilde{b}^{nw}_v b_{wu}), \end{gathered} \tag{5}$$

где $\tilde{b}^{nw}_u$ — тензор, взаимный тензору b^v_{nu}. Система величин $\{b_v, B^n_{uv}\}$, где $b_v=-(B^n_{uv}a^u_n+a^0_v)$, образует геометрический объект 2-го порядка распределения $\mathscr{H}\subset P_n$.

Квазинормали 2-го порядка

$$\Lambda_k \overset{\text{def}}{=} \Lambda_n^{ji}\Lambda_{ijk}^n, \quad b_k \overset{\text{def}}{=} a_{kij}^n a_n^{ij}, \tag{6}$$

где $a_{kij}^n = \frac{1}{2}(\Lambda_{kij}^n + \Lambda_{ikj}^n)$, в случае распределения $\mathscr{H} \subset P_n$, вообще говоря, различны; в случае гиперполосы $H_m \subset P_n$ эти квазинормали совпадают. Заметим, что Λ_k и b_k удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered} d\Lambda_k + \Lambda_k\omega_0^0 - \Lambda_j\omega_k^j + (m+2)(\omega_k^0 - \Lambda_{jk}^n\omega_n^j) = \Lambda_{kK}\omega_0^K, \\ db_k + b_k\omega_0^0 - b_j\omega_k^j + (m+2)(\omega_k^0 - a_{kj}^n\omega_n^j) = b_{kK}\omega_0^K. \end{gathered} \tag{7}$$

В дифференциальной окрестности 3-го порядка определяются величины

$$T_n \overset{\text{def}}{=} \left(b_{ij} - \frac{b_i b_j}{m+2}\right)a_n^{ij}, \quad S_n \overset{\text{def}}{=} \frac{T_n}{m(m+2)} - a_n^v b_v; \tag{8}$$

отметим, что система величин $\{S_n, b_i, b_v, a_{ij}^n, B_{nv}^n\}$ есть геометрический объект 3-го порядка регулярного гиперполосного распределения $\mathscr{H} \subset P_n$.

В случае гиперполосного распределения $\mathscr{H} \subset P_n$ с симметрическим тензором Λ_{ij}^n $(\Lambda_{ij}^n = a_{ij}^n)$ имеем тензоры 2-го порядка

$$D_{ijk}^n \overset{\text{def}}{=} (m+2)\Lambda_{ijk}^n - \Lambda_{(ij}^n\Lambda_{k)}, \quad B_{ij} \overset{\text{def}}{=} \Lambda_n^{ls}\Lambda_n^{kt}D_{lst}^n D_{jlk}^n, \tag{9}$$

причем симметрический тензор B_{ij} невырожден: $B^{ik}B_{kj} = \delta_j^i$

В случае симметрического тензора $\Lambda_{ij}{}^n$ последовательно определяются величины 3-го порядка

$$\begin{gathered} \hat{\Lambda}_{ij} \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{ij} - \frac{\Lambda_i\Lambda_j}{m+2} - \frac{T_n\Lambda_{ij}^n}{m}, \\ W_{nk} \overset{\text{def}}{=} \Lambda_n^{is}\Lambda_n^{jt}\hat{\Lambda}_{ij}D_{kst}^n + (m+2)(\lambda_{nk} - \mu_{nk}), \\ W_n^i \overset{\text{def}}{=} -B^{ik}W_{nk}, \quad F_n^i \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\Lambda_n^{ik}\left(B_k - \frac{\Lambda_k}{m+2}\right), \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\lambda_{nk} = \Lambda_n^{is}\Lambda_n^{jt}D_{kst}^n c_{ij}^v a_v^0, \quad \mu_{nk} = D_{kij}^n b_{nv}^{ij} a_n^v \tag{11}$$

и компоненты квазинормали B_k входят в дифференциальное уравнение отличного от нуля относительного инварианта 2-го порядка $\tilde{B}_n$:

$$\tilde{B}_n = \Lambda_n^{ij}\Lambda_n^{st}\Lambda_n^{kl}D_{isk}^n D_{jtl}^n, \quad d\ln\tilde{B}_n + \omega_0^0 - \omega_n^n = B_K\omega_0^K.$$

Отметим, что поле каждого из квазитензоров $W_n{}^i$, $F_n{}^i$ определяет инвариантное поле нормали первого рода распределения $\mathscr{H} \subset P_n$; эти нормали в каждой точке A_0 содержат характеристику Π_{n-m-1} текущего элемента оснащающего распределения и называются, соответственно, первой директрисой Вильчинского и первой нормалью Фубини гиперполосного распределения.

Заметим также, что все построенные поля геометрических объектов имеют место также и на регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$. Из геометрических объектов распределения $\mathscr{H} \subset P_n$, не имеющих места на регулярной гиперполосе H_m, здесь приведем (при $\Lambda_{[ij]}{}^n = 0$) поля квазитензоров $M_n{}^i$, $M_i{}^0$ 2-го порядка

$$
\begin{aligned}
M_n^i &= -\frac{1}{2} \Lambda_n^{is} \left(\frac{b_s}{m+2} + \Lambda_{sn}^n + \Lambda_{sv}^n a_n^v \right), \\
M_i^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{b_i}{m+2} - \Lambda_{in}^n - \Lambda_{iv}^n a_n^v \right),
\end{aligned} \tag{12}
$$

которые определяют оснащение (в смысле А. П. Нордена [24]) Михэйлеску распределения $\mathscr{H} \subset P_n$.

§ 2. ОБЗОР РАБОТ ПО ГЕОМЕТРИИ МНОГОМЕРНЫХ ПОЛОС

1. Инвариантные оснащения полос. Как и в теории поверхностей V_m, задача внутреннего инвариантного оснащения (в смысле А. П. Нордена [24] или в смысле Э. Картана [75]) стояла как одна из проблем дифференциальной геометрии многомерных полос (в частности, гиперполос), погруженных в различные пространства; поэтому усилия ряда геометров были направлены на решение этой задачи.

В. В. Вагнер [4] изучает собственные регулярные гиперполосы H_m в центроаффинном пространстве A_n: главные касательные гиперплоскости гиперполосы не проходят через центр пространства. Здесь в качестве оснащающей нормали (первого рода) в каждой точке гиперполосы H_m берется $(n-m)$-мерная плоскость N_{n-m}, содержащая $(n-m-1)$-мерную характеристику Π_{n-m-1} главной касательной гиперплоскости и центр пространства A_n; имеет место и двойственное построение (нормаль 2-го рода).

П. М. Олоничев [25] показывает, что геометрическим местом центров базисных квадрик найденного им однопараметрического семейства соприкасающихся гиперполос для данной регулярной гиперполосы H_m, вложенной в аффинное пространство A_n, в каждой ее точке будет прямая, которая названа аффинной нормалью; эта нормаль инвариантно ассоциирована с гиперполосой H_m относительно аффинных преобразований и является аналогом известной аффинной нормали Бляшке. Плоскость N_{n-m}, натянутая на аффинную нормаль и характеристику Π_{n-m-1}, и является инвариантной нормалью (1-го рода) гиперполосы. Здесь по двойственности получена также центрально-проективная нормаль (нормаль 2-го рода) гиперполосы.

А. В. Чакмазян в статьях [61], [63], [66] находит условия, при которых естественная нормализация поверхности V_2 евклидова пространства E_4, дополненной до гиперполосы H_2, является двойственной [56] (т. е. нормальная плоскость N_2 в каждой точке поверхности $V_2 \subset E_4$ содержит характеристику главной касательной гиперплоскости; такая гиперполоса H_2 автором обозначается через D_2); а именно, условием, при котором гиперполоса $H_2 \subset E_4$ является полосой D_2, является выполнение одного из следующих требований: 1) нормальные плоскости базисной поверхности V_2 допускают огибающую; 2) ее гауссово кручение равно нулю; 3) чтобы тензоры a_{ij}, b_{ij} были кодацциевы, где $\nabla_j \bar{r}_i = a_{ij}\bar{m} + b_{ij}\bar{n}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ — единичные взаимно-перпендикулярные нормальные векторы базисной поверхности V_2; 4) чтобы поверхность V_2 допускала поле особых нормалей в смысле В. Т. Базылева [2]. В [67] А. В. Чакмазян находит это условие для гиперполосы $H_m \subset E_n$ при любом $m < n-1$: естественная нормализация базисной поверхности $V_m \subset E_n$ является двойственной тогда и только тогда, когда поверхность V_m несет ортогональную сопряженную сеть. Отметим, что в [62] им найдено аналогичное условие для гиперполосы H_2, вложенной в пространство постоянной кривизны K_4 (проективное пространство P_4 с заданным абсолютом Q_3); здесь же отмечено, что если гиперполоса $H_{n-2} \subset K_n$ допускает естественную двойственную нормализацию, то она допускает ∞^1 таких нормализаций.

В. И. Шуликовский [70] получил инвариантную двойственную нормализацию двумерной регулярной гиперполосы $H_2 \subset P_n$, сеть которой не содержит геодезических семейств (тензором сети является главный фундаментальный тензор 1-го порядка Λ_{ij}^n гиперполосы $H_2 \subset P_n$). В. В. Гольдберг и А. В. Чакмазян [12] поверхность $V_2 \subset P_4$ дополняют до гиперполосы H_2, которая полем осевых плоскостей поверхности V_2 нормализуется двойственным образом; приводится пример такой поверхности $V_2 \subset P_4$.

Ю. И. Попов [35] методом составного многообразия В. В. Вагнера построил трехпараметрическое семейство инвариантных двойственных нормализаций регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$. В работе [32] им рассматриваются некоторые специальные оснащения (нормализации) регулярных гиперполос $H_m \subset P_n$: аффинное, центральное, вынужденное осевое, тривиальное оснащения; найдены условия, при которых гиперполоса H_m допускает такие оснащения.

М. А. Василян [6] в 3-й дифференциальной окрестности элемента регулярной гиперполосы $H_{n-2} \subset P_n$ построил ее инвариантную двойственную нормализацию и в 4-й дифференциальной окрестности — инвариантное оснащение в смысле Э. Картана; в работе [8] им получены аналогичные результаты для регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ при любом $1 \leqslant m < n-1$. В [7] показано, что построение инвариантного оснащения квадратичной гиперполосы $H_{n-2} \subset P_n$ тесно связано с инвариантным оснащением гиперповерхности конформного пространства C_{n-1}, построенным М. А. Акивисом в работе [1].

Е. И. Терентьева [55] построила инвариантную двойственную нормализацию регулярной гиперполосы $H_{n-2} \subset P_n$, используя ассоциированную с данной гиперполосой вырожденную гиперповерхность $V_{n-1}{}^{n-2}$ ранга $n-2$ и связанную [33] с H_{n-2} гиперполосу $\hat{H}_{n-2}$; дается геометрическая характеристика полученной нормализации.

А. В. Столяров [47] в 3-й дифференциальной окрестности элемента регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ с существенным использованием подобъекта $\{\Lambda_{ij}^n, \Lambda_{ijk}^n, \Lambda_{ijks}^n\}$ её фундаментального объекта 3-го порядка в репере 1-го порядка получил ∞^1 инвариантных двойственных нормализаций, взаимных относительно поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик Q_{n-1}; пучок инвариантных нормалей первого рода имеет вид:

$$N_{n-m}(\tau) \equiv \left[\Pi_{n-m-1}, A_n + \{\tau \cdot F_n^i - (\tau - 1) W_n^i\} A_i + a_n^v A_v\right].$$

В частности, при $\tau=0$ имеем нормализацию Вильчинского, а при $\tau=1$ — нормализацию Фубини гиперполосы H_m.

Мы утверждаем, что в 3-й дифференциальной окрестности строится также ∞^1 инвариантных оснащений регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ в смысле Э. Картана [75]; а именно, эти оснащения определяются полями объектов $\{\nu_n{}^i, \nu_n{}^0, a_n{}^v\}$, $\{\nu_v{}^0\}$, где

$$\nu_n^i = W_n^i + \tau \cdot (F_n^i - W_n^i), \quad \nu_v^0 = -a_v^0,$$

$$\nu_n^0 = \frac{1}{2}\left[\frac{T_n}{m(m+2)} - a_v^0 a_n^v + \left(\frac{2\Lambda_k}{m+2} + \Lambda_{kj}^n \nu_n^j\right)\nu_n^k\right];$$

$\{T_n, a_v^0, a_n^v, \Lambda_k, \Lambda_{kj}^n\}$ — геометрический объект 3-го порядка гиперполосы, τ — инвариантный параметр.

В [52] А. В. Столяровым показано, что сеть, заданная на регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$ и сопряженная относительно ее главного фундаментального тензора $\Lambda_{ij}{}^n$, порождает инвариантные поля геометрических образов — поля $(n-m)$-мерных и $(m-1)$-мерных ее гармонических плоскостей; этим самым решен вопрос инвариантной двойственной нормализации регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$, индуцируемой рассматриваемой сетью, при любом m: $n-1 > m \geqslant 2$; такое оснащение гиперполосы является геометрически легко обозримым. В работе найдено также условие взаимности двойственной нормализации регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ полями гармонических плоскостей сети $\Sigma \subset H_m$, сопряженной относительно фундаментального тензора $\Lambda_{ij}{}^n$.

Ю. И. Попов в серии работ (см. [34], [36], [39]—[42], [44]) изучает вырожденные гиперполосы $H_m{}^r$ ранга r проективного пространства P_n (семейство главных касательных гиперплоскостей зависит от r существенных параметров, $r < m$). В частности, в [34] установлен тензорный признак специального класса развертывающихся гиперполос и построены различные внутренние нормализации для вырожденных гиперполос с использованием производных тензора $\Lambda_{ij}{}^n$ до 4-го порядка включительно;

в работе [36] при построении инвариантного Δ-оснащения (нормализации) M-конических развертывающихся гиперполос [34] ранга $r=\frac{m}{2}$ используются производные тензора Λ_{ij}^n не выше 3-го порядка; в [40] рассматриваются специальные нормализации гиперполосы $H_2^1 \subset P_n$: k-оснащение, полувнутреннее оснащение.

Вырожденная гиперполоса $H_m^r \subset P_n$ называется нераспадающейся (распадающейся), если характеристика Π_{n-r-1} данной гиперполосы не распадается (распадается) на две плоскости Π_s и Π_{n-m-1} ($\Pi_s \cap \Pi_{n-m-1}=\varnothing$), являющиеся плоскими образующими тангенциально вырожденных поверхностей, соответственно, V_m^r и V_{n-s-1}^r. В работе [42] Ю. И. Попов строит внутренние инвариантные оснащения (в смысле А. П. Нордена и Э. Картана) нераспадающейся гиперполосы H_m^r, а в [44] он (совместно с Т. И. Мишениной) решает аналогичную задачу для распадающейся гиперполосы H_{n-2}^r.

Е. Т. Ивлев [18] геометрически строит инвариантную нормализацию гиперполосы H_m, погруженной в пространство проективной связности $P_{n,n}$; в работе [19] им построено другое поле нормалей первого рода (отличное от [18]) гиперполосы $H_m \subset P_{n,n}$.

М. М. Похила [46] построил пучок инвариантных нормалей первого рода, пучок инвариантных нормалей второго рода и ∞^1 оснащений (в смысле Э. Картана) базисной поверхности V_m обобщенной [45] m-мерной полосы в P_n.

А. В. Столяров [49] показал, что в разных дифференциальных окрестностях следующие характерные поля нормалей ν_n^i, ν_i^0 внутренним образом определяют инвариантную двойственную нормализацию регулярного гиперполосного распределения $\mathscr{H} \subset P_n$:

1) в 1-й дифференциальной окрестности — поля нормалей L_n^i, L_i^0;

2) в 3-й дифференциальной окрестности — поля первого аналога нормалей Фубини Φ_n^i, Φ_i^0;

3) в случае симметрического тензора Λ_{ij}^n:

а) во 2-й дифференциальной окрестности — поля нормалей Михэйлеску M_n^i, M_i^0 (см. (12));

б) в 3-й дифференциальной окрестности — поля нормалей Вильчинского W_n^i, W_i^0;

в) в 3-й дифференциальной окрестности — поля второго аналога нормалей Фубини F_n^i, F_i^0. На взаимных распределениях $\mathscr{H} \subset P_n$ с симметрическим тензором Λ_{ij}^n и на голономных распределениях $\mathscr{H}$ (а следовательно, и на регулярных гиперполосах $H_m \subset P_n$) обе нормализации Фубини совпадают.

Показано [49], что в каждом центре распределения $\mathscr{H} \subset P_n$ построенные автором инвариантные оснащающие (в смысле Э. Картана) плоскости $N_{n-m-1}(\nu)$ (плоскости Кенигса) всех нормалей первого рода $N_{n-m}(\nu)$ принадлежат одной связке, $(n-m-2)$-мерная вершина которой лежит в характеристике Π_{n-m-1}; плоскости Кёнигса всех инвариантных нормалей $N_{n-m}(\nu)$, связанных с данным центром распределения $\mathscr{H}\subset P_n$, лежат на одной гиперквадрике Боля, которая является вырожденной (в отличие от гиперквадрики Боля на распределении гиперплоскостных элементов [28]).

Ю. Г. Лумисте и А. В. Чакмазян [22] рассматривают m-мерное дифференцируемое многообразие M_m, погруженное в n-мерное односвязное риманово пространство $V_n{}^c$ постоянной кривизны c. Здесь показано, что подмногообразие $M_m\subset V_n{}^c$ допускает ненулевое параллельное нормальное векторное поле ξ тогда и только тогда, когда M_m двойственно нормализуемо; при этом характеристика главной касательной гиперплоскости Π_x гиперполосы определяется ортогональным дополнением вектора ξ_x в векторном пространстве N_xM_m нормального расслоения NM_m.

2. Исследования по геометрии гиперполос в однородных пространствах. Согласно работе В. В. Вагнера [4], m-мерной центральной гиперполосой второго порядка называется гиперполоса, у которой базисной поверхностью является m-мерная квадрика с центром, совпадающим с центром центроаффинного пространства A_n, и главные касательные гиперплоскости которой параллельны одному и тому же $(n-m-1)$-направлению; в работе для данной гиперполосы $H_m\subset A_n$ найдено поле m-мерных инвариантных соприкасающихся центральных гиперполос второго порядка. Здесь изучаются также некоторые специальные виды регулярных гиперполос $H_m\subset A_n$: гиперполосы с центрально-плоской базисной поверхностью, гиперполосы с собственно плоской базисной поверхностью, а также образы, двойственные этим гиперполосам; находится условие инцидентности гиперполосы H_m невырожденной гиперквадрике с центром в центре A_n, а также получено условие, при котором данная регулярная гиперполоса $H_m\subset A_n$ является центральной гиперполосой 2-го порядка.

Диссертация И. С. Тарасова [54] посвящена построению теории регулярной несобственной гиперполосы H_m в центрально-аффинном пространстве A_n: все главные касательные гиперплоскости гиперполосы проходят через центр пространства A_n; в первой главе указанной работы строится теория регулярной несобственной гиперполосы с собственной базисной поверхностью (несобственная гиперполоса 1-го рода), а во второй главе — с несобственной (несобственная гиперполоса 2-го рода).

В работе С. М. Чашечникова [68] строится (с использованием результатов [54]) теория поля локальных несобственных гиперполос (как первого, так и второго рода) в дифференциально-геометрическом пространстве X_n (в X_n задано поле локальных m-мерных несобственных гиперполос первого (второго) рода, если в каждом A_n, ассоциированном с соответствующей точкой X_n, задана несобственная m-мерная гиперполоса первого (второго) рода).

А. В. Чакмазян [57], [59]—[61], [64] изучает некоторые вопросы геометрии регулярной гиперполосы H_2, являющейся полосой D_2 и вложенной в евклидово пространство E_4. В частности, в работе [57] показано, что если главная сеть (общая биссекторная сеть тензоров h_{ij} и k_{ij}) на $D_2 \subset E_4$ чебышевская, то она является сетью переноса на поверхности, образованной движением одной кривой по другой, расположенных в двух вполне ортогональных плоскостях. Автором найден [60] аналог формулы Эйлера для полосы $D_2 \subset E_4$, изучаются главные сечения и асимптотические линии на гиперполосе. В работе [64] выясняется, что для $D_2 \subset E_4$ эллипс индикатрисы кривизны вырождается в отрезок прямой; в случае, когда эта прямая проходит через точку $A \in D_2$, базисная поверхность V_2 лежит в E_3. Наконец, в работе [63] автор показывает, что нормальные плоскости гиперполосы $D_m \subset E_{2m}$ допускают огибающую поверхность, которая им названа эволютной поверхностью.

Гиперполоса $H_m \subset P_n$ называется конической, если ее гиперповерхность $V_{n-1}{}^m$ (огибающая семейства главных касательных гиперплоскостей) является гиперконусом, вершиной которого служит неподвижная плоскость Π_{n-m-2}; гиперполоса называется плоской, если ее базисная поверхность V_m лежит в неподвижной плоскости Π_{m+1}. М. А. Василяном [8] найдены инвариантные аналитические условия вырождения регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ $(2 \leqslant m < n-1)$ в коническую или плоскую.

Регулярная гиперполоса $H_m \subset P_n$ называется квадратичной [8], если ее базисная поверхность V_m лежит на невырожденной неподвижной гиперквадрике Q^2_{n-1}, причем семейством главных касательных гиперплоскостей гиперполосы служит семейство касательных плоскостей гиперквадрики $Q_{n-1}{}^2$ в точках $A_0 \in V_m$; в [8] показано, что элементы построенного ее автором инвариантного репера для квадратичной гиперполосы являются полярно сопряженными относительно Q^2_{n-1}. Но следует заметить, что в работе [8] (а также в [7]) ее автором условие квадратичности гиперполосы $H_m \subset P_n$ не найдено; ниже будет приведено это условие, найденное нами в [48].

В [33] Ю. И. Поповым в проективном пространстве P_n исследуются регулярные гиперполосы с общим оснащением (нормализацией), в частности, с совпадающими и несовпадающими характеристическими плоскостями. В [38] им найдены условия погружения базисной поверхности V_m регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ в пространство $P_{n'}$, $n' < n$; при этом гиперполоса предполагается нормализованной. Ю. И. Попов в работах [40], [42], [44] изучает некоторые вопросы геометрии вырожденных гиперполос $H_m{}^r \subset P_n$ ранга r. В частности, в [42] в 3-й дифференциальной окрестности получено поле двупараметрической связки внутренне присоединенных к вырожденной нераспадающейся гиперполосе $H_m^r \subset P_n$ инвариантных соприкасающихся гиперквадрик.

Согласно [15] (см. также [80]), $(m-1)$-мерной полосой H_{m-1} в n-мерном эквиаффинном (соответственно, в римановом) пространстве называется $(m-1)$-мерная поверхность V_{m-1}, в каждой точке которой заданы $n-m$ линейно независимых векторов $\bar{n}_\alpha$ так, что $(n-m)$-мерная плоскость $B_{n-m} \equiv [\bar{n}_\alpha]$ не имеет общих направлений с касательной $(m-1)$-плоскостью поверхности V_{m-1}. Говорят, что оснащенная m-поверхность $V_m: \{\bar{r}(u^i), \bar{n}_\alpha(u^i)\}$, где $\bar{r} = \bar{r}(u^i)$ — уравнение m-поверхности V_m, а $\{\bar{n}_\alpha(u^i)\}$ — реперы в оснащающих $(n-m)$-плоскостях N_{n-m}, проходит через полосу H_{m-1}, если все точки базисной поверхности V_{m-1} принадлежат V_m и в каждой точке $N_{n-m} \equiv B_{n-m}$. Натуральными уравнениями оснащенной m-поверхности V_m называются такие соотношения между инвариантами оснащенной V_m и специальными параметрами на ней, которые определяют единственную оснащенную m-поверхность, проходящую через заданную полосу H_{m-1}.

В работе Лейхтвейсса [80] доказано, что через заданную аналитическую $(m-1)$-мерную полосу H_{m-1} в римановом n-пространстве проходит единственная аналитическая m-мерная поверхность с заданным полем вектора средней кривизны [53]. Б. А. Иванов [14] доказал, что через данную полосу H_{m-1} n-мерного эквиаффинного пространства проходит единственная поверхность V_m с натуральным уравнением $H = \varphi(p^i)$, где H — средняя кривизна, а φ — произвольная функция; этот вопрос в иной формулировке рассматривался Лейхтвейссом [81].

Теорема о натуральных уравнениях m-поверхности евклидова пространства E_n доказана Лейхтвейссом [81]. Основная теорема о натуральных уравнениях специально оснащенной m-поверхности n-мерного эквиаффинного пространства доказана Б. А. Ивановым [15]; в [17] им эта теорема формулируется для двух конкретных специальных типов оснащения (нулевого и нормального); в [16] рассматриваются аналогичные вопросы в евклидовом пространстве E_4 при $m=2$. К указанным выше работам Б. А. Иванова тесно примыкает статья А. В. Бритова [3]; здесь рассматривается двумерная поверхность V_2 в аффинном пространстве A_4, инвариантно оснащенная плоскостями Бурстина—Майера [74], отнесенная к полугеодезической системе координат и оснащающие векторы которой ковариантно постоянны вдоль геодезических линий.

А. В. Столяров [47] с помощью построенной им последовательности полей фундаментальных геометрических объектов доказал, что фундаментальный геометрический объект 4-го порядка регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ $(2 \leqslant m < n-1)$ является полным, т. е. при задании этого объекта гиперполоса H_m определяется в пространстве P_n с точностью до проективного преобразования пространства; здесь же в третьей дифференциальной окрестности элемента гиперполосы найдено поле двупараметрической связки инвариантных соприкасающихся гиперквадрик; при нулевых параметрах σ_1 и σ_2 связки имеем поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик, уравнения которых в точечном репере 1-го порядка записываются в виде

$$\Lambda_{ij}^n x^i x^j + \frac{2\Lambda_i}{m+2} x^i x^n + B_{uv}^n x^u x^v + 2b_v x^v x^n + S_n (x^n)^2 = 2x^0 x^n. \quad (13)$$

Найдено [48] инвариантное аналитическое условие квадратичности регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$, а именно, условием ее квадратичности является одновременное обращение в нуль трех тензоров — $D_{ijk}{}^n$ (тензор Дарбу гиперполосы), $D_{vi}{}^k$, $D_{uvk}{}^n$; при этом базисная поверхность V_m гиперполосы лежит на неподвижной гиперквадрике (13). Согласно этому, касание 3-го порядка (т. е. равенство нулю тензора Дарбу $D_{ijk}{}^n$) соприкасающихся гиперквадрик (13) с гиперполосой $H_m \subset P_n$ не служит достаточным условием ее квадратичности (для этого требуется касание порядка выше третьего).

В случае регулярного гиперполосного распределения $\mathscr{H} \subset P_n$ m-мерных линейных элементов нами найдены [49] три поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик и, соответственно, три поля тензора Дарбу (точнее было бы говорить о множестве таких полей, но, имея в виду однотипный закон охвата коэффициентов гиперквадрик и тензоров Дарбу, мы будем говорить о трех полях соприкасающихся гиперквадрик и тензоров Дарбу). Например, соприкасающиеся гиперквадрики 3-го поля имеют уравнение:

$$a_{ij}^n x^i x^j + \frac{2b_i}{m+2} x^i x^n + B_{uv}^n x^u x^v + 2b_v x^v x^n + S_n (x^n)^2 = 2x^0 x^n. \quad (14)$$

В случае $\Lambda_{[ij]}{}^n = 0$, найден геометрический смысл тензоров Дарбу. Отметим, что для регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ из этих трех полей инвариантных соприкасающихся гиперквадрик и трех полей тензоров Дарбу имеет место лишь по одному полю: поле гиперквадрик (13) и поле тензора $D_{ijk}{}^n$ (см. (9)).

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ОСНАЩЕННЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ГИПЕРПОЛОСАХ

1. Двойственные аффинные связности на нормализованной регулярной гиперполосе. Предположим, что регулярное гиперполосное распределение $\mathscr{H} \subset P_n$ оснащено в смысле А. П. Нордена [24] двойственным образом полями квазитензоров $\nu_n{}^i$, $\nu_i{}^0$:

$$d\nu_n^i - \nu_n^i \omega_n^n + \nu_n^j \omega_j^i + \omega_n^i = \nu_{nK}^i \omega_0^K,$$
$$d\nu_i^0 - \nu_j^0 \omega_i^j + \nu_i^0 \omega_0^0 + \omega_i^0 = \nu_{iK}^0 \omega_0^K. \quad (15)$$

Система форм $\left\{ \overset{1}{\theta}{}_j^i \right\}$, где

$$\overset{1}{\theta}{}_0^i = \omega_0^i - \nu_n^i \omega_0^n,$$

$$\overset{1}{\theta}{}_j^i = \omega_j^i - \nu_n^i \omega_j^n - \delta_j^i (\omega_0^0 - \overset{1}{\theta}{}_0^k \nu_k^0) - N_{vj}^i \omega_0^v - \tag{16}$$
$$- (\nu_{nj}^i - \Lambda_{kj}^n \nu_n^k \nu_n^i + \nu_n^i \nu_j^0) \omega_0^n + \nu_j^0 \omega_0^i,$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана—Лаптева [20], [29]:

$$D\overset{1}{\theta}{}_{\bar{J}}^{\bar{I}} = \overset{1}{\theta}{}_{\bar{J}}^{\bar{k}} \wedge \overset{1}{\theta}{}_k^{\bar{I}} + \frac{1}{2} \overset{1}{r}{}_{\bar{J}KL}^{\bar{I}} \omega_0^K \wedge \omega_0^L, \tag{17}$$

а следовательно, определяет пространство $\overset{1}{A}_{n,m}$ с линейной связностью $\overset{1}{\nabla}$; эту связность назовем первой линейной связностью аффинного типа, индуцируемой двойственной нормализацией $\mathcal{H} \subset P_n$.

Согласно [21], другая линейная связность аффинного типа $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемая нормализацией распределения $\mathcal{H} \subset P_n$, определяется системой форм $\overset{2}{\theta}{}_{\bar{J}}^{\bar{I}}$, где

$$\overset{2}{\theta}{}_{\bar{J}}^{\bar{I}} = \overset{1}{\theta}{}_{\bar{J}}^{\bar{I}} + \Gamma_{\bar{J}K}^{\bar{I}} \omega_0^K.$$

Требование того, чтобы формы $\overset{2}{\theta}{}_{\bar{J}}^{\bar{I}}$ удовлетворяли структурным уравнениям Картана—Лаптева, в силу (1), (16), (17), равносильно выполнению следующей системы дифференциальных уравнений:

$$d\Gamma_{0K}^i - \Gamma_{0L}^i \omega_K^L + \Gamma_{0K}^s \omega_s^i = \Gamma_{0KL}^i \omega_0^L,$$
$$d\Gamma_{jK}^i + \Gamma_{jK}^i \omega_0^0 - \Gamma_{js}^i \omega_k^s - \Gamma_{sk}^i \omega_j^s + \Gamma_{jk}^s \omega_s^i = \Gamma_{jkL}^i \omega_0^L,$$
$$d\Gamma_{jv}^i + \Gamma_{jv}^i \omega_0^0 - \Gamma_{ju}^i \omega_v^u - \Gamma_{sv}^i \omega_j^s + \Gamma_{jv}^s \omega_s^i = \Gamma_{jvL}^i \omega_0^L, \tag{18}$$
$$d\Gamma_{jn}^i + \Gamma_{jn}^i (\omega_0^0 - \omega_n^n) - \Gamma_{sn}^i \omega_j^s + \Gamma_{jn}^s \omega_s^i - \Gamma_{js}^i \omega_n^s - \Gamma_{jv}^i \omega_n^v = \Gamma_{jnL}^i \omega_0^L.$$

Следующие охваты удовлетворяют уравнениям (18):

$$H_{0K}^i = 0, \tag{19$_1$}$$

$$H_{jk}^i \overset{\text{def}}{=} \Lambda_n^{il} \Lambda_{ljk}^n - \delta_j^i (\nu_k^0 - \Lambda_{sk}^n \nu_n^s) - \delta_k^i (\nu_j^0 - \Lambda_{sj}^n \nu_n^s) -$$
$$- \Lambda_n^{il} \Lambda_{kj}^n \nu_l^0 + \Lambda_{jk}^n \nu_n^i + \tau_1 \Lambda_n^{il} (\Lambda_{l\beta}^n \Lambda_{jk}^\beta + \Lambda_{jk}^n \nu_l^0 + \Lambda_{ls}^n \Lambda_{jk}^n \nu_n^s), \tag{19$_2$}$$

$$H_{jv}^i \overset{\text{def}}{=} \Lambda_n^{il} (\Lambda_{ljv}^n + \Lambda_{lj}^n a_v^0 + \Lambda_{lj}^u A_{uv}^n) +$$
$$+ \delta_j^i \Lambda_{sv}^n \nu_n^s + \Lambda_{jv}^n \nu_n^i + \Lambda_n^{il} \Lambda_{sj}^n \Lambda_{lv}^n \nu_n^s +$$
$$+ \tau_2 \Lambda_n^{il} (\Lambda_{l\beta}^n \Lambda_{jv}^\beta + \Lambda_{lv}^n \nu_j^0 + \Lambda_{jv}^n \nu_l^0 + \Lambda_{ls}^n \Lambda_{jv}^n \nu_n^s), \tag{19$_3$}$$

$$H_{jn}^i \overset{\text{def}}{=} \Lambda_n^{il} (\Lambda_{ljn}^n + \Lambda_{lj}^v A_{vn}^n - \Lambda_{lj}^v a_v^0 + \Lambda_{ln}^n \Lambda_{sj}^n \nu_n^s +$$

$$+\Lambda^n_{sj}\nu^0_l\nu^s_n)+(\Lambda^n_{jn}+\nu^0_j)\nu^l_n+\delta^l_j(\Lambda^n_{sn}+\nu^0_s)\nu^s_n-$$
$$-\tau_1\Lambda^{il}_n(\Lambda^n_{l\beta}\Lambda^\beta_{js}+\Lambda^n_{js}\nu^0_l+\Lambda^n_{lk}\Lambda^n_{js}\nu^k_n)\nu^s_n-$$
$$-\tau_2\Lambda^{il}_n(\Lambda^n_{l\beta}\Lambda^\beta_{jv}+\Lambda^n_{lv}\nu^0_j+\Lambda^n_{jv}\nu^0_l+\Lambda^n_{ls}\Lambda^n_{jv}\nu^s_n)a^v_n; \qquad (19_4)$$

здесь τ_1 и τ_2 — инвариантные параметры. Следовательно, справедлива

Теорема. Двойственная нормализация регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов $\mathcal{H}\subset P_n$, кроме первого пространства $\overset{1}{A}_{n,m}$ с линейной связностью аффинного типа $\overset{1}{\nabla}$, индуцирует двупараметрическое семейство вторых пространств $\overset{2}{A}_{n,m}$ с линейной связностью аффинного типа $\overset{2}{\nabla}$; при каждом фиксированном τ_1 и τ_2 тензор деформации связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ имеет строение (19_{1-4}), причем каждая из систем величин H^l_{jk}, H^l_{jv} является подтензором тензора деформации.

Рассмотрим гиперполосное распределение $\mathcal{H}\subset P_n$ с симметрическим тензором $\Lambda_{ij}{}^n$. Пусть для такого распределения при некоторой его двойственной нормализации, взаимной относительно поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик (14), подтензор $H_{jk}{}^i$ при $\tau_1=-1$ равен нулю; следовательно, имеют место равенства:

$$b_l=(m+2)(\nu^0_l-\Lambda^n_{ls}\nu^s_n); \qquad (20)$$

$$\Lambda^{il}_n\Lambda^n_{ljk}-\delta^i_j(\nu^0_k-\Lambda^n_{sk}\nu^s_n)-\delta^i_k(\nu^0_j-\Lambda^n_{sj}\nu^s_n)-$$
$$-\Lambda^n_{jk}\Lambda^{il}_n(\nu^0_l-\Lambda^n_{ls}\nu^s_n)-\Lambda^{il}_n\Lambda^n_{l\alpha}\Lambda^\alpha_{jk}-\Lambda^n_{jk}\Lambda^{il}_n(\nu^0_l+\Lambda^n_{ls}\nu^s_n)=0.$$

Из этих равенств находим:

$$\Lambda^n_{ljk}-\frac{1}{m+2}\Lambda^n_{(ij}b_{k)}-\Lambda^n_{l\alpha}\Lambda^\alpha_{jk}-\Lambda^n_{jk}(\nu^0_l+\Lambda^n_{ls}\nu^s_n)=0;$$

свертывая последние соотношения с Λ^{jk}_n, с учетом (3), (6) получим

$$\Lambda^n_{iv}a^v_n+\Lambda^n_{in}+\nu^0_i+\Lambda^n_{is}\nu^s_n=0.$$

Последние равенства с учетом (12), (20) говорят о том, что $\nu_n{}^i=M_n{}^i$, $\nu_i{}^0=M_i{}^0$. Доказана

Теорема. Если для некоторой двойственной нормализации регулярного распределения $\mathcal{H}\subset P_n$ с симметрическим тензором $\Lambda_{ij}{}^n$, взаимной относительно поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик (14), подтензор $H_{jk}{}^i$ тензора деформации при $\tau_1=-1$ обращается в нуль, то данная нормализация является нормализацией Михэйлеску.

В случае регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ первая и вторая связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ определяются, соответственно, системами форм (см. (16) и охват (19_2) без коэффициентов при τ_1)

$$\overset{1}{\theta}{}_0^i = \omega_0^i, \quad \overset{1}{\theta}{}_j^i = \omega_j^i - \nu_n^i \omega_j^n - \delta_j^i (\omega_0^0 - \nu_k^0 \omega_0^k) + \nu_j^0 \omega_0^i; \tag{21}$$

$$\overset{2}{\theta}{}_0^i = \omega_0^i, \quad \overset{2}{\theta}{}_j^i = \overset{1}{\theta}{}_j^i + [\Lambda_n^{il} \Lambda_{ljk}^n - \delta_j^i (\nu_k^0 - \Lambda_{ks}^n \nu_n^s) -$$
$$- \delta_k^i (\nu_j^0 - \Lambda_{js}^n \nu_n^s) - \Lambda_n^{il} \Lambda_{jk}^n (\nu_l^0 - \Lambda_{ls}^n \nu_n^l)] \omega_0^k. \tag{22}$$

При этом соответствующие пространства $\overset{1}{A}_{m,m}$ и $\overset{2}{A}_{m,m}$ являются пространствами аффинной связности без кручения; тензоры кривизны этих пространств имеют следующие строения:

$$\overset{1}{r}{}_{jst}^i = 2 (\Lambda_{j[s}^v N_{|v|t]}^i - \nu_{n[s}^i \Lambda_{t]j}^n - \delta_j^i \nu_{[st]}^0 + \nu_{j[s}^0 \delta_{t]}^i -$$
$$- \nu_n^k \nu_n^l \Lambda_{j[s}^n \Lambda_{t]k}^n + \nu_n^k \nu_k^0 \Lambda_{j[s}^n \delta_{t]}^i - \nu_j^0 \nu_{[s}^0 \delta_{t]}^i); \tag{23}$$

$$\overset{2}{r}{}_{jst}^i = 2 (\Lambda_{kj}^n \nu_{n[s}^k \delta_{t]}^i + \nu_k^0 \nu_n^k \Lambda_{j[s}^n \delta_{t]}^i -$$
$$- \Lambda_{jk}^n \Lambda_n^{il} \Lambda_{l[s}^v N_{|v|t]}^k - \Lambda_n^{ik} \nu_{k[s}^0 \Lambda_{t]j}^n - \delta_j^i \Lambda_{k[s}^n \nu_{|n|t]}^k -$$
$$- \Lambda_n^{il} \nu_l^0 \Lambda_{j[s}^n \nu_{t]}^0 - \Lambda_{ll}^n \nu_n^l \nu_n^k \Lambda_{k[s}^n \delta_{t]}^i). \tag{24}$$

Согласно [51], преобразование форм $\omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}$ по закону

$$\overline{\omega}_0^n = \omega_0^n = 0, \quad \overline{\omega}_0^v = \omega_0^v = 0, \quad \overline{\omega}_v^n = \omega_v^n = 0, \quad \overline{\omega}_0^i = \omega_0^i,$$
$$\overline{\omega}_0^0 = -\omega_n^n, \quad \overline{\omega}_n^n = -\omega_0^0, \quad \overline{\omega}_i^n = -\Lambda_{ik}^n \omega_0^k,$$
$$\overline{\omega}_j^i = \omega_j^i - \delta_j^i (\omega_0^0 + \omega_n^n) + \Lambda_n^{is} \Lambda_{sjk}^n \omega_0^k, \tag{25}$$
$$\overline{\omega}_n^0 = \omega_n^0, \quad \overline{\omega}_i^0 = \Lambda_{ik}^n \omega_n^k, \quad \overline{\omega}_n^i = -\Lambda_n^{ik} \omega_k^0, \quad \overline{\omega}_v^u = -\omega_u^v;$$
$$\overline{\omega}_i^v = -\Lambda_{ik}^n \omega_v^k, \quad \overline{\omega}_v^i = -\Lambda_n^{ik} \omega_k^v, \quad \overline{\omega}_n^v = -\omega_v^0, \quad \overline{\omega}_v^0 = \omega_n^v \tag{*}$$

является почти инволютивным (инволютивность нарушается лишь по отношению к формам (25—*)). Заметим, что формы $\overline{\omega}_{\overline{I}}^{\overline{K}}$ определяют инфинитезимальное перемещение тангенциального репера $\{\xi_{\overline{I}}\}$ пространства P_n, присоединенного к элементу гиперполосы H_m: $d\xi_{\overline{I}} = \overline{\omega}_{\overline{I}}^{\overline{K}} \xi_{\overline{K}}$, где

$$\xi_0 = [A_0 A_1 \ldots A_{n-1}], \quad \xi_n = [A_n A_1 \ldots A_{n-1}],$$
$$\xi_i = \sum_j \Lambda_{ji}^n [A_0 A_1 \ldots A_{j-1} A_n A_{j+1} \ldots A_{n-1}],$$
$$\xi_v = [A_0 A_1 \ldots A_m A_{m+1} \ldots A_{v-1} A_n A_{v+1} \ldots A_{n-1}].$$

Согласно (25), имеем

$$\overline{\Lambda}_{ij}^n = -\Lambda_{ij}^n. \tag{26}$$

Из уравнений (2) в силу $\omega_0^\alpha=0$, с учетом (25), (26) находим

$$d\overline{\Lambda}_{ij}^n+\overline{\Lambda}_{ij}^n(\overline{\omega}_0^0+\overline{\omega}_n^n)-\overline{\Lambda}_{ik}^n\overline{\omega}_j^k-\overline{\Lambda}_{kj}^n\overline{\omega}_i^k=\overline{\Lambda}_{ijk}^n\omega_0^k,$$

где

$$\overline{\Lambda}_{ijk}^n=\Lambda_{ijk}^n. \qquad (27)$$

Если обозначить

$$\overline{\nu}_n^i=-\Lambda_n^{ik}\nu_k^0,\quad \overline{\nu}_i^0=\Lambda_{ki}^n\nu_n^k, \qquad (28)$$

то система уравнений (15), в силу (25)—(27), $\omega_0^\alpha=0$ равносильна системе

$$d\overline{\nu}_n^i+\overline{\nu}_n^k\overline{\omega}_k^i-\overline{\nu}_n^i\overline{\omega}_n^n+\overline{\omega}_n^i=\overline{\nu}_{nk}^i\omega_0^k,$$
$$d\overline{\nu}_i^0-\overline{\nu}_k^0\overline{\omega}_i^k+\overline{\nu}_i^0\overline{\omega}_0^0+\overline{\omega}_i^0=\overline{\nu}_{ik}^0\omega_0^k,$$

где $\overline{\nu}_{nk}^i=-\Lambda_n^{is}\nu_{sk}^0$, $\overline{\nu}_{ik}^0=\Lambda_{si}^n\nu_{nk}^s$. Следовательно, поля объектов $\{\overline{\nu}_n^i\}$, $\{\overline{\nu}_i^0\}$ определяют нормализацию двойственного образа регулярной гиперполосы $H_m\subset P_n$.

Формы аффинной связности $\overset{1}{\nabla}$ через формы связности $\overset{2}{\nabla}$, в силу (22), (25)—(28), выражаются следующим образом:

$$\overset{1}{\theta}{}_0^i=\overset{2}{\theta}{}_0^i=\omega_0^i,$$
$$\overset{1}{\theta}{}_j^i=\overset{2}{\theta}{}_j^i+\left[\overline{\Lambda}_n^{il}\overline{\Lambda}_{ljk}^n-\delta_j^i\left(\overline{\nu}_k^0-\overline{\Lambda}_{ks}^n\overline{\nu}_n^s\right)-\delta_k^i\left(\overline{\nu}_j^0-\overline{\Lambda}_{js}^n\overline{\nu}_n^s\right)-\right.$$
$$\left.-\overline{\Lambda}_n^{il}\overline{\Lambda}_{jk}^n\left(\overline{\nu}_l^0-\overline{\Lambda}_{ls}^n\overline{\nu}_n^s\right)\right]\omega_0^k;$$

следовательно, формы аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ преобразуются друг в друга по инволютивному закону, в силу чего пространства аффинной связности $\overset{1}{A}_{m,m}$ и $\overset{2}{A}_{m,m}$ являются двойственными [51]. Доказана

Теорема. При двойственной нормализации регулярной гиперполосы $H_m\subset P_n$ индуцируются два двойственные пространства аффинной связности без кручения (двойственность относительно преобразования по закону (25)); связности этих пространств определяются системами форм (21), (22) и тензоры кривизны их имеют, соответственно, строения (23), (24).

Связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ сопряжены [24] относительно главного фундаментального тензора Λ_{ij}^n гиперполосы $H_m\subset P_n$, ибо справедливо

$$d\Lambda_{ij}^n-\Lambda_{ik}^n\overset{2}{\theta}{}_j^k-\Lambda_{kj}^n\overset{1}{\theta}{}_i^k=\Lambda_{ij}^n\left(\omega_0^0-\omega_n^n-\nu_s^0\omega_0^s-\nu_n^s\omega_s^n\right); \qquad (29)$$

этот результат отмечен ранее А. В. Чакмазяном в работе [56].

Аффинная связность $\overset{0}{\nabla}$, средняя по отношению к $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, определяется системой форм $\left\{\omega_0^i, \overset{0}{\theta}{}_j^i \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\overset{1}{\theta}{}_j^i + \overset{2}{\theta}{}_j^i)\right\}$. Согласно (29), имеем:

$$d\Lambda_{ij}^n - \Lambda_{ik}^n \overset{0}{\theta}{}_j^k - \Lambda_{kj}^n \overset{0}{\theta}{}_i^k = \Lambda_{ij}^n (\omega_0^0 - \omega_n^n - \nu_s^0 \omega_0^s - \nu_n^s \omega_s^n);$$

следовательно, средняя связность $\overset{0}{\nabla}$ является вейлевой.

Форма $\theta \overset{\text{def}}{=} \omega_0^0 - \omega_n^n - \nu_s^0 \omega_0^s - \nu_n^s \omega_s^n$ является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда кососимметрический тензор $\nu_{[ij]}^0 - \nu_{n[i}^s \Lambda_{j]s}^n$ обращается в нуль:

$$\nu_{[ij]}^0 - \nu_{n[i}^s \Lambda_{j]s}^n = 0. \tag{30}$$

Следовательно, (30) есть условие эквиаффинности связности $\overset{0}{\nabla}$, т. е. условие ее римановости.

Двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ на регулярной гиперполосе частично изучались различными авторами. Так, например, В. В. Вагнер [4] находит две инвариантные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ без кручения, индуцируемые центроаффинным оснащением регулярной гиперполосы $H_m \subset A_n$; здесь показано, что средняя аффинная связность $\overset{0}{\nabla}$ является римановой связностью с метрическим тензором Λ_{ij}^n. П. М. Олоничев [25] также находит две симметрические аффинные связности, индуцируемые построенной им инвариантной нормализацией регулярной гиперполосы $H_m \subset A_n$. С. М. Чашечников [68] изучает инвариантные аффинные связности в составном многообразии, соответствующем полю локальных несобственных гиперполос первого (второго) рода.

Некоторые вопросы геометрии двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемых двойственной нормализацией регулярной (вырожденной) гиперполосы $H_m \subset P_n$, изучаются в работах Ю. И. Попова [32], [38], [40], [43], М. А. Василяна [10], А. В. Столярова [48], [52]. В частности, в [48] нами получены следующие результаты:

а) Аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ на двойственно нормализованной регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$ совпадают тогда и только тогда, когда данная нормализация является взаимной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (13) и гиперквадрики этого поля с данной гиперполосой имеют касание 3-го порядка; при этом соответствующая связность является римановой.

б) Аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые взаимной двойственной нормализацией регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$, могут быть эквиаффинными лишь одновременно; аналитическим условием их эквиаффинности является соотношение (30).

в) Двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые нормализацией Фубини (F^i_n, F^0_i) регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$, — эквиаффинны, а их средняя геометрия — риманова с метрическим тензором Λ^n_{ij}.

г) Если при некоторой взаимной двойственной нормализации регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ тензоры Риччи двойственных аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ совпадают, то данная нормализация является нормализацией Вильчинского (W^i_n, W^0_i).

2. Двойственные проективные связности на оснащенной регулярной гиперполосе. Предположим, что регулярная гиперполоса $H_m \subset P_n$ оснащена в смысле Э. Картана [75] полем плоскостей $N_{n-m-1}(A_0) \equiv [K_n, N_v]$, где

$$K_n = A_n + \overset{0}{\nu_n} A_0 + \nu^i_n A_i + a^v_n A_v, \qquad N_v = \nu^0_v A_0 + A_v, \tag{31}$$

причем

$$\begin{gathered} d\nu^i_n + \nu^j_n \omega^i_j - \nu^i_n \omega^n_n + \omega^i_n = \nu^i_{nk} \omega^k_0, \\ d\nu^0_n + \nu^0_n (\omega^0_0 - \omega^n_n) + \nu^j_n \omega^0_j + a^v_n \omega^0_v + \omega^0_n = \nu^0_{nk} \omega^k_0, \\ d\nu^0_v + \nu^0_v \omega^0_0 - \nu^0_u \omega^u_v + \omega^0_v = \nu^0_{vk} \omega^k_0. \end{gathered} \tag{32}$$

Заметим, что прямая $h \equiv [A_0 K_n]$ инвариантна относительно преобразований стационарной подгруппы элемента гиперполосы H_m.

Нами показано, что система форм $\{\overset{1}{\omega}{}^{\bar J}_{\bar I}\}$, где

$$\begin{gathered} \overset{1}{\omega}{}^i_0 = \omega^i_0, \quad \overset{1}{\omega}{}^0_0 = \omega^0_0, \quad \overset{1}{\omega}{}^j_i = \omega^j_i - \Lambda^n_{ik} \nu^j_n \omega^k_0, \\ \overset{1}{\omega}{}^0_i = \omega^0_i - (\Lambda^n_{ik} \nu^0_n - \Lambda^n_{ik} a^v_n \nu^0_v + \Lambda^v_{ik} \nu^0_v) \omega^k_0, \end{gathered} \tag{33}$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [20], [29]

$$D \overset{1}{\omega}{}^{\bar J}_{\bar I} = \overset{1}{\omega}{}^{\bar K}_{\bar I} \wedge \overset{1}{\omega}{}^{\bar J}_{\bar K} + \frac{1}{2} \overset{1}{R}{}^{\bar J}_{\bar I st} \omega^s_0 \wedge \omega^t_0, \tag{34}$$

а следовательно, определяет первое пространство проективной связности $\overset{1}{P}_{m,m}$; в структурных уравнениях (34) компоненты тензора кривизны-кручения пространства $\overset{1}{P}_{m,m}$ имеют следующие строения:

$$\overset{1}{R}{}^{j}_{0st}=0, \quad \overset{1}{R}{}^{0}_{0st}=0,$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{R}{}^{j}_{ist}=2\,(&\Lambda^{n}_{i[s}\nu^{j}_{|n|t]}+\Lambda^{n}_{i[s}\delta^{j}_{t]}\nu^{0}_{n}+\Lambda^{v}_{i[s}\delta^{j}_{t]}\nu^{0}_{v}-\\ &-\Lambda^{n}_{i[s}\delta^{j}_{t]}a^{v}_{n}\nu^{0}_{v}+\Lambda^{n}_{l[s}\Lambda^{n}_{t]i}\nu^{j}_{n}\nu^{l}_{n}+\Lambda^{v}_{i[s}N^{j}_{|v|t]}),\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{R}{}^{0}_{ist}=2\,[&\Lambda^{n}_{i[s}\nu^{0}_{|n|t]}+\Lambda^{v}_{i[s}\nu^{0}_{|v|t]}-\Lambda^{n}_{i[s}a^{v}_{|n|t]}\nu^{0}_{v}-\\ &-\Lambda^{n}_{i[s}\nu^{0}_{|v|t]}a^{v}_{n}+(\nu^{0}_{n}\Lambda^{n}_{l[s}+\nu^{0}_{v}\Lambda^{v}_{l[s}-a^{v}_{n}\nu^{0}_{v}\Lambda^{n}_{l[s})\,\Lambda^{n}_{t]i}\nu^{l}_{n}].\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что условием неподвижности оснащающей плоскости $N_{n-m-1}(A_0)$ является выполнение системы

$$\nu^{0}_{nk}-\nu^{j}_{n}\,(\Lambda^{n}_{jk}\nu^{0}_{n}+\Lambda^{v}_{jk}\nu^{0}_{v})+(\nu^{j}_{n}\Lambda^{n}_{jk}a^{v}_{n}-a^{v}_{nk})\,\nu^{0}_{v}=0, \tag{36_1}$$

$$\nu^{0}_{n}\delta^{l}_{k}+\nu^{i}_{nk}-\Lambda^{n}_{jk}\nu^{j}_{n}\nu^{l}_{n}+N^{l}_{vk}a^{v}_{n}=0, \tag{36_2}$$

$$\nu^{0}_{vk}=0, \tag{36_3}$$

$$\nu^{0}_{v}\delta^{l}_{k}+N^{l}_{vk}=0. \tag{36_4}$$

Пересечение $N_{n-m-1}(A_0)\cap\Pi_{n-m-1}(A_0)$ есть $(n-m-2)$-мерная плоскость $[N_v]$, которую назовем осью оснащающей плоскости $N_{n-m-1}(A_0)$. Одновременное выполнение равенств ($36_{3,4}$) есть условие неподвижности оси $[N_v]$.

Равенства (36_2) выражают собой условие, при котором инвариантная точка K_n смещается внутри нормали первого рода $N_{n-m}(A_0)\equiv[A_0K_nN_v]$, определяемой квазитензором $\nu_n{}^i$; одновременное выполнение равенств ($36_{1,2}$) есть условие, при котором смещение точки K_n не выходит за пределы оснащающей плоскости $N_{n-m-1}(A_0)$.

Из (36_4) с учетом (3) находим

$$\nu^{0}_{v}=-a^{0}_{v}, \quad N^{l}_{vk}=a^{0}_{v}\delta^{l}_{k}. \tag{37}$$

В случае неподвижности оснащающей плоскости $N_{n-m-1}(A_0)$ в силу (35)—(37), имеем $\overset{1}{R}{}^{\bar{j}}_{ist}=0$. Обратно, если ось $[N_v]$ оснащающей плоскости неподвижна и $\overset{1}{R}{}^{\bar{j}}_{ist}=0$, то из (35), ($36_{3,4}$) (37) следует ($36_{1,2}$). Таким образом, справедлива

Теорема. При оснащении в смысле Э. Картана регулярной гиперполосы $H_m\subset P_n$ связкой плоскостей $N_{n-m-1}(A_0)$ с неподвижной осью $[N_v]$ индуцируемое пространство $\overset{1}{P}_{m,m}$ вырождается в m-мерное проективное пространство тогда и только тогда, когда связка оснащающих плоскостей $N_{n-m-1}(A_0)$ вырождается в одну неподвижную плоскость; при этом неподвижная оснащающая плоскость является плоскостью Кёнигса нормали первого рода $N_{n-m}(A_0)$.

Последнее предложение этой теоремы непосредственно следует из (36_2), (37):

$$\nu_n^0 = -\frac{1}{m}\left(\nu_{nj}^j - \Lambda_{lj}^n \nu_n^l \nu_n^j\right) - a_n^v a_v^0. \tag{38}$$

Согласно [21], другое пространство проективной связности $\overset{2}{P}_{m,m}$ определяется системой форм $\left\{\overset{2}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}}\right\}$, получающихся преобразованием

$$\overset{2}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}} = \overset{1}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}} + \overset{2}{\Pi}{}_{\bar{i}k}^{\bar{j}}\omega_0^k;$$

требование того, что эта система удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева

$$D\overset{2}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}} = \overset{2}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{k}} \wedge \overset{2}{\omega}{}_{\bar{k}}^{\bar{j}} + \frac{1}{2}\overset{2}{R}{}_{\bar{i}st}^{\bar{j}}\omega_0^s \wedge \omega_0^t, \tag{39}$$

при $\overset{2}{\Pi}{}_{0k}^j = \overset{2}{\Pi}{}_{0k}^0 = 0$ равносильно следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\overset{2}{\Pi}{}_{ik}^j + \overset{2}{\Pi}{}_{ik}^j\omega_0^0 - \overset{2}{\Pi}{}_{is}^j\omega_k^s - \overset{2}{\Pi}{}_{sk}^j\omega_i^s + \overset{2}{\Pi}{}_{ik}^s\omega_s^j &= \overset{2}{\Pi}{}_{iks}^j\omega_0^s, \\ d\overset{2}{\Pi}{}_{ik}^0 + 2\overset{2}{\Pi}{}_{ik}^0\omega_0^0 - \overset{2}{\Pi}{}_{is}^0\omega_k^s - \overset{2}{\Pi}{}_{sk}^0\omega_i^s + \overset{2}{\Pi}{}_{ik}^s\omega_s^0 &= \overset{2}{\Pi}{}_{iks}^0\omega_0^s. \end{aligned} \tag{40}$$

Уравнениям (40) удовлетворяют следующие охваты:

$$\overset{2}{\Pi}{}_{ik}^j = \frac{1}{m+2}\Lambda_n^{jl}D_{lik}^n,$$

$$\overset{2}{\Pi}{}_{ik}^0 = \frac{1}{m+2}\left(\frac{1}{m+2}\Lambda_n^{tl}\Lambda_t D_{lik}^n + D_{sik}^n \nu_n^s\right).$$

Следовательно, пространство проективной связности $\overset{2}{P}_{m,m}$ определяется системой форм

$$\begin{gathered} \overset{2}{\omega}{}_0^i = \omega_0^i, \quad \overset{2}{\omega}{}_0^0 = \omega_0^0, \\ \overset{2}{\omega}{}_i^j = \overset{1}{\omega}{}_i^j + \frac{1}{m+2}\Lambda_n^{jl}D_{lik}^n\omega_0^k, \\ \overset{2}{\omega}{}_i^0 = \overset{1}{\omega}{}_i^0 + \frac{1}{m+2}\left(\frac{1}{m+2}\Lambda_n^{tl}\Lambda_t D_{lik}^n + D_{sik}^n\nu_n^s\right)\omega_0^k, \end{gathered} \tag{41}$$

причем компоненты тензора кривизны-кручения $\overset{2}{R}{}_{\bar{i}st}^{\bar{j}}$ этого пространства в структурных уравнениях (39) имеют следующие строения:

$$\overset{2}{R}{}_{0st}^j = 0, \quad \overset{2}{R}{}_{0st}^0 = 0; \tag{42$_1$}$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{R}{}_{ist}^j = 2\Big[\frac{1}{m+2}&\left(2\delta_i^j\Lambda_{l[s}^v N_{|v|t]}^l - \Lambda_n^{jl}\Lambda_{l[s}\Lambda_{t]i}^n - \Lambda_{[is}\delta_{t]}^j\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\overset{1}{R}{}_{ist}^j - \Lambda_{i[s}^v N_{|v|t]}^j - \Lambda_n^{jl}\Lambda_{ik}^n\Lambda_{l[s}^v N_{|v|t]}^k + \\ &+ \frac{1}{(m+2)^2}\left(\Lambda_{[s}\delta_{t]}^j\Lambda_i + \Lambda_n^{jk}\Lambda_k\Lambda_{[s}\Lambda_{t]i}^n\right) - \end{aligned}$$

$$
-\frac{1}{m+2}\nu_n^l\left(D^n_{li[s}\delta^j_{t]}+D^n_{kl[s}\Lambda^n_{t]i}\Lambda^{jk}_n\right)\Big]; \tag{42_2}
$$

$$
\overset{2}{R}{}^0_{ist}=\frac{\Lambda_l}{m+2}\left(\overset{2}{R}{}^l_{ist}-\overset{1}{R}{}^l_{ist}\right)+\overset{1}{R}{}^0_{ist}+
$$

$$
+\frac{2}{(m+2)^2}\left[\Lambda^{kl}_n\Lambda_{k[s}D^n_{t]li}-\nu^l_n\left(\Lambda_l\Lambda^n_{i[s}\Lambda_{t]}+\Lambda_i\Lambda^n_{l[s}\Lambda_{t]}\right)\right]+
$$

$$
+\frac{2}{m+2}\left[\nu^l_n\left(2\Lambda^n_{li}\Lambda^v_{k[s}N^k_{|v|t]}-\Lambda_{l[s}\Lambda^n_{t]i}+\nu^k_nD^n_{kl[s}\Lambda^n_{t]i}-\Lambda_{i[s}\Lambda^n_{t]l}\right)-\right.
$$

$$
\left.-D^n_{li[s}\nu^l_{|n|t]}-\Lambda^{lk}_n\nu^0_vD^n_{ki[s}\Lambda^v_{t]l}\right]-2\nu^l_n\left(\Lambda^n_{lk}\Lambda^v_{i[s}N^k_{|v|t]}+\Lambda^n_{ik}\Lambda^v_{l[s}N^k_{|v|t]}\right)+
$$

$$
+\frac{2}{(m+2)^3}\Lambda^{kl}_n\left(\Lambda_kD^n_{li[s}\Lambda_{t]}+\nu^j_nD^n_{jk[s}D^n_{t]li}\right). \tag{42_3}
$$

Отметим, что совокупность величин $\overset{2}{R}{}^j_{ist}$ есть подтензор тензора кривизны-кручения пространства $\overset{2}{P}_{m,m}$.

Покажем, что преобразование J_K форм проективной связности по закону (41) является инволютивным, т. е. $J_K\equiv J_K^{-1}$.

Уравнения (2), в силу $\omega^\alpha_0=0$, (33), (41) можно переписать в виде

$$
d\Lambda^n_{ij}+\Lambda^n_{ij}\left(\overset{1}{\omega}{}^0_0+\omega^n_n\right)-\Lambda^n_{ik}\overset{1}{\omega}{}^k_j-\Lambda^n_{kj}\overset{1}{\omega}{}^k_i=\overset{1}{\Lambda}{}^n_{ijs}\omega^s_0,
$$

$$
d\Lambda^n_{ij}+\Lambda^n_{ij}\left(\overset{2}{\omega}{}^0_0+\omega^n_n\right)-\Lambda^n_{ik}\overset{2}{\omega}{}^k_j-\Lambda^n_{kj}\overset{2}{\omega}{}^k_i=\overset{2}{\Lambda}{}^n_{ijs}\omega^s_0,
$$

где

$$
\begin{aligned}
\overset{1}{\Lambda}{}^n_{ijs}&=\Lambda^n_{ijs}+\left(\Lambda^n_{ik}\Lambda^n_{js}+\Lambda^n_{kj}\Lambda^n_{is}\right)\nu^k_n,\\
\overset{2}{\Lambda}{}^n_{ijs}&=\overset{1}{\Lambda}{}^n_{ijs}-\frac{2}{m+2}D^n_{ijs}.
\end{aligned} \tag{43}
$$

Согласно (6), (43) компоненты объектов квазинормалей $\overset{1}{\Lambda}_s\overset{\text{def}}{=}\Lambda^{ij}_n\overset{1}{\Lambda}{}^n_{ijs}$, $\overset{2}{\Lambda}_s\overset{\text{def}}{=}\Lambda^{ij}_n\overset{2}{\Lambda}{}^n_{ijs}$ имеют следующие строения:

$$
\overset{1}{\Lambda}_s=\Lambda_s+2\Lambda^n_{sk}\nu^k_n,\quad \overset{2}{\Lambda}_s=\overset{1}{\Lambda}_s. \tag{44}
$$

В силу (9), (43), (44), тензоры

$$
\begin{aligned}
\overset{1}{D}{}^n_{ijk}&\overset{\text{def}}{=}(m+2)\overset{1}{\Lambda}{}^n_{ijk}-\Lambda^n_{(ij}\overset{1}{\Lambda}_{k)}+2\Lambda^n_{ij}\Lambda^n_{ks}\nu^s_n-\\
&\quad-m\left(\Lambda^n_{ik}\Lambda^n_{js}+\Lambda^n_{jk}\Lambda^n_{is}\right)\nu^s_n,\\
\overset{2}{D}{}^n_{ijk}&\overset{\text{def}}{=}(m+2)\overset{2}{\Lambda}{}^n_{ijk}-\Lambda^n_{(ij}\overset{2}{\Lambda}_{k)}+2\Lambda^n_{ij}\Lambda^n_{ks}\nu^s_n-\\
&\quad-m\left(\Lambda^n_{ik}\Lambda^n_{js}+\Lambda^n_{jk}\Lambda^n_{is}\right)\nu^s_n
\end{aligned}
$$

имеют вид:

$$
\overset{1}{D}{}^n_{ijk}=D^n_{ijk},\quad \overset{2}{D}{}^n_{ijk}=-\overset{1}{D}{}^n_{ijk}. \tag{45}
$$

В силу соотношений (44), (45), преобразование (41) форм проективной связности перепишется в виде:

$$\begin{aligned}\overset{2}{\omega}{}_0^i &= \overset{1}{\omega}{}_0^i, \quad \overset{2}{\omega}{}_0^0 = \overset{1}{\omega}{}_0^0, \\ \overset{2}{\omega}{}_i^j &= \overset{1}{\omega}{}_i^j + \frac{1}{m+2}\Lambda_n^{jl}\overset{1}{D}{}_{lik}^n\omega_0^k, \qquad (46) \\ \overset{2}{\omega}{}_i^0 &= \overset{1}{\omega}{}_i^0 + \frac{1}{(m+2)^2}(\Lambda_n^{tl}\overset{1}{\Lambda}_t + m\nu_n^l)\overset{1}{D}{}_{lik}^n\omega_0^k.\end{aligned}$$

Соотношения (46), согласно (44), (45), и доказывают инволютивность преобразования J_K. Имея в виду эту инволютивность, мы говорим, что пространства $\overset{1}{P}_{m,m}$ и $\overset{2}{P}_{m,m}$ являются двойственными [51] относительно J_K. Доказана

Теорема. Оснащение в смысле Э. Картана регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$, кроме первого пространства проективной связности $\overset{1}{P}_{m,m}$, индуцирует второе пространство проективной связности $\overset{2}{P}_{m,m}$, определяемое $(m+1)^2$ пфаффовыми формами $\overset{2}{\omega}{}_{\bar{i}}^{\bar{j}}$ (см. (41)), причем пространства $\overset{1}{P}_{m,m}$ и $\overset{2}{P}_{m,m}$ являются двойственными относительно инволютивного преобразования J_K форм связности по закону (41); компоненты тензора кривизны-кручения пространства $\overset{2}{P}_{m,m}$ имеют строения (42_{1-3}).

Из (41) непосредственно вытекает

Следствие. Условием совпадения связностей пространств $\overset{1}{P}_{m,m}$ и $\overset{2}{P}_{m,m}$ является обращение в нуль тензора Дарбу регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$, т. е. касание 3-го порядка соприкасающихся гиперквадрик (13) с данной гиперполосой.

Предположим, что в случае неподвижности оси $[N_v]$ оснащающей плоскости $N_{n-m-1}(A_0)$ подтензор $\overset{2}{R}{}_{ist}^j$ тензора кривизны-кручения пространства $\overset{2}{P}_{m,m}$ обращается в нуль: $\overset{2}{R}{}_{ist}^j = 0$. Свертывая равенства (42_2) по j, t, с учетом (3), (4), (8), (35), (37) имеем:

$$\frac{1}{m+2}\Lambda_{ik}^n T_n - m a_v^0 c_{ik}^v - \frac{m}{m+2}\left(\Lambda_{ik} - \frac{\Lambda_i\Lambda_k}{m+2}\right) -$$
$$-\frac{m}{m+2}\nu_n^j D_{jik}^n + \Lambda_{ik}^n\nu_{nj}^j - \Lambda_{ij}^n\nu_{nk}^j + (m-1)(\Lambda_{ik}^n\nu_n^0 + \Lambda_{ik}^n a_n^v a_v^0) +$$
$$+(\Lambda_{jk}^n\Lambda_{si}^n - \Lambda_{sj}^n\Lambda_{ik}^n)\nu_n^j\nu_n^s = 0; \qquad (47)$$

свертывая последние соотношения с тензором Λ_n^{ik}, получим (38), то есть оснащающая плоскость $N_{n-m-1}(A_0)$ является плоскостью Кенигса.

Свертывая (47) с тензором Λ_n^{it}, с учетом (38) находим:

$$\nu_{nk}^{t}=\Lambda_{sk}^{n}\nu_{n}^{s}\nu_{n}^{t}-\delta_{k}^{t}\left(\nu_{n}^{0}+a_{n}^{v}a_{v}^{0}\right)-m\Lambda_{n}^{it}a_{v}^{0}c_{ik}^{v}-$$
$$-\frac{m}{m+2}\Lambda_{n}^{it}\hat{\Lambda}_{ik}-\frac{m}{m+2}\Lambda_{n}^{it}\nu_{n}^{s}D_{sik}^{n}, \tag{48}$$

где величины $\hat{\Lambda}_{ik}$ имеют строение (10).

Если при наших предположениях смещение инвариантной точки Кёнигса K_n не выходит за пределы нормали первого рода $[A_0K_nN_v]$, то из (36_2), (48) с учетом (37) имеем:

$$\hat{\Lambda}_{ik}=-(m+2)\,a_{v}^{0}c_{ik}^{v}-\nu_{n}^{s}D_{sik}^{n};$$

величины W_{nk} (см. (10)) теперь с учетом (4), (9), (11) примут вид $W_{nk}=-\nu_{n}^{s}B_{sk}$, откуда, в силу (10), непосредственно следует $\nu_{n}^{i}=W_{n}^{i}$. Доказана

Теорема. Если подтензор $\overset{2}{R}{}_{lst}^{l}$ тензора кривизны-кручения пространства $\overset{2}{P}_{m,m}$, индуцируемого оснащением регулярной гиперполосы $H_m\subset P_n$ полем плоскостей $N_{n-m-1}\equiv[K_nN_v]$ с неподвижной осью $[N_v]$, обращается в нуль, причем инфинитезимальное смещение оснащающей плоскости $N_{n-m-1}(A_0)$ не выходит за пределы нормали первого рода, то нормалью первого рода служит первая директриса Вильчинского и оснащающая плоскость N_{n-m-1} является плоскостью Кенигса этой директрисы.

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНЫХ ГИПЕРПОЛОС

В. В. Вагнером во второй части работы [4] построена общая теория поля локальных собственных гиперполос в дифференциально-геометрическом пространстве X_n и рассмотрены ее приложения:

а) к сингулярной задаче вариационного исчисления на безусловный экстремум,

б) к вариационной задаче Лагранжа,

в) к метрической неголономной геометрии $V_n{}^m$ в X_n,

г) к динамике склерономных механических систем с неголономными нелинейными связями.

Вопросы приложения теории поля локальных гиперполос в геометризацию динамики систем с неголономными связями рассматривает А. В. Гохман [13].

Согласно работе Н. М. Остиану [27], с распределением $\mathfrak{M}\subset P_n$ m-мерных линейных элементов $(m<n-1)$ во второй дифференциальной окрестности внутренним образом ассоциируется гиперполосное распределение $\mathscr{H}\subset P_n$, для которого исходное распределение $\mathfrak{M}$ является базисным (относительно репера 0-го порядка уравнение гиперплоскости оснащающего распределения имеет вид $c_\alpha x^\alpha=0$). Нами доказано [49], что гиперполосное распределение $\mathscr{H}$ регулярно тогда и только тогда, когда тензор $c_\alpha\Lambda_{ij}{}^\alpha$ 2-го порядка невырожден. Следовательно, в случае

$\det|c_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha| \neq 0$ теорию регулярного гиперполосного распределения $\mathscr{H} \subset P_n$, построенную автором в работе [49], можно приложить к изучению геометрии распределения $\mathfrak{M}$ m-мерных линейных элементов. В частности, это позволяет:

а) построить новые внутренним образом определенные инвариантные нормализации распределения $\mathfrak{M}$ (нормализации Фубини, Вильчинского, Михэйлеску и т. д.), а также новые оснащения в смысле Э. Картана;

б) найти новые поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик распределения $\mathfrak{M}$;

в) найти ряд линейных связностей (аффинного и проективного типов), внутренним образом определяемых самим распределением $\mathfrak{M}$, и т. д. Все это приводит к обогащению теории распределений m-мерных линейных элементов в P_n новыми геометрическими фактами.

С поверхностью $V_m \subset P_n$ $(2 < m < n-1)$, согласно работе Н. М. Остиану [26], в 3-й дифференциальной окрестности внутренним образом ассоциируется гиперполоса H_m; условием ее регулярности является невырожденность симметрического тензора 3-го порядка $b_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha$ (см. [50]). Это обстоятельство позволило автору, в частности, установить [50] верхнюю границу порядка полного внутреннего фундаментального объекта поверхности $V_m \subset P_n$, а именно: порядок полного внутреннего фундаментального объекта поверхности $V_m \subset P_n$ $(2 < m < n-1)$ не превосходит шести; не исключено, что эта граница допускает понижение на единицу.

Для регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$, инвариантно присоединенной к поверхности V_m $(2 < m < n-1)$, справедливы результаты, полученные нами в работах [47], [48], [50], [52], а также в §3 настоящей работы; здесь мы перечислим основные из них (применительно к поверхности $V_m \subset P_n$).

1) В дифференциальной окрестности 5-го порядка точки $A_0 \in V_m$ имеем поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик (см. (13)) гиперполосы H_m (а следовательно, ее базисной поверхности V_m), относительно которых касательная плоскость $\Pi_m(A_0)$ и характеристика $\Pi_{n-m-1}(A_0)$ полярно сопряжены.

2) Используя инвариантное условие квадратичности гиперполосы $H_m \subset P_n$ (см. [48]), нетрудно найти критерий принадлежности поверхности $V_m \subset P_n$ неподвижной квадрике.

3) В дифференциальной окрестности пятого порядка в каждой точке $A_0 \in V_m$ имеем пучок инвариантных нормалей первого рода поверхности $V_m \subset P_n$; из этого пучка инвариантных $(n-m)$-мерных нормалей выделяются, в частности, нормаль Фубини, директриса Вильчинского и т. д.

4) Инвариантное присоединение регулярной гиперполосы H_m к $V_m \subset P_n$ позволяет рассмотреть на поверхности V_m две двойственные аффинные связности без кручения, индуцируемые двойственной нормализацией H_m, а также две двойственные проек-

тивные связности без кручения, индуцируемые оснащением H_m в смысле Э. Картана.

5) Инвариантное присоединение регулярной гиперполосы к поверхности $V_m \subset P_n$ позволяет изучать двойственную геометрию сетей (см. [52]) на рассматриваемой поверхности; в частности, это приводит к построению инвариантной нормализации V_m с помощью полей гармонических плоскостей сети $\Sigma \subset V_m$, сопряженной относительно тензора $b_\alpha \Lambda_{ij}{}^\alpha$.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Акивис М. А.*, Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства. Мат. сб., 1952, *31*, № 1, 43—75
2. *Базылев В. Т.*, Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p-поверхности евклидова пространства. Сиб. мат. ж., 1966, *7*, № 3, 499—511 (РЖМат, 1966, 11А344)
3. *Бритов А. В.*, Определение двумерной поверхности четырехмерного аффинного пространства по ее инвариантам. Темат. сб. Мордовск. ун-т, 1974, № 108, 119—124 (РЖМат, 1975, 12А635)
4. *Вагнер В. В.*, Теория поля локальных гиперполос. Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу, 1950, *8*, 197—272
5. *Василян М. А.*, Построение инвариантного оснащения гиперполосы ранга n—2 в n-мерном проективном пространстве. Тезисы докл. 4-й Всес. межвузовск. конф. по геометрии. Тбилиси, 1969, 35—36 (РЖМат, 1970, 4А561К)
6. —, Об инвариантном оснащении гиперполосы. Докл. АН АрмССР, 1970, *50*, № 2, 65—70 (РЖМат, 1971, 1А602)
7. —, Квадратичные гиперполосы ранга n—2 в проективном пространстве P_n. Докл. АН АрмССР, 1970, *50*, № 4, 193—197 (РЖМат, 1971, 2А592)
8. —, Проективная теория многомерных гиперполос. Изв. АН АрмССР. Математика, 1971, *6*, № 6, 477—481 (РЖМат, 1972, 9А524)
9. —, О связностях, индуцируемых оснащением гиперполосы H_r проективного пространства P_n. Тезисы докл. 5-й Всес. конф. по соврем. проблемам геометрии. Самарканд, 1972, 31 (РЖМат, 1973, 4А748К)
10. —, Аффинные связности, индуцируемые оснащением гиперполосы. Докл. АН АрмССР, 1973, *57*, № 4, 200—205 (РЖМат, 1974, 8А524)
11. *Гаюбов Г. Н.*, Формулы Френе для кривой и поверхностной полосы в пространстве Лобачевского. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1972, № 3, 7—11 (РЖМат, 1972, 10А468)
12. *Гольдберг В. В., Чакмазян А. В.*, О некоторых классах двойственно нормализованных поверхностей четырехмерного проективного пространства. Comment. math. Univ. carol., 1972, *13*, № 2, 325—332 (РЖМат, 1972, 12А513)
13. *Гохман А. В.*, Дифференциальная геометрия и классическая динамика систем. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1966, *1*, 111—138 (РЖМат, 1967, 6А408)
14. *Иванов Б. А.*, Натуральное уравнение гиперповерхности эквиаффинного пространства. Уч. зап. Мордовск. ун-т, 1971, № 70, 97—104 (РЖМат, 1972, 4А777)
15. —, Натуральные уравнения специально оснащенной m-поверхности эквиаффинного пространства. Уч. зап. Мордовск. ун-т, 1971, № 70, 115—136 (РЖМат, 1972, 4А779)
16. —, Натуральное задание двумерной поверхности четырехмерного евклидова пространства. Темат. сб. Мордовск. ун-т, 1974, № 108, 109—114 (РЖМат, 1975, 12А628)

17. —, Некоторые специальные оснащения m-поверхности аффинного пространства. Темат. сб. Мордовск. ун-т, 1974, № 108, 115—118 (РЖМат, 1975, 12А634)
18. *Ивлев Е. Т.*, Об одной нормализации многомерной поверхности пространства проективной связности. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 4. Калининград, 1974, 6—28 (РЖМат, 1974, 8А546)
19. —, Об оснащении многомерной гиперполосы пространства проективной связности. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 5. Калининград, 1974, 25—49 (РЖМат, 1975, 7А911)
20. *Лаптев Г. Ф.*, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, № 2, 275—382 (РЖМат,1953, 433)
21. —, Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961. Т. 2. Л., «Наука», 1964, 226—233 (РЖМат, 1964, 12А391)
22. *Лумисте Ю. Г., Чакмазян А. В.*, Подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1974, № 5, 148—157 (РЖМат, 1975, 1А812)
23. *Магазинников Л. И.*, Эквиаффинная теория поверхностной полосы. Тр. Томск. ун-та, 1962, *160*, 115—122 (РЖМат, 1962, 4А304)
24. *Норден А. П.*, Пространства аффинной связности. М., «Наука», 1976
25. *Олоничев П. М.*, Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполос. Докл. АН СССР, 1951, *80*, № 2, 165—168
26. *Остиану Н. М.*, О геометрии многомерной поверхности проективного пространства. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1966, *1*, 239—263 (РЖМат, 1967, 6А349)
27. —, Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1971, *3*, 95—114 (РЖМат, 1972, 6А681)
28. —, Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1973, *4*, 71—120 (РЖМат, 1974, 5А695)
29. —, *Рыжков В. В., Швейкин П. И.*, Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1973, *4*, 7—70 (РЖМат, 1974, 3А451)
30. *Попов Ю. И.*, Сферические гиперполосы многомерного проективного пространства P_n. Уч. зап. Калинингр. ун-т, 1968(1969), *1*, 27—57 (РЖМат, 1969, 11А560)
31. —, К теории оснащенных регулярных гиперполос многомерного проективного пространства. Тезисы докл. 4-й Всес. межвузовск. конф. по геометрии. Тбилиси, 1969, 209—211 (РЖМат, 1970, 4А561К)
32. —, К теории оснащенной гиперполосы в многомерном проективном пространстве. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1970, *1*, № 374, 102—117 (РЖМат, 1971, 10А430)
33. —, Гиперполосы многомерного проективного пространства с общим оснащением. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1970, *1*, № 374, 118—129 (РЖМат, 1971, 10А433)
34. —, Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 1. Калининград, 1970, 27—46 (РЖМат, 1971, 10А432)
35. —, Введение инвариантного оснащения на регулярной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n. Уч. зап. Моск. гос. заочн. пед. ин-т, 1971, *30*, 286—296 (РЖМат, 1972, 1А1052)
36. —, Об инвариантном оснащении вырожденных гиперполос Γ_m ранга $r=\frac{2m}{2}$ многомерного проективного пространства P_n. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 2. Калининград, 1971, 20—27 (РЖМат, 1972, 2А874)

37. —, Регулярные гиперполосы многомерного проективного пространства с ассоциированной связностью. Тезисы докл. 5-й Всес. конф. по соврем. проблемам геометрии. Самарканд, 1972, 177 (РЖМат, 1973, 4А748К)
38. —, Теория оснащенных регулярных гиперполос с ассоциированной связностью многомерного проективного пространства. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 3. Калининград, 1973, 81—96 (РЖМат, 1974, 3А510)
39. —, О вырожденных гиперполосах многомерного проективного пространства. Материалы 4-й Прибалт. геом. конф. по вопросам диф. геометрии. Тарту, 1973, 102 (РЖМат, 1973, 12А608К)
40. —, К теории двумерных оснащенных гиперполос N (Γ_2) многомерного проективного пространства. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 4. Калининград, 1974, 136—150 (РЖМат, 1974, 8А523)
41. —, Вырожденные гиперполосы многомерного проективного пространства. Тезисы докл. 6-й Всес. конф. по соврем. проблемам геометрии. Вильнюс, 1975, 195—196 (РЖМат, 1975, 12А583К)
42. —, Внутренние оснащения вырожденной m-мерной гиперполосы $H_m{}^r$ ранга r многомерного проективного пространства. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 6. Калининград, 1975, 102—142 (РЖМат, 1976, 9А591)
43. —, Аффинные связности вырожденных гиперполос. I. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 7. Калининград, 1976, 79—85 (РЖМат, 1977, 3А636)
44. —, *Мишенина Т. И.*, Инвариантное оснащение распадающейся (n—2)-мерной гиперполосы $CH_{n-2}{}^r$ ранга r многомерного проективного пространства P_n. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 5. Калининград, 1974, 103—130 (РЖМат, 1975, 4А738)
45. *Похила М. М.*, Обобщенные многомерные полосы. Тезисы докл. 6-й Всес. конф. по соврем. проблемам геометрии. Вильнюс, 1975, 198—199 (РЖМат, 1975, 12А583К)
46. —, Инвариантные оснащения многомерных полос проективного пространства. Тезисы докл. Всес. конф. по неевкл. геом. «150 лет геометрии Лобачевского». Казань, 1976, 170 (РЖМат, 1976, 11А739К)
47. *Столяров А. В.*, О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1975, № 10, 97—99 (РЖМат, 1976, 9А609)
48. —, Условие квадратичности регулярной гиперполосы. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1975, № 11, 106—108 (РЖМат, 1976, 9А608)
49. —, Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов. В сб. «Проблемы геометрии». Т. 7. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1975, 117—151 (РЖМат, 1976, 9А613)
50. —, Приложение теории регулярных гиперполос к изучению геометрии многомерных поверхностей проективного пространства. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1976, № 2, 111—113 (РЖМат, 1976, 11А769)
51. —, Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 8. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)» М., 1977, 25—46 (РЖМат, 1978, 1А657)
52. —, О двойственной геометрии сетей на регулярной гиперполосе. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1977, № 8, 68—78 (РЖМат, 1978, 3А467)
53. *Схоутен И. А., Стройк Д. Дж.*, Введение в новые методы дифференциальной геометрии. ГИИЛ, 2, 1948
54. *Тарасов И. С.*, Теория несобственных гиперполос в центральном аффинном пространстве. Саратов, канд. дисс., 1954 (РЖМат, 1955, 2879Д)
55. *Терентьева Е. И.*, Инвариантное оснащение (n—2)-мерной регулярной гиперполосы Γ_{n-2} проективного пространства P_n. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 3. Калининград, 1973, 133—142 (РЖМат, 1974, 3А511)

56. *Чакмазян А. В.*, Двойственная нормализация. Докл. АН АрмССР, 1959, 28, № 4, 151—157 (РЖМат, 1961, 2А329)
57. —, О двойственно нормализованных поверхностях евклидова пространства. Докл. АН АрмССР, 1959, *29*, № 1, 3—8 (РЖМат, 1961, 9А545)
58. —, О полярно-двойственно нормализованных поверхностях пространства K_n. Докл. АН АрмССР, 1960, *31*, № 3, 129—132 (РЖМат, 1961, 9А546)
59. —, Об одном преобразовании двойственно нормализованной поверхности. Докл. АН АрмССР, 1960, *30*, № 4, 187—192 (РЖМат, 1961, 10А456)
60. —, К теории кривизны двумерных поверхностей четырехмерного пространства. Докл. АН АрмССР, 1961, *32*, № 4, 177—181 (РЖМат, 1962, 4А405)
61. —, Эволютные поверхности двумерной двойственно нормализованной D_2 в E_4. Докл. АН СССР, 1962, *144*, № 6, 1233—1236 (РЖМат, 1963, 3А360)
62. —, О поверхностях D_m пространства K_n. Докл. АН АрмССР, 1963, *36*, № 2, 71—75 (РЖМат, 1963, 11А335)
63. —, О поверхности D_m пространства E_{2m}. Докл. АН АрмССР, 1963, *37*, № 2, 49—53 (РЖМат, 1964, 9А406)
64. —, О двумерных поверхностях D_2, вложенных в евклидово пространство E_4. Докл. АН АрмССР, 1965, *40*, № 1, 3—6 (РЖМат, 1965, 8А384)
65. —, О двумерной двойственно нормализованной гиперполосе в четырехмерном аффинном пространстве A_4. Comment. math. Univ. carol., 1966, *7*, № 3, 289—295 (РЖМат, 1967, 9А429)
66. —, О гауссовом кручении двумерной двойственно нормализованной поверхности D_2, вложенной в E_4. Докл. АН АрмССР, 1967, *44*, № 3, 97—100 (РЖМат, 1968, 9А451)
67. —, К теории двойственно нормализованных m-мерных поверхностей V_m в E_n. Докл. АН СССР, 1971, *196*, № 3, 538—540 (РЖМат, 1971, 6А677)
68. *Чашечников С. М.*, Теория поля локальных несобственных гиперполос в X_n. Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу, 1961, 11, 165—188 (РЖМат, 1963, 3А357)
69. *Шевченко Ю. И.*, Обобщенная нормализация полосы в проективном пространстве. Тезисы докл. Всес. конф. по неевкл. геом. «150 лет геометрии Лобачевского». Казань, 1976, 214 (РЖМат, 1976, 11А739К)
70. *Шуликовский В. И.*, Проективная теория сетей. Изд-во Казанск. ун-та, 1964
71. *Blaschke W.*, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen Einsteins Relativitätstheorie. I. Berlin, 1930 (имеется русский перевод: Бляшке В., Дифференциальная геометрия. I. ОНТИ, М.-Л., 1935)
72. —, Einführung in die Differentialgeometrie. Berlin—Göttingen, 1950 (имеется русский перевод: Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию. М., Гостехиздат, 1957; РЖМат, 1959, 816К)
73. *Bol G.*, Projective Differentialgeometrie. I. Teil, Göttingen, 1950
74. *Burstin G., Mayer W.*, Über affine Geometrie. Die Geometrie zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten F_2 im affinen R_4. Math. Zeitschr., 1927, 26
75. *Cartan E.*, Les espaces á connexion projective. Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу, 1937, *4*, 147—159
76. *Frank H.*, Flächenstreifen und Dupinsche Zukliden in der Laguerre—Geometrie. J. reine and angew. Math., 1975, 274—275, 424—440 (РЖМат, 1975, 12А640)
77. *Giering O.*, Die windschiefen Flächen konstanten Dralls in der Normalenkongruenz einer Fläche. Manuscr. math., 1970, *2*, № 2, 162—180 (РЖМат, 1970, 9А512)
78. *Hoschek J.*, Eine Erweiterung der Streifentheorie und Verallgemeinerung von Gesarostreifen. Arch. Math., 1969, *20*, № 1, 88—93 (РЖМат, 1969, 12А762)

79. *Leichtweiss K.*, Das Problem von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. I. Zur isometrischen Einbettung und Verbiegung von Riemannschen Räumen. Math. Ann., 1956, *130*, № 5, 442—474 (РЖМат, 1957, 1757)
80. —, Das Problem von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. II. Existenz und Eindeutigkeit spezieller Mannigfaltigkeiten. Math. Ann., 1956, *132*, № 1, 1—16 (РЖМат, 1959, 8466)
81. —, Das Problem von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. III. Natürliche Gleichungen. Math. Ann., 1956, *132*, № 3, 201—245 (РЖМат, 1959, 8467)
82. *Pendl A.*, Zur Möbiusgeometrie der Flächenstreifen. Monatsh. Math., 1973, *77*, № 5, 416—432 (РЖМат, 1974, 6А776)
83. *Wunderlich W.*, Raumkurven konstanter ganzer Krümmung und Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband. Demonstr. math., 1973, *6*, № 1, 407—417 (РЖМат, 1974, 9А783)