ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 1 (68)

УДК 513.813

В. И. Башков

ПОЛНЫЙ РЯД ТОЖДЕСТВ ДЛЯ ВТОРЫХ КОВАРИАНТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ

Тензор кривизны выбираем в виде

$$R_{ijkl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\partial x^k}\right)+g_{ab}(\Gamma^a_{ik}\Gamma^b_{jl}-\Gamma^a_{il}\Gamma^b_{jk}).$$

Известно [2], что полный набор тождеств для первых ковариантных производных тензора кривизны имеет вид:

а) $R_{\sigma\alpha[\beta\gamma,\delta]}=0$,

б) $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda}=-R_{\beta\alpha\gamma\delta,\lambda}=-R_{\alpha\beta\delta\gamma,\lambda}$,

в) $R_{\alpha[\beta\gamma\delta],\lambda}=0$.

Задача нахождения полного ряда тождеств для вторых ковариантных производных тензора кривизны ставится следующим образом. Пусть нами получена формула (А), связывающая вторые ковариантные производные тензора кривизны с расширениями метрического тензора. Известно, что расширения метрического тензора обладают определенным набором тождеств (Б) и только этим набором. Этот набор тождеств для расширений метрического тензора называется полным. С помощью этого ряда тождеств (Б) мы можем разрешить формулу (А) относительно расширений метрического тензора (А′). Набор тождеств (В) для тензора кривизны будет полным, если из формулы (А′) с помощью тождеств (В) мы получим формулу (А) и все тождества (Б).

Нетрудно показать, что вторые расширения тензора кривизны можно выразить через расширения метрического тензора по формуле

$$2R_{ijkl,mp}=g_{ik,jlmp}-g_{il,kjmp}-g_{jk,ilmp}+g_{jl,ikmp}+$$

+ члены, зависящие от расширений g_{ik} более низкого порядка. Но второе расширение тензора кривизны связано со второй ковариантной производной по формуле: $R_{ijkl,m,p}=R_{ijkl,mp}-R_{ibkl}A^b_{jmp}-$

$-R^i_{jbl}A^b_{kmp}-R_{ijkb}A^b_{lmp}-R_{bjkl}A^b_{imp}$, где $A^i_{jkl}=\frac{1}{2}g^{ia}(g_{aj,kl}+g_{ak,jl}-g_{jk,al})$.

Таким образом, $R_{ijkl,m,p}$ выражается через расширения метрического

тензора по формуле (А):

$$\text{(А)} \qquad 2R_{ijkl,\,m,\,p} = g_{ik,\,jlmp} - g_{il,\,kjmp} - g_{jk,\,ilmp} + g_{jl,\,ikmp} +$$

+ квадратичные члены от расширения g_{ik} более низкого порядка.

При этом $g_{ik,\,jlmp}$ обладает следующим полным набором тождеств:

1.° $g_{ij,\,klmp} = g_{ji,\,klmp} = g_{ij,\,lkmp} = g_{ij,\,lmkp} = \ldots$;

(Б) 2.° $P(g_{ia,\,bcde}) = 0$, где P означает циклирование по a, b, c, d, e;

3.° $S'(g_{ab,\,cdel}) = 0$, где S' означает сумму членов, полученную заменой первой пары индексов любой парой из a, b, c, d, e.

Заметим, что (Б) (3°) следует из (Б) (1°, 2°).

Можно показать, что $g_{ij,klmp}$ выражается по формуле (А′) через $R_{ijkl,\,m,\,p}$:

$$\text{(А}'\text{)} \qquad \begin{aligned} -5g_{ij,\,klmp} = {} & 3R_{ijkl,\,m,\,p} + 6R_{ijlm,\,p,\,k} + 9R_{ijmp,\,k,\,l} + 12R_{ipjk,\,l,m} + \\ & + 6R_{ilkm,\,j,\,p} + 4R_{ilmp,\,j,\,k} + 2R_{iplm,\,j,\,k} + \end{aligned}$$

+ сумма квадратичных членов от R_{ijkl}.

Именно, выбирая среди компонент вторых производных тензора кривизны девять компонент, упорядоченных по следующей схеме: $(ijkl)$, $(ijbm)$, $(ipjk)$, $(ikpm)$, $(ikml)$, $(ilkm)$, $(ilmp)$, $(iplm)$, и добавляя к этой системе тождество (Б) (3°), получаем десять неоднородных уравнений для десяти неизвестных $g_{ia,\,bcde}$. Определитель системы не равен нулю, поэтому система имеет единственное решение. Решение есть (А′). Непосредственной проверкой показываем, что ряд тождеств для $R_{ijkl,\,m,\,p}$:

1. $R_{i\,[jkl],\,m,\,p} = 0$,

2. $R_{ij\,[kl,\,m],\,p} = 0$,

(В) 3. $R_{ijkl,\,m,\,p} = -R_{jikl,\,m,\,p}$,

4. $R_{ijlk,\,m,\,p} = -R_{ijkl,\,m,\,p}$,

5. $R_{\nu^1\nu^2\nu^3\nu^4,\,k,\,l} - R_{\nu^1\nu^2\nu^3\nu^4,\,l,\,k} = \sum\limits_{\alpha}^{1\ldots4} R_{\nu^1\ldots h\ldots\nu^4} R^{h}_{\nu^\alpha kl}$ (тождество Риччи)

— является полным, ибо из (А′) и (В) следует (А) и (Б). Из тождеств (В) видно, что в полный ряд входят только тождества, являющиеся дифференциальными следствиями тензора кривизны, его первой производной и тождества Риччи.

Автор благодарен проф. А. З. Петрову за предложенную тему и членам его семинара за благожелательное обсуждение результатов.

г. Казань

Поступило
19 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М., ИИЛ, 1949.

2. Thomas T. Y. The differential invariants of generalized spaces. Cambridge Univ. Press, 1934.