Алгебра и логика, 23, № 4 (1984), 383–394

УДК 519.45

КОНСТРУКЦИЯ p-ГРУПП ПРОМЕЖУТОЧНОГО РОСТА, ОБЛАДАЮЩИХ КОНТИНУУМОМ ФАКТОР-ГРУПП

Р. И. ГРИГОРЧУК

В [1] Филлипс доказал, что для любого простого p существует континуум неизоморфных 2-порожденных p-групп. Хиккин и Филлипс [2] доказали существование континуума неизоморфных 2-порожденных групп периода p^2 для всех достаточно больших простых p. В [3] доказано существование континуума 2-порожденных периодических групп с одинаковым множеством порядков элементов и тем свойством, что любая собственная подгруппа имеет простой порядок. Джинс [4] доказал следующую теорему: если F и G – нетривиальные конечные группы, одновременно не изоморфные группе $\mathbb{Z}_2$, и π – множество простых чисел, делящих $|F||G|$, то свободное произведение $F*G$ обладает фактор-группой, которая является π-группой и имеет континуум неизоморфных финитно-аппроксимируемых фактор-групп. Наконец, в работе [5] доказано, что существует континуум 2-порожденных финитно-аппроксимируемых 2-групп промежуточного роста и методы этой работы легко позволяют доказать (см. ниже лемму 2), что континуум финитно-аппроксимируемых p-групп промежуточного роста, построенный в [6], также содержит континуум неизоморфных групп. Однако группы, построенные в [5, 6], обладают тем свойством, что каждая их истинная фактор-группа конечна. В настоящей работе будет доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Для каждого простого числа p существует финитно-аппроксимируемая конечно-порожденная p-группа промежуточного роста, имеющая континуум неизоморфных финитно-аппроксимируемых фактор-групп.*

Напомним [5], что группой промежуточного роста называется конечно-порожденная группа G, функция роста $\gamma_G(n)=|\{g:\partial(g)\leq n\}|$ которой не эквивалентна никакой степенной функции n^d и показательной функции 2^n. Так как все рассматриваемые группы являются бесконечными конечно-порожденными периодическими, то отпадает необходимость в оценке функций роста снизу, ибо, в силу результата Громова [7], группа степенного роста содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса. Отметим также, что непоказательность роста группы G, как установил Милнор [8], равносильна равенству

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_G(n)} = 1 \tag{1}$$

(предел справа существует в силу полумультипликативности функции роста группы G : $\gamma(n+m)\leq\gamma(n)\gamma(m)$).

§ 1. Конструкция

Пусть p – простое число, $\Omega=\{0,1,\dots,p\}^{\mathbb{Z}_+}$ – пространство бесконечных последовательностей $\omega=\omega_0\omega_1\dots\omega_n\dots$ символов алфавита $\{0,1,\dots,p\}$, $\sigma:\Omega\to\Omega$ – преобразование сдвига влево в пространстве Ω : $(\sigma\omega)_n=\omega_{n+1}$. С помощью последовательности $\omega\in\Omega$ определим два бесконечных слова U_ω, V_ω в алфавите $\downarrow, T, \Pi^0,\dots,\Pi^{p-1}$ (при этом символы T и Π^0 будем отождествлять):

$$U_\omega=\Pi^{\bar\omega_0}\underbrace{T\dots T}_{p-2}\downarrow\Pi^{\bar\omega_1}\underbrace{T\dots T}_{p-2}\downarrow\dots\Pi^{\bar\omega_n}\underbrace{T\dots T}_{p-2}\downarrow\dots,$$

$$V_\omega=\Pi^{\tilde\omega_0}\underbrace{T\dots T}_{p-2}\downarrow\Pi^{\tilde\omega_1}\underbrace{T\dots T}_{p-2}\downarrow\dots\Pi^{\tilde\omega_n}\underbrace{T\dots T}_{p-2}\downarrow\dots,$$

где

$$\bar\omega_n=\begin{cases}1, & \text{если } \omega_n\neq p,\\ 0, & \text{если } \omega_n=p,\end{cases}$$

$$\tilde\omega_n=\begin{cases}\omega_n, & \text{если } \omega_n\neq p,\\ 1, & \text{если } \omega_n=p.\end{cases}$$

Пара $(\bar\omega_n, \tilde\omega_n)$ пробегает значения $(1,0),(1,1),\dots,(1,p-1),(0,1)$, когда символ ω_n пробегает значения $0,1,\dots,p$, причем множество пар $X=\{(1,0),(1,1),\dots,(1,p-1),(0,1)\}$ составлено таким образом, что для любого элемента $(\varepsilon^m, \varepsilon^s) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ (ε – порождающий элемент группы $\mathbb{Z}_p$) существует единственная пара $(k,\ell) \in X$, определяющая эпиморфизм $\varphi_{k,\ell}: \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $\varphi_{k,\ell}(\varepsilon,1)=\varepsilon^k$, $\varphi_{k,\ell}(1,\varepsilon)=\varepsilon^\ell$, при котором

$$\varphi_{k,\ell}(\varepsilon^m, \varepsilon^s) = 1. \tag{2}$$

Группа $G_\omega = \text{гр}\,(a, b_\omega, c_\omega)$, $\omega \in \Omega$, определяется [ ] как группа преобразований интервала $I=[0,1]$, порожденная преобразованиями a, b_ω, c_ω , где a – циклическая перестановка p-х долей интервала I , а преобразование b_ω , (c_ω) определяется с помощью слова U_ω , (V_ω) следующим образом. Интервал I делится на p равных частей, над первыми $p-1$ из которых пишем первые $p-1$ символа (до стрелки $\downarrow$) слова U_ω, (V_ω) . Затем оставшийся ненадписанным интервал делим на p равных частей, над первыми $p-1$ из которых пишем $p-1$ символа слова U_ω , (V_ω) расположенных между первой и второй стрелками $\downarrow$ и т. д. Тем самым интервал I разобьется в объединение счетного числа подинтервалов, действие над каждым из которых определим соответствующим символом слова U_ω , (V_ω) (при этом символы T и Π^0 обозначают тождественное преобразование, символ Π^i обозначает i-ю степень циклической перестановки p-х долей интервала, над которым он написан). Очевидно, в G_ω выполнены соотношения $a^p = b_\omega^p = c_\omega^p = 1$, b_ω и c_ω коммутируют между собой, порождая группу гр(b_ω, c_ω) , изоморфную группе $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Обозначим нетривиальные элементы группы гр(b_ω, c_ω) буквами $b_\omega, c_\omega, \ldots, d_\omega$ и рассмотрим в качестве системы порождающих элементов группы G_ω систему $A_\omega = \{a, a^2, \ldots, a^{p-1}, b_\omega, c_\omega, \ldots, d_\omega\}$. Если $g \in G_\omega$, то через $\partial(g)$ будет обозначаться длина элемента g относительно системы порождающих A_ω .

Пусть $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ – бесконечная последовательность натуральных чисел, $[0:p]$ обозначает слово $012\ldots p$. Обозначим через $\Sigma_{\{r_k\}}$ множество последовательностей $\omega \in \Omega$, имеющих вид

$$\omega = \underbrace{[0:p]\ldots[0:p]}_{r_1} \eta_1 \underbrace{[0:p]\ldots[0:p]}_{r_2} \eta_2 \cdots \underbrace{[0:p]\ldots[0:p]}_{r_k} \eta_k \cdots,$$

где $\eta_k \in \{0,1,\ldots,p\}$, $k=1,2,\ldots$, а через $\Sigma_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$ – множество последовательностей $\omega \in \Omega$, имеющих вид

$$\omega = \underbrace{[0:p]\ldots[0:p]}_{r_1} \eta_1 \underbrace{[0:p]\ldots[0:p]}_{r_2} \eta_2 \cdots \underbrace{[0:p]\ldots[0:p]}_{r_k} \eta_k [0:p][0:p]\ldots,$$

где $r_i \in \{0,1,\dots,p\}$, $i=1,2,\dots,k$. Пусть $G_\omega \cong \mathcal{F}/N_\omega$, где $\mathcal{F}$ – свободная группа с p^2+p-2 образующими $a_1,a_2,\dots,a_{p-1}$, $b,c,\dots,d$, причем эти образующие переходят в соответствующие элементы $a,a^2,\dots,a^{p-1}$, $b_\omega,c_\omega,\dots,d_\omega$ при каноническом гомоморфизме. Положим

$$N_{\{r_k\}} = \bigcap_{\omega\in\Sigma_{\{r_k\}}} N_\omega, \qquad G_{\{r_k\}} = \mathcal{F}/N_{\{r_k\}},$$

$$N_{\{r_1,\dots,r_k\}} = \bigcap_{\omega\in\Sigma_{\{r_1,\dots,r_k\}}} N_\omega, \quad G_{\{r_1,\dots,r_k\}} = \mathcal{F}/N_{\{r_1,\dots,r_k\}}.$$

Обозначим образы порождающих $a_1,a_2,\dots,a_{p-1},b,c,\dots,d$ в группах $G_{\{r_k\}}$, $G_{\{r_1,\dots,r_k\}}$ при факторизации соответственно

$$\bar a_1,\bar a_2,\dots,\bar a_{p-1},\bar b,\bar c,\dots,\bar d;\ \tilde a_1,\tilde a_2,\dots,\tilde a_{p-1},\tilde b,\tilde c,\dots,\tilde d$$

(эти системы порождающих будем называть каноническими). Мы утверждаем, что существует (быстро растущая) последовательность натуральных чисел $\{r_k\} = r_1,r_2,\dots,r_k,\dots$ такая, что группа $G_{\{r_k\}}$ является p-группой, допускающей гомоморфизмы на $2^{\aleph_0}$ неизоморфных групп и имеющей промежуточный рост.

§ 2. Доказательство теоремы

Обозначим через Ω_0 множество последовательностей $\omega\in\Omega$ таких, что в ω каждый символ алфавита $\{0,1,\dots,p\}$ входит бесконечное число раз. В [6] доказано, что если $\omega\in\Omega_0$, то G_ω – бесконечная p-группа. При этом верно следующее. Группа G_ω содержит подгруппу H_ω индекса p (H_ω состоит из элементов, переводящих p-е доли интервала $[0,1]$ в себя), порожденную элементами $a^j b_\omega a^{-j}$, $a^j c_\omega a^{-j}$, $0\le j\le p-1$, причем H_ω изоморфна подгруппе группы $\underbrace{G_{\sigma\omega}\times\dots\times G_{\sigma\omega}}_{p}$ в силу отображения

$$\psi^{(\omega)}(a^j b_\omega a^{-j}) = \begin{cases} (a^{\bar\omega_0},1,\dots,1,b_{\sigma\omega}), & \text{если } j\equiv 0 \pmod p,\\ (1,\dots,1,b_{\sigma\omega},a^{\bar\omega_0},\underbrace{1,\dots,1}_{j-1}), & \text{если } j\not\equiv 0 \pmod p; \end{cases} \tag{3}$$

$$\psi^{(\omega)}(a^j c_\omega a^{-j}) = \begin{cases} (a^{\tilde{\omega}_0}, 1, \ldots, 1, c_{\sigma(\omega)}), & \text{если } j \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p), \\ (1, \ldots, 1, c_{\sigma\omega}, a^{\tilde{\omega}_0}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{j-1}), & \text{если } j \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p). \end{cases} \tag{4}$$

Пусть $\{r_k\}$ – произвольная последовательность натуральных чисел.

ЛЕММА 1. Если $g \in G_\omega$, $\omega \in \Sigma_{\{r_k\}}$ и $\partial(g) = n$, то

$$g^{p^{2(p+1)n}} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что запись g начинается с символа a^i, $i \neq 0$, а заканчивается символом из множества $\{b_\omega, c_\omega, \ldots, d_\omega\}$. Пусть $\psi^{(\omega)}(g^p) = (g_0^{(1)}, \ldots, g_{p-1}^{(1)})$. Тогда элементы $g_i^{(1)}$, $i = 0, \ldots, p-1$ (принадлежащие группе $G_{\sigma\omega}$) являются циклическими сдвигами друг друга и, как показано в [6], имеют длину $\leq \partial(g)$. При этом если в записи g содержится символ из множества $\{b_\omega, c_\omega, \ldots, d_\omega\}$, для которого

$$\psi^{(\omega)}(f_\omega) = (1, 1, \ldots, 1, f_{\sigma\omega}),$$

то $\partial(g_i) < \partial(g)$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Проводя затем аналогичное рассуждение с элементом $g_0^{(1)}$ и действуя таким же образом и далее $2(p+1)n$ раз, мы придем к единичному элементу, ибо среди первых $2(p+1)n$ символов последовательности $\omega \in \Sigma_{\{r_k\}}$ каждый символ множества $\{0, 1, \ldots, p\}$ встречается по меньшей мере n раз.

СЛЕДСТВИЕ 1. Группа $G_{\{r_k\}}$ является бесконечной p-группой.

ЛЕММА 2. Для каждой последовательности $\omega \in \Omega_0$ существует не более счетного числа последовательностей $\eta \in \Omega_0$ таких, что $G_\omega \cong G_\eta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что если $\omega \neq \eta$, $\omega, \eta \in \Omega_0$, то существует слово $W(a_1, \ldots, a_{p-1}, b, \ldots, d)$ такое, что $W(a, \ldots, a^{p-1}, b_\omega, \ldots, d_\omega) = 1$ в G_ω, но $W(a, \ldots, a^{p-1}, b_\eta, \ldots, d_\eta) \neq 1$ в G_η. Отсюда будет следовать утверждение леммы, ибо если для некоторой последовательности ω существует более чем счетное множество последовательностей η, для которых $G_\omega \cong G_\eta$, то найдутся две последовательности η, ζ, $\eta \neq \zeta$ такие, что

$G_\eta \cong G_\zeta$ при отображении $a \to a, \ldots, a^{p-1} \to a^{p-1}, b_\eta \to b_\zeta, \ldots d_\eta \to$ $\to d_\zeta$. Противоречие.

Случай $p=2$ полностью рассмотрен в [5]. Поэтому будем считать, что $p \geq 3$. Для каждого символа i из множества $\{0,1,\ldots,p\}$ фиксируем элемент $f_{i,\omega} \in \{b_\omega,\ldots,d_\omega\}$ такой, что $\Phi_{(\bar{i},\tilde{i})}(f_{i,\omega})=1$ (где $\Phi(\bar{i},\tilde{i})$ – эпиморфизм, стоящий в левой части равенства (2)). Если последовательность начинается с символа i, то

$$\psi^{(\omega)}((af_{i,\omega})^p) = (f_{i,\sigma\omega}, f_{i,\sigma\omega}, \ldots, f_{i,\sigma\omega}),$$

и поэтому $(af_{i,\omega})^{p^2}=1$ в группе G_ω. Если же $\omega_0 \neq i$, то

$$\psi^{(\omega)}((af_{i,\omega})^p) = (f_{i,\sigma\omega}a^k, \ldots, f_{i,\sigma\omega}a^k, a^k f_{i,\sigma\omega}),$$

где $k \neq 0$ и $(af_{i,\omega})^{p^2} \neq 1$ в G_ω. Таким образом, если две последовательности η, ζ отличаются первым символом, т. е. $\eta_0 \neq \zeta_0$, то $(af_{\eta_0,\eta})^{p^2}=$ $=1$ в G_ζ, в то время как $(af_{\eta_0,\zeta})^{p^2} \neq 1$ в G_ζ.

Предположим, что $\eta_0=\zeta_0,\ldots,\eta_{n-1}=\zeta_{n-1}$, но $\eta_n \neq \zeta_n$. Построим слово $W(a,\ldots,a^{p-1},b_\eta,\ldots,d_\eta)$, которое определяет элемент группы G_η, переводящий каждый p-адический интервал ранга n отрезка $[0,1]$ в себя, причем сужение этого элемента на интервал $(0,p^{-n})$ действует подобно элементу $af_{\eta_n,\sigma^n\eta}$, а сужения этого элемента на остальные p-адические интервалы ранга n определяют элементы порядка $\leq p$. С этой целью рассмотрим последовательность слов $W_n, W_{n-1},\ldots,W_1, W_0$, где $W_n=af_{\eta_n,\sigma^n\eta}$, а W_i получается из W_{i+1}, $i=n-1,n-2,\ldots,0$, с помощью подстановок

$$a \to b_{\sigma^i\eta}, b_{\sigma^{i+1}\eta} \to a^{-1}b_{\sigma^i\eta}a,\ c_{\sigma^{i+1}\eta} \to a^{-1}c_{\sigma^i\eta}a, f_{\eta_n,\sigma^{i+1}\eta} \to a^{-1}f_{\eta_n,\sigma^i\eta}a,$$

если $\eta_i \neq p$, и с помощью подстановок

$$a \to c_{\sigma^i\eta}, b_{\sigma^{i+1}\eta} \to a^{-1}b_{\sigma^i\eta}a,\ c_{\sigma^{i+1}\eta} \to a^{-1}c_{\sigma^i\eta}a, f_{\eta_n,\sigma^{i+1}\eta} \to a^{-1}f_{\eta_n,\sigma^i\eta}a$$

– в противном случае. Мы утверждаем, что слово W_0 удовлетворяет необходимым условиям. Действительно, из формул (3), (4) ясно, что сужение элемента группы G_η, определяемого словом W_0 на интервал $(0,p^{-n})$, действует подобно элементу $af_{\eta_n,\sigma^n\eta}$ группы $G_{\sigma^n\eta}$. Сумма показателей степеней при символах a, предшествующих любому вхождению любого из символов $b_{\sigma i_\eta}$, $b^{-1}_{\sigma i_\eta}$, $c_{\sigma i_\eta}, c^{-1}_{\sigma i_\eta}$ в слово W_i, равна либо -1, либо 0, а сумма показателей степеней при символах a, предшествующих вхождению символа $f_{\eta_n, \sigma i_\eta}$ (если только $f_{\eta_n, \sigma i_\eta}$ не совпадает с одним из символом $b_{\sigma i_\eta}$, $c_{\sigma i_\eta}$), в слове W_i равна -1. Поэтому если $\psi^{(\eta)}(W_0)=(W_0^{(1)}, W_1^{(1)},\dots, W_{p-1}^{(1)})$, то $W_0^{(1)}$ графически равно слову W_1, а в каждое из слов $W_1^{(1)},\dots,W_{p-1}^{(1)}$ входит только либо символ a, либо символы $b_{\sigma\eta}$, $c_{\sigma\eta}$, т. е. каждое из слов $W_i^{(1)}$, $i=1,\dots,p-1$, является либо степенью элемента a, либо определяет элемент группы гр$(b_{\sigma\eta}, c_{\sigma\eta})$ и поэтому имеет порядок $\le p$ (здесь существенно то, что $p\ge 3$). Аналогично, если $\psi^{(\sigma\eta)}(W_1)=(W_0^{(2)} W_1^{(2)},\dots,W_{p-1}^{(2)})$, то $W_0^{(2)}$ графически равно слову W_2, $W_i^{(2)}$, $i=1,\dots,p-1$, определяет элемент одной из групп гр(a), гр$(b_{\sigma^2\eta}, c_{\sigma^2\eta})$ и тем самым имеет порядок $\le p$ и т. д. Поэтому слово W_0 удовлетворяет всем необходимым условиям. Ввиду совпадения у последовательностей η и ξ начальных отрезков длины n мы получаем, что $[W_0(a,\dots,a^{p-1}, b_\eta,\dots,d_\eta)]^{p^2}=1$ в $G_{\sigma^n\eta}$, в то время как $[W_0(a,\dots,a^{p-1}, b_\xi,\dots,d_\xi)]^{p^2}\ne 1$ в $G_{\sigma^n\xi}$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Группа $G_{\{z_k\}}$ обладает континуумом неизоморфных фактор-групп.

Под окрестностью радиуса n единичного элемента в группе G будем понимать множество $\{g : \partial(g)\le n\}$.

ЛЕММА 3. Если выполнено неравенство

$$k+z_1+\dots+z_k \ge \log_2 2n, \tag{5}$$

то графы Кэли [9] групп $G_{\{z_k\}}, G_{\{z_1,\dots,z_k\}}$, построенные по каноническим системам образующих элементов, изоморфны в окрестностях радиуса n единичного элемента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строение графа Кэли группы G в окрестности радиуса n единичного элемента полностью определяется множеством слов длины $\le 2n$, определяющих единичный элемент в G. Докажем поэтому, что при выполнении условия (5) множества слов в алфавитах $\{\bar a_1,\dots,\bar a_{p-1}, \bar b,\dots,\bar d\}$, $\{\tilde a_1,\dots,\tilde a_{p-1}, \tilde b,\dots,\tilde d\}$ длины $\le 2n$, определяющих единичные элементы соответственно в группах $G_{\{\eta_k\}}$, $G_{\{\eta_1,\dots,\eta_k\}}$, совпадают. С этой целью опишем алгоритмы, решающие проблему равенства слов в группах $G_{\{\eta_k\}}$, $G_{\{\eta_1,\dots,\eta_k\}}$.

В группе $G_\omega =$ гр $(a,\dots,a^{p-1},b_\omega,c_\omega,\dots,d_\omega)$ для решения проблемы равенства слов можно применить алгоритм $\mathfrak{A}_\omega$ с оракулом ω, состоящий в следующем. Приводим слово $W(a,\dots,a^{p-1},b_\omega,\dots,d_\omega)$ к виду $a^{i_1}*a^{i_2}*\dots*a^{i_{k-1}}*a^{i_k}$, где $i_2,\dots,i_{k-1}\neq 0$, а $*$ обозначает элементы множества $\{b_\omega,c_\omega,\dots,d_\omega\}$. Очевидно, что процедура приведения эффективна. Пусть $\partial_a(W)$ – сумма показателей степеней у вхождений символа a в слово W. Если $\partial_a(W)\not\equiv 0 \pmod p$, то $W\neq 1$ в G, если же $\partial_a(W)\equiv 0 \pmod p$, то $W\in H_\omega$ и $W=1$ в G_ω тогда и только тогда, когда $W_0^{(1)}=1,\dots,W_{p-1}^{(1)}=1$ в $G_{\sigma\omega}$, где $\psi^{(\omega)}(W)=(W_0^{(1)},\dots,W_{p-1}^{(1)})$. Так как $\partial(\overline{W}_i^{(1)})\leqslant\frac{1}{2}(\partial(W)+1)$, где $\overline{W}_i^{(1)}$ – результат приведения слова $W_i^{(1)}$, а отображение $\psi^{(\omega)}$ полностью определяется первой буквой последовательности ω, то для распознавания истинности равенства $W=1$ в G_ω необходимо знать не более $[\log_2\partial(W)]+1$ первых символов последовательности ω. Если у двух последовательностей η и ξ начальные отрезки длины $[\log_2 n]+2$ совпадают, то совпадают и множества слов, определяющих единичный элемент и имеющих длину $\leqslant 2n$.

Равенство $W(\bar a_1,\dots,\bar a_{p-1},\bar b,\dots,\bar d)=1$ в $G_{\{\eta_k\}}$ эквивалентно системе равенств $\{W(a,\dots,a^{p-1},b_\omega,\dots,d_\omega)=1$ в $G_\omega\}$, где ω пробегает множество $\sum_{\{\eta_k\}}$, причем проверка этой бесконечной системы равенств эквивалентна проверке конечного числа равенств $W(a,\dots,a^{p-1},b_\omega,\dots,d_\omega)=1$ в G_ω, где $\omega\in\sum_{\{\eta_k\}}^W$, а через $\sum_{\{\eta_k\}}^W$ обозначено конечное множество последовательностей вида

$$\omega=\underbrace{[0:p]\dots[0:p]}_{\eta_1}\eta_1\dots\underbrace{[0:p]\dots[0:p]}_{\eta_k}\eta_k\underbrace{[0:p]\dots[0:p]}_{\eta_{k+1}}0\underbrace{[0:p]\dots[0:p]}_{\eta_{k+2}}0\dots,$$

$\eta_1,\dots,\eta_k\in\{0,1,\dots,p\}$, причем k однозначно определяется неравенствами

$$k-1+\eta_1+\dots+\eta_{k-1}<\log_2 2\partial(W)\leqslant k+\eta_1+\dots+\eta_k.$$

Точно так же равенство $W(\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_{p-1},\tilde{b},\ldots,\tilde{d})=1$ в $G_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$ эквивалентно системе равенств $W(a,\ldots,a^{p-1},b_\omega,\ldots,d_\omega)=1$ в G_ω, где ω пробегает множество $\Sigma_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$. Если $\partial(W)\leq 2n$ и выполнено условие (5), то ввиду того, что множества начальных кусков длины $[\log_2 2n]$ у последовательностей из $\Sigma_{\{r_k\}}$ и $\Sigma_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$ совпадают, равенства $W(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_{p-1},\bar{b},\ldots,\bar{d})=1$ в $G_{\{r_k\}}$, $W(\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_{p-1},\tilde{b},\ldots,\tilde{d})=1$ в $G_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$ выполняются либо не выполняются одновременно.

Лемма доказана.

Обозначим через $\gamma_{\{r_k\}}(n)$, $\gamma_{\{r_1,\ldots,r_k\}}(n)$ функции роста групп $G_{\{r_k\}}$, $G_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$, построенные по каноническим системам образующих.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если имеет место (5), то

$$\gamma_{\{r_k\}}(i)=\gamma_{\{r_1,\ldots,r_k\}}(i) \tag{6}$$

для $i=1,2,\ldots,n$.

ЛЕММА 4. Группа $G_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$ содержит подгруппу конечного индекса $H_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$, которая изоморфна подгруппе группы

$$\underbrace{G_{\omega^*}^{p^{\ell_k}}\times\ldots\times G_{\omega^*}^{p^{\ell_k}}}_{(p+1)^k},$$

где $\ell_k=k+(r_1+\ldots+r_k)(p+1)$, а $\omega^*=[0:p][0:p]\ldots[0:p]\ldots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим группу $G'_{\{r_1,\ldots,r_k\}}$ как группу преобразований множества $Y_k=\{0,1,\ldots,p\}^k\times[0,1]=\{I_{q_1\ldots q_k}\}$, $q_1,\ldots,q_k\in\{0,1,\ldots,p\}$, порожденную преобразованиями $\tilde{a}'_1,\ldots,\tilde{a}'_{p-1},\tilde{b}',\ldots,\tilde{d}'$, при этом преобразование $\tilde{a}'_i$, $i=1,\ldots,p-1$, действует на каждом интервале $I_{q_1\ldots q_k}$ как преобразование a^i, $\tilde{b}',\tilde{c}',\ldots,\tilde{d}'$ действуют на $I_{q_1\ldots q_k}$ соответственно как преобразования $b_{\omega^{(q_1\ldots q_k)}},\ldots,d_{\omega^{(q_1\ldots q_k)}}$, где через $\omega^{(q_1\ldots q_k)}$ обозначена последовательность

$$\omega^{(q_1\ldots q_k)}=\underbrace{[0:p]\ldots[0:p]}_{r_1}q_1\ldots\underbrace{[0:p]\ldots[0:p]}_{r_k}q_k[0:p][0:p]\ldots .$$

Очевидно, что группа $G_{\{r_1,\dots,r_k\}}$ изоморфна группе $G'_{\{r_1,\dots,r_k\}}$ в силу отображения $\tilde{a}_1\to\tilde{a}'_1,\dots,\tilde{a}_{p-1}\to\tilde{a}'_{p-1},\tilde{b}\to\tilde{b}',\dots,\tilde{d}\to\tilde{d}'$. Разобьем каждый из интервалов $I_{q_1\dots q_k}$ на p-адические интервалы ранга l_k и получившееся в результате разбиение множества Y_k обозначим через Δ_k. Пусть $H'_{\{r_1,\dots,r_k\}}$ – подгруппа в $G'_{\{r_1,\dots,r_k\}}$, состоящая из элементов, переводящих интервалы разбиения Δ_k в себя. Аналогично через $H^{(l_k)}_\omega$ обозначим подгруппу группы G_ω, состоящую из элементов, переводящих p-адические интервалы ранга l_k отрезка $[0,1]$ в себя. Фактор-группа $G'_{\{r_1,\dots,r_k\}}/H'_{\{r_1,\dots,r_k\}}$ изоморфна некоторой группе подстановок конечного множества из $(p+1)^k p^{l_k}$ элементов и тем самым $|G'_{\{r_1,\dots,r_k\}}:H'_{\{r_1,\dots,r_k\}}|<\infty$. Сужение преобразования $g\in H'_{\{r_1,\dots,r_k\}}$, представленного словом $W(\tilde{a}'_1,\dots,\tilde{a}'_k,\tilde{b}',\dots,\tilde{d}')$ на любой интервал $I_{q_1\dots q_k}$, подобно элементу $W(a,\dots,a^{p-1},b_{\omega(q_1\dots q_k)},\dots$ $\dots,d_{\omega(q_1\dots q_k)})$ группы $G_{\omega(q_1\dots q_k)}$, причем этот элемент принадлежит группе $H^{(l_k)}_{\omega(q_1\dots q_k)}$. Но группа $H^{(l_k)}_{\omega(q_1\dots q_k)}$ изоморфна подгрупле группы

$$\underbrace{G_{\omega^*}\times\dots\times G_{\omega^*}}_{p^{l_k}}$$

(это получается l_k кратным применением вложения $H_\omega\to G_{\sigma\omega}\times G_{\sigma\omega}$), что доказывает лемму.

Завершим доказательство теоремы. В силу замечания, сделанного во введении, а также следствий 1, 2, нам осталось построить последовательность натуральных чисел таким образом, чтобы имело место равенство (1). Пусть $r_1=1$. По лемме 4 группа $G_{\{r_1\}}$ содержит подгрупну конечного индекса $H_{\{r_1\}}$, которая изоморфна некоторой подгрупле группы

$$\underbrace{G^{p^{l_1}}_{\omega^*}\times\dots\times G^{p^{l_1}}_{\omega^*}}_{p+1}.$$

Так как функция роста γ_{K+L} прямого произведения двух групп не превосходит произведения $\gamma_K\gamma_L$ (т. е. $\gamma_{K\times L}\preccurlyeq\gamma_K\gamma_L$) и имеет место оценка $\gamma_{G_{\omega^*}}\preccurlyeq 2^{n^\alpha}$, где $\alpha<1$ (см. [5, 6]), то группа $H_{\{r_1\}}$ имеет непоказательный рост, а значит, и группа $G_{\{r_1\}}$ имеет непоказательный рост [5]. Пусть n_1 – натуральное число такое, что

$$\gamma_{\{r_1\}}(n_1) \le \left(1+\frac{1}{1}\right)^{n_1}. \tag{7}$$

Подберем число r_2 таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$2 + r_1 + r_2 \ge \log_2 2n_1 . \tag{8}$$

Группа $G_{\{r_1, r_2\}}$ содержит подгруппу конечного индекса $H_{\{r_1, r_2\}}$, которая изоморфна подгруппе группы

$$\underbrace{G_{\omega^*}^{p^{\ell_2}} \times \ldots \times G_{\omega^*}^{p^{\ell_2}}}_{(p+1)^2} .$$

Следовательно, группа $G_{\{r_1, r_2\}}$ имеет непоказательный рост и тем самым существует натуральное число n_2 такое, что

$$\gamma_{\{r_1, r_2\}}(n_2) \le \left(1+\frac{1}{2}\right)^{n_2}. \tag{9}$$

Вообще, пусть мы уже выбрали числа $r_1, \ldots, r_k$. Подберем n_k таким образом; чтобы имело место неравенство

$$\gamma_{\{r_1, \ldots, r_k\}}(n_k) \le \left(1+\frac{1}{k}\right)^{n_k}, \tag{10}$$

после чего r_{k+1} подберем таким образом, чтобы имело место неравенство

$$k + r_1 + \ldots + r_{k+1} \geq \log_2 2n_k . \tag{11}$$

Продолжая действовать таким же образом далее, мы построим некоторую последовательность $\{r_k\}$. Утверждается, что группа $G_{\{r_k\}}$ имеет непоказательный рост. Действительно, в силу неравенств (7)-(11) и следствия 3 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_{\{r_k\}}(n)} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{\gamma_{\{r_1,\ldots,r_k\}}(n_k)} \le \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right) = 1.$$

Теорема доказана.

Литература

1. R.E.PHILLIPS, Embedding methods for periodic groups, Proc. London Math. Soc., 35 (1977), 238-256.

2. K.K.HICKIN, R.E.PHILLIPS, Non-isomorphic Burnside groups of exponent p^2, Canad. J.Math., 30 (1978), 180-189.

3. А. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ, О группах с циклическими подгруппами, Доклады Болгарской АН, 32, № 9 (1979), 1165-1166.

4. S.C.JEANES, Counting the periodic groups generated by two finite groups, Bull. London Math. Soc., 12, N° 2 (1980), 133-137.

5. Р. И. ГРИГОРЧУК, Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних, Изв. АН СССР, сер. матем., 48, № 5 (1984).

6. Р. И. ГРИГОРЧУК, О степенях роста p-групп и групп без кручения, Матем. сб., 125, № 4 (1984).

7. M.GROMOV, Groups of polynomial growth and expanding maps, Publs Math. IHES, 53 (1981), 53-78.

8. J.MILNOR, A note on curvature and fundamental groups, J. Diff. Geom., 2 (1968), 1-7.

9. В. МАГНУС, А. КАРРАС, Д. СОЛИТЭР, Комбинаторная теория групп, М., Наука, 1974.

Поступило 28 марта 1984 г.