М. М. Агрест, Некоторые соотношения для экспоненциально-интегральных функций Бесселя первого рода, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, номер 6, 67–69

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1991 МАТЕМАТИКА № 6 (349)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

М. М. Агрест

УДК 517.581

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА

Экспоненциально-интегральными функциями Бесселя первого рода названы следующие функции двух переменных:

$$Ze_0(x, y; -1) = \sigma^2 \int_0^y [1 - e^{-xt} Z_0(t)] \frac{dt}{t},$$
$$Ze_k(x, y; -1) = \sigma^2 \int_0^y e^{-xt} Z_k(t) \frac{dt}{t}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $Z_k(t)$ — функция Бесселя k-го порядка $J_k(t)$ или ее модификация $I_k(t)$.

Условимся, что во всех формулах, содержащих параметр $\sigma = \pm 1$, символ Z заменяется символом J при $\sigma = -1$, а при $\sigma = 1$ символ Z заменяется символом I. Нетрудно получить следующие соотношения для функций (1):

$$Ze_0(x, y; -1) = \ln y \{x Ze_0(x, y; 0) - \sigma Ze_1(x, y; 0)\} - x Zel_0(x, y; 0) + \sigma Zel_1(x, y; 0), \tag{2}$$

$$Ze_k(x, y; -1) = \frac{1}{2k} \{Ze_{k-1}(x, y; 0) - \sigma Ze_{k+1}(x, y; 0)\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь

$$Ze_k(x, y; 0) = \sigma^2 \int_0^y e^{-xt} Z_k(t)\, dt \tag{3}$$

и

$$Zel_k(x, y; 0) = \sigma^2 \int_0^y e^{-xt} \ln t\, Z_k(t)\, dt. \tag{4}$$

Функции $Ze_k(x, y, 0)$, $k = 0, 1, \dots$, представляют собой замкнутую, быстро сходящуюся с ростом индекса k систему функций. Для вычисления этих функций, а также функций (4), в [1] приведен пакет алгоритмов и программ. Поэтому формулы (2) могут быть использованы в качестве алгоритма для вычисления функций (1).

Покажем, что экспоненциально-интегральные функции Бесселя первого рода нулевого порядка удовлетворяют следующему соотношению:

$$\varphi(x, y) \equiv \int_0^y [1 - e^{-xt} Z_0(t)] \frac{dt}{t} - \int_y^\infty e^{-xt} Z_0(t) \frac{dt}{t} = \gamma + \ln \frac{y}{2}(x + \sqrt{x^2 - \sigma}), \tag{5}$$

γ — постоянная Эйлера. При $\sigma = -1$ и $x = 0$ формула (5) вырождается в известное соотношение для интегральной функции Бесселя нулевого порядка [2]:

$$\int_y^\infty J_0(t) \frac{dt}{t} = \int_0^y [1 - J_0(t)] \frac{dt}{t} - \gamma - \ln \frac{y}{2}. \tag{6}$$

Интегральные функции Бесселя k-го порядка

$$Zi_k(y) = \sigma \int_y^\infty Z_k(t) \frac{dt}{t}$$

введены и изучены в работах [2], [3]. Аналога соотношения (5) для интегральной модифицированной функции Бесселя $I(y)$ не существует, т. к. при $\sigma=1$ это соотношение имеет смысл лишь при $x>1$.

Формула (5) была опубликована в [4] без вывода. Приведем кратко ее доказательство. С этой целью рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(x)=\lim_{y\to\infty}\left\{\int_0^y[1-e^{-xt}Z_0(t)]\frac{dt}{t}-\ln y\right\}. \tag{7}$$

Выполнив интегрирование по частям в правой части формулы (4) при $k=0$, учитывая, что $\lim\limits_{y\to 0} y\cdot Ze_0(x,\ y;\ 0)=0$, а также соотношение [5]:

$$Ze_0(x,\ y;\ 0)=(x^2-\sigma)^{-1/2}\{1-e^{-xy}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k(x-\sqrt{x^2-\sigma})\,Z_k(y)\},\quad \varepsilon_0=1,\quad \varepsilon_k=2,\ k>0,$$

найдем

$$Zel_0(x,\ y;\ 0)=\ln y\, Ze_0(x,\ y;\ 0)-\frac{1}{\sqrt{x^2-\sigma}}\int_0^y[1-e^{-xt}Z_0(t)]\frac{dt}{t}-$$

$$-(x^2-\sigma)^{-1/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\{Ze_{k-1}(x,\ y;\ 0)+\sigma\, Ze_{k+1}(x,\ y;\ 0)\}.$$

Устремляя в этом выражении переменную $y\to\infty$ и учитывая известные соотношения [6], которые в наших обозначениях принимают вид:

$$Zel_0(x,\ \infty;\ 0)=(x^2-\sigma)^{-1/2}\left(\gamma+\ln\frac{2(x^2-\sigma)}{x+\sqrt{x^2-\sigma}}\right), \tag{8}$$

$$Ze_k(x,\ \infty;\ 0)=(x^2-\sigma)^{-1/2}(x+\sqrt{x^2-\sigma})^{-k},\quad k=0,\ 1,\ \ldots, \tag{9}$$

получим

$$\psi(x)=\lim_{y\to\infty}\{Ze_0(x,\ y;\ -1)-\ln y\}=\gamma-\ln 2+\ln(x+\sqrt{x^2-\sigma}). \tag{10}$$

Поскольку второе слагаемое в левой части равенства (5) при $y\to\infty$ обращается в нуль, заключаем на основании (10), что при $y\to\infty$ соотношение (5) справедливо при любом значении второй переменной $x>0$. Наоборот, при $x=0$ и $\sigma=-1$ соотношение (5) справедливо при любом значении переменной $y>0$, т. к. при $x=0$ оно переходит в равенство (6) для интегральных функций Бесселя $Ji_0(y)$.

Чтобы убедиться в справедливости соотношения (5) при $\sigma=-1$ для любых $(x>0,\ y>0)$, а при $\sigma=1$ для любых $(x>1,\ y>0)$, рассмотрим при этих значениях функцию $\varphi(x,\ y)$ из (5). Так как $\partial\varphi/\partial y=1/y$, то $\varphi(x,\ y)=\ln y+\varphi_1(x)$. Здесь $\varphi_1(x)$ не зависит от y, поэтому справедлива запись

$$\varphi_1(x)=\lim_{y\to\infty}[\varphi(x,\ y)-\ln y]=\psi(x),$$

и в силу формулы (10) получим из представления $\varphi(x,y)=\ln y+\psi(x)$ искомое соотношение (5).

В заключение используем полученные результаты для того, чтобы выразить через элементарные функции несобственные интегралы

$$Zel_k(x,\ \infty;\ 0)=\sigma\int_0^{\infty}e^{-xt}\ln t\, Z_k(t)\,dt,\ k=1,\ 2,\ \ldots.$$

Чтобы найти выражение для $Zel_1(x,\ \infty;\ 0)$, заметим, что в силу соотношения (9) имеет место

$$\lim_{y\to\infty}[x\,Ze_0(x,\ y;\ 0)-\sigma\, Ze_1(x,\ y;\ 0)]=1.$$

Поэтому, устремляя в первом соотношении формулы (2) переменную $y\to\infty$ и используя соотношения (8) и (10), найдем

$$Zel_1(x, \infty; 0) = \int_0^\infty e^{-xt} \ln t\, Z_1(t)\, dt =$$

$$= \sigma\left\{\gamma - \ln 2 + \ln(x + \sqrt{x^2 - \sigma}) - x(x^2 - \sigma)^{-1/2}\left[\gamma + \ln \frac{2(x^2 - \sigma)}{x + \sqrt{x^2 - \sigma}}\right]\right\}. \quad (11)$$

Выражения для несобственных интегралов $Zel_k(x, \infty; 0)$ при $k > 1$ можно последовательно находить из рекуррентного соотношения для функций $Zel_k(x, y; 0)$, которое при $y \to \infty$ записывается в виде (см. [1]):

$$Zel_k(x, y; 0) = \sigma\{Zrl_{k-2}(x, \infty; 0) + 2xZel_{k-1}(x, \infty; 0) -$$

$$- \frac{2}{k-1}(x + \sqrt{x^2 - \sigma})^{-(k-1)}\}, \quad k = 2, 3, \ldots \quad (12)$$

Формулы (8), (11) и (12) при $\sigma = -1$ определяют значения несобственных интегралов $Jel_k(x, \infty; 0)$ для всех $x > 0$, а при $\sigma = 1$ — значения несобственных интегралов $Iel_k(x, \infty; 0)$ для всех $x > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агрест М. М., Чачибая Ц. Ш. Пакет программ для вычисления высших трансцендентных функций, зависящих от одной или двух переменных.— ЦНИИатоминформ, ОФАП. инв. № 6661, 1988. 93 с.
2. Lovan A. N., Blanch G., Abramovitz M. Tables of $Ji_0(x)$ and related functions // J. Math. Phys.— 1943.— V. 22.— № 2.— P. 51—57.
3. Smith V. G. An asymptotic exspansion of $Ji_0(x)$ // J. Math. Phys.— 1943.— V. 22.— № 2. — P. 58—59.
4. Агрест М. М. Обобщение некоторых соотношений для интегральных функций Бесселя // Сообщения АН ГрузССР.— 1987.— Т. 126.— № 2.— С. 241—244.
5. Агрест М. М. Разложение неполных интегралов Липшица—Ханкеля в ряды по функциям Бесселя // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.— 1971.— Т. 11.— № 5.— С. 1127— 1138.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции.— М.: Наука, 1983.— 750 с.

г. Сухуми

Поступили
полный текст 12.12.1988
краткое сообщение 29.03.1990

С. М. Грудский

УДК 517.983

МАТРИЧНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ, II

Краевой задаче Римана и сингулярным интегральным операторам с коэффициентами, имеющими разрывы типа бесконечного индекса, посвящено большое число исследований, начиная с работ Н. В. Говорова [1]. Достаточно подробно изучены скалярные задачи как в различных классах целых функций, так и в пространствах L_p. Отметим, однако, что матричный случай исследован существенно хуже, хотя именно матричные задачи с бесконечным индексом чаще встречаются в приложениях, напр., в теории дифракции [2]. Данная работа является продолжением [3], где были рассмотрены случаи завихрения степенно-логарифмического порядка. С использованием разработанной в [3] — [5] теории факторизации u-периодических матриц-функций (являющейся частным случаем факторизации, введенной в [6], [7]) степень общности результатов доводится в данной работе в уточняемом ниже смысле до уровня скалярного случая [5], [8].

Введем необходимые обозначения и определения. Пусть $L_p^{(n)}$ и $L_p^{(n\times n)}$ обозначают соответственно пространства вектор-функций (в-ф) и квадратных матриц-функций (м-ф) порядка n с элементами, суммируемыми в p-й степени на единичной окружности Γ_0 (в скалярном случае индекс $n = 1$ будем опускать); S — оператор сингулярного интегрирования $(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$, $t \in \Gamma_0$, непрерывно действующий в пространстве L_p, $1 < p < \infty$; $P^\pm = (1/2)(I \pm S)$ — сингулярные проекторы. Теми же символами будем обозначать операторы,