O. A. Ladyzhenskaya, Initial-boundary problem for Navier–Stokes equations in domains with time-varying boundaries, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1968, Volume 11, 97–128

О.А.Ладыженская

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ОБЛАСТЯХ С МЕНЯЮЩЕЙСЯ СО ВРЕМЕНЕМ ГРАНИЦЕЙ

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{array}{l} v_t - \nu\Delta v + \sum\limits_{i=1}^{3} v_i v_{x_i} = -\nabla p + f(x,t) \\ \operatorname{div} v = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

в ограниченной области $Q^T = \{(x,t): t \in (0,T),\ x \in \Omega_t\}$ пространства $E_4\ \{(x,t): t \in (-\infty,\infty),\ x = (x_1,x_2,x_3) \in E_3\}$, и будем предполагать границу S_t области Ω_t принадлежащей C^2 при всех $t \in [0,T]$ (причем "нормы" S_t в C^2 равномерно ограничены) и меняющейся со временем с конечной скоростью. К системе (1) присоединим начальное и граничное условия:

$$v\big|_{t=0} = v_0(x),\ x \in \Omega_0, \quad v\big|_{S^T_{бок}} = \psi(s,t). \quad (2)$$

Ввиду уравнения $\operatorname{div} v = 0$ на v_0 и ψ надо наложить ограничения: $\operatorname{div} v_0 = 0$ и $\int_{S_t} \psi(s,t)\cdot n\, ds = 0$, $\forall t \in [0,T]$. Задачу на определение скорости $v =$

$= (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$ и давления $p = p(x,t)$ сведем, введя новые неизвестные функции $u(x,t) = v(x,t) - \Psi(x,t)$, к задаче

$$\left.\begin{aligned} & u_t - \nu \Delta u + (u_i + \Psi_i) u_{x_i} + u_i \Psi_{x_i} = -\nabla p + \mathcal{F} \\ & \operatorname{div} u = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u\big|_{S^T_{бок}} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где $\mathcal{F} = f - \Psi_t + \nu \Delta \Psi + \Psi_i \Psi_{x_i}$, $u_0(x) = v_0(x) - \Psi(x,0)$,

а $\Psi(x,t)$ есть достаточно гладкая вектор-функция, удовлетворяющая условиям:

$$\operatorname{div} \Psi(x,t) = 0 \quad и \quad \Psi(x,t)\Big|_{x=s\in S_t} = \psi(s,t) \ для \ \forall t \in [0,T].$$

Мы докажем для задачи (3) однозначную разрешимость в $W_2^{2,1}(Q^T)$ при любом T, если $\psi \equiv 0$, а $u_0(x)$ и $f(x,t)$ в определенном смысле малы, и для малых T, если ψ, u_0 и f обладают лишь некоторой гладкостью. Приближенные решения будем находить по методу Ротэ, а их сходимость к решению задачи (3) установим с помощью двух априорных оценок.

§ I. Разобьем Q^T плоскостями $t = t_k = k\Delta t \equiv kh$ на слои и обозначим через Ω_k сечение Q^T плоскостью $t = t_k$, а через S_k границу Ω_k [ж)]. Приближенные решения u_h будем определять последовательно на сечениях Ω_k, $k = 1, 2, \ldots [\frac{T}{h}]$,

---

[ж)] Эти же обозначения Ω_k и S_k сохраним и за их ортогональными проекциями в E_4 на гиперплоскость $t = 0$ – пространство E_3 изменения $x = (x_1, x_2, x_3)$.

как решения следующих линейных стационарных задач:

$$\left.\begin{aligned} & u_{\bar{t}}(k)-\nu\Delta u(k)+\left[u_i(k-1)+\Psi_i(k)\right]u_{x_i}(k)+ \\ & \quad +u_i(k)\Psi_{x_i}(k)=-\nabla p(k)+\mathcal{F}_h(k), \\ & \operatorname{div} u(k)=0, \quad u\big|_{S_k}=0, \quad u(0)=u_{0h}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

в которых $u(k)\equiv u(x,t_k)$, $x\in\bar{\Omega}_k$, $u_{\bar{t}}(k)=\frac{1}{h}[u(k)-$ $-u(k-1)]$, $\mathcal{F}_h(k)=\frac{1}{h}\int\limits_{(k-1)h}^{kh}\mathcal{F}(x,\tau)d\tau$, $u_{0h}(x)$ есть солено- идальный вектор из $W_2^1(E_3)$, равный нулю вне $\Omega_0\cap\Omega_1$ (ниже мы потребуем, чтобы $u_{0h}(x)$ сильно сходились в норме $W_2^1(E_3)$ к $u_0(x)$ при $h\to 0$). Более того, $u_{\bar{t}}(x,t_k)$, $x\in\bar{\Omega}_k$, в (4) считается равным $\frac{1}{h}u(x,t_k)$, если точка $(x,t_{k-1})\bar{\in}\bar{\Omega}_{k-1}$. На каждом сечении Ω_k мы имеем, тем самым, линейную стационарную задачу. Она однозначно разрешима в $W_2^2(\Omega_k)$ (точнее, $u(k)\in W_2^2(\Omega_k)$, $\nabla p(k)\in L_2(\Omega_k)$), если только u_0, $\mathcal{F}$ и Ψ обладают некоторой регулярностью. Именно, мы потребуем, чтобы:

$$\left.\begin{aligned} & u_0(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_0),\ \operatorname{div} u_0=0, \\ & \Psi(x,t)\in W_2^{2,1}(Q^T)\ ;\ \text{а}\ f(x,t)\in L_2(Q^T), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

из чего следует, как известно:

$$\left.\begin{aligned} \|\mathcal{F}\|_{2,Q^T} &\equiv \Big(\int\limits_{Q^T} |\mathcal{F}|^2 dx\,dt\Big)^{1/2} \leq c \text{ и} \\ \|\psi_x\|_{2,\Omega_t} &\equiv \Big(\int\limits_{\Omega_t} |\psi_x|^2 dx\Big)^{1/2} \leq c, \end{aligned}\right\} \qquad (5')$$

где $|\psi| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3} \psi_i^2}$, $|\psi_x| = \sqrt{\sum\limits_{i,k=1}^{3} \psi_{ix_k}^2}$.

При выполнении этих условий задача (4) при всех $k = 1,2,\ldots$ $\ldots\left[\frac{T}{h}\right]$ и h , не превосходящих некоторого h_0 , имеет единственное решение $u(k) \in W_2^2(\Omega_k)$, $\nabla p(k) \in L_2(\Omega_k)$, и для него справедлива оценка

$$\|u(k)\|_{W_2^2(\Omega_k)} + \|\nabla p(k)\|_{2,\Omega_k} \leq c(k) \qquad (6)$$

с постоянной $c(k)$, зависящей от $h, \mathcal{F}, \psi, u(k-1)$ и S_k . Доказывается это так же, как в [I] для системы Навье-Стокса, линеаризированной по Стоксу (см. гл. УI, § II и гл. Ш § 5). Наличие линейных членов младшего порядка не вносит никаких трудностей. Из § 5 гл. Ш [I] нам понадобится еще оценка типа (6) (оценка В.А.Солонникова) для стоксовской линеаризации, именно

$$\|v(x)\|_{W_2^2(\Omega_k)} \leq \beta_1 \|\rho^k \Delta v(x)\|_{2,\Omega_k}, \qquad (7)$$

справедливая для любого соленоидального вектора $v(x)$ из $W_2^2(\Omega_k)$, равного нулю на S_k. Множество таких $v(x)$ обозначим через $\overset{\circ}{J}{}^2_{2,0}(\Omega_k)$. Постоянная β_1 в (7) зависит от "нормы" S_k в C^2. Наше предположение о гладкости границ S_t, $t\in[0,T]$, состоит в том, что постоянная β_1 в (7) может быть взята общей для всех S_t, $t\in[0,T]$. Символ P^k означает оператор ортогонального проектирования в пространстве вектор-функций $L_2(\Omega_k)$ на $\overset{\circ}{J}(\Omega_k)=L_2(\Omega_k)\ominus G(\Omega_k)$, где $G(\Omega_k)$ есть совокупность всех вектор-функций вида $\nabla\varphi(x)$, $\varphi(x)\in W_2^1(\Omega_k)$.

Итак, мы на всех Ω_k, $k=1,2,\ldots\left[\frac{T}{h}\right]$ определим функцию $u(k)\in \overset{\circ}{J}{}^2_{2,0}(\Omega_k)$, считая

$$u_0(x)\in \overset{\circ}{J}{}^1_{2,0}(\Omega_0) \tag{8}$$

(т.е. $u_0(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_0)$ и $\operatorname{div} u_0=0$). Продолжим каждое $u(k)$, $k=0,1,\ldots$ нулем вне $\bar{\Omega}_k$ и за этим продолжением сохраним прежнее обозначение $u(k)$. Заметим, что такие $u(k)$ будут принадлежать $\overset{\circ}{J}{}^1_{2,0}(E_3)$, но не $\overset{\circ}{J}{}^2_{2,0}(E_3)$.

§ 2. Получим теперь для $u(k)$ оценки, не зависящие от h. Для этого умножим (4) скалярно на $u(k)$, проинтегрируем по Ω_k и результат после элементарных преобразований представим в виде

$$\int\limits_{\Omega_K} \left[u_t(K)u(K) + \nu u_x^2(K) + u_i(K)\Psi_{x_i}(K)u(K) \right] dx = \tag{9}$$

$$= \int\limits_{\Omega_K} \mathcal{F}_h(K)\, u(K)\, dx .$$

Здесь и ниже нам понадобится следующее равенство

$$\left[u(K) - u(K-1)\right] u(K) = \frac{1}{2}\left[u^2(K) - u^2(K-1)\right] + \frac{1}{2}\left[u(K) - u(K-1)\right]^2 . \tag{I0}$$

Умножим (9) на h и просуммируем по K от I до $m \le \left[\frac{T}{h}\right]$. В силу (I0) и нашего определения $u_t(K)$ будем иметь

$$h\sum_{K=1}^{m} \int\limits_{\Omega_K} u_t(K)u(K)dx \ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_m} u^2(m)dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} u^2(0)dx \tag{II}$$

и

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_m} u^2(m)dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} u^2(0)dx + h\sum_{K=1}^{m} \nu \int\limits_{\Omega_K} u_x^2(K)dx \le \tag{I2}$$

$$\le h\sum_{K=1}^{m} \int\limits_{\Omega_K} \left[-u_i(K)\Psi_{x_i}(K)u(K) + \mathcal{F}_h(K)u(K)\right] dx .$$

Оценим правую часть, используя неравенство Коши и Юнга, и неравенство (3) § I гл. I [I] так:

$$\Big| \int_{\Omega_k} u_i(k)\,\psi_{x_i}(k)\,u(k)\,dx \Big| \le \|\psi_x\|_{2,\Omega_k} \|u\|^2_{4,\Omega_k} \le$$

$$\le 2\,\|\psi_x\|_{2,\Omega_k} \|u\|^{1/2}_{2,\Omega_k} \|u_x\|^{3/2}_{2,\Omega_k} \le \qquad (I3)$$

$$\le c\Big(\frac{3}{2}\,\varepsilon^{4/3}\,\|u_x\|^2_{2,\Omega_k} + \frac{1}{2\varepsilon^4}\,\|u\|^2_{2,\Omega_k}\Big)^{*)}$$

и

$$\Big| \int_{\Omega_k} \mathcal{F}_h(k)\,u(k)\,dx \Big| \le \frac{1}{2}\,\|\rho^k \mathcal{F}_h\|^2_{2,\Omega_k} + \frac{1}{2}\,\|u\|^2_{2,\Omega_k}.$$

Возьмем в (I3) ε таким, что $\frac{3}{2}\,c\,\varepsilon^{4/3} = \frac{\nu}{2}$.

Из (I2) в силу последних двух неравенств следует

$$\int_{\Omega_m} u^2 dx - \int_{\Omega_0} u^2 dx + h\sum_{k=1}^{m} \nu \int_{\Omega_k} u_x^2\,dx \le$$
$$\le h\sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega_k} [c_1 u^2 + (\rho^k \mathcal{F}_h)^2]\,dx, \qquad (I4)$$

---

*) $\|u\|_{q,\Omega} = \Big(\int_{\Omega} |u|^q\,dx\Big)^{1/q}$.

где $C_1 = 1 + \frac{3^3 c^4}{\nu^3}$. Из (I4) известным способом выводится оценка

$$\int\limits_{\Omega_m} u^2 dx + h \sum_{k=1}^{m} \nu \int\limits_{\Omega_k} u_x^2 dx \leq \tag{I5}$$

$$\leq C_2 \Big[\int\limits_{\Omega_0} u^2 dx + h \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Omega_k} (\rho^k \mathcal{F}_h)^2 dx \Big]$$

для $m = 1, 2, \dots \left[\frac{T}{h}\right]$, $h \leq \frac{1}{2C_1}$ причем постоянная C_2 зависит лишь от T и C_1.

Перейдем к выводу второй оценки. Для этого умножим (4) скалярно на $-\rho^k \Delta u(k)$ и проинтегрируем по Ω_k:

$$-\int\limits_{\Omega_k} u_{\bar t}(k) \rho^k \Delta u(k) dx + \nu \int\limits_{\Omega_k} (\rho^k \Delta u(k))^2 dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_k} \Big\{ [u_i(k-1) + \Psi_i(k)] u_{x_i}(k) + \tag{I6}$$

$$+ u_i(k) \Psi_{x_i}(k) \Big\} \rho^k \Delta u(k) dx - \int\limits_{\Omega_k} \mathcal{F}_h(k) \rho^k \Delta u(k) dx.$$

Оценим сначала члены, стоящие в правой части (I6). При этом используем кроме (7) неравенства Гёльдера и предположений (5) известные неравенства:

$$\| u \|_{6,\Omega} \leq \beta_2 \; \| u_x \|_{2,\Omega} \qquad \text{для } \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega), \tag{I7}$$

$$\|u\|_{6,\Omega} \leq \beta_3 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \quad \text{для } \forall u \in W_2^1(\Omega), \tag{18}$$

$$\|u\|_{q,\Omega} \leq \varepsilon \|u_x\|_{2,\Omega} + c_{\varepsilon,q} \|u\|_{2,\Omega}, \tag{19}$$

для $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ с любым $\varepsilon > 0$ и $q < 6$ и

$$\max_{\Omega} |u| \leq \varepsilon \|u_{xx}\|_{2,\Omega} + C_\varepsilon \|u_x\|_{2,\Omega} \tag{20}$$

для $\forall u \in W_2^2(\Omega)$ и $u\big|_S = 0$ с любым $\varepsilon > 0$ *). Именно:

$$\Big|\int_{\Omega_K} \mathcal{F}_h(K)\rho^K \Delta u(K)dx\Big| \leq \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_K} \|\rho\mathcal{F}_h\|_{2,\Omega_K} \leq \frac{\nu}{8}\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_K} + \frac{2}{\nu}\|\rho\mathcal{F}_h\|^2_{2,\Omega_K};$$

$$\Big|\int_{\Omega_K} \psi_i(K) u_{x_i}(K)\rho^K\Delta(K)dx\Big| \leq \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_K} \|\,|\psi|\cdot|u_x|\,\|_{2,\Omega_K} \leq$$

$$\leq \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_K} \|\psi\|_{6,\Omega_K} \|u_x\|_{3,\Omega_K} \leq$$

$$\leq \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_K} \|\psi\|_{6,\Omega_K} (\varepsilon \|u_{xx}\|_{2,\Omega_K} + c_{\varepsilon,3}\|u_x\|_{2,\Omega_K}) \leq$$

$$\leq \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_K} \|\psi\|_{6,\Omega_K} (\varepsilon\beta_1 \|\rho\Delta u\|_{2,\Omega_K} + c_{\varepsilon,3}\|u_x\|_{2,\Omega_K}) \leq$$

---

*) Постоянные в (17)-(20) зависят от S. При наших предположениях о S_t, $t \in [0,T]$, они могут быть взяты общими для всех S_t, $t \in [0,T]$.

$$\leq \|\Psi\|_{6,\Omega_\kappa}\left(\frac{3}{2}\varepsilon\beta_1\|p\Delta u\|^2_{2,\Omega_\kappa}+\frac{C^2_{\varepsilon,3}}{2\varepsilon\beta_1}\|u_x\|^2_{2,\Omega_\kappa}\right);$$

$$\left|\int\limits_{\Omega_\kappa} u_i(\kappa)\Psi_{x_i}(\kappa)p^\kappa\Delta u(\kappa)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \|p\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa}\,\| |u|\cdot|\Psi_x| \|_{2,\Omega_\kappa} \leq$$

$$\leq \|p\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa}\cdot\max_{\Omega_\kappa}|u(\kappa)|\cdot\|\Psi_x\|_{2,\Omega_\kappa} \leq$$

$$\leq \|p\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa}\|\Psi_x\|_{2,\Omega_\kappa}\left(\varepsilon\|u_{xx}\|_{2,\Omega_\kappa}+C_\varepsilon\|u_x\|_{2,\Omega_\kappa}\right) \leq$$

$$\leq \|\Psi_x\|_{2,\Omega_\kappa}\left(\frac{3}{2}\varepsilon\beta_1\|p\Delta u\|^2_{2,\Omega_\kappa}+\frac{C^2_\varepsilon}{2\varepsilon\beta_1}\|u_x\|^2_{2,\Omega_\kappa}\right).$$

Оставшийся член правой части (I6) оценим так же, как это было сделано для задачи с неподвижной границей при получении оценки, аналогичной выводимой здесь (см. гл. УI второго английского издания книги [I]):

$$\left|\int\limits_{\Omega_\kappa} u_i(\kappa-1)u_{x_i}(\kappa)p^\kappa\Delta u(\kappa)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \|p\Delta u\|_{2,\Omega_\kappa}\,\| |u(\kappa-1)|\cdot|u_x(\kappa)| \|_{2,\Omega_\kappa} \leq$$

$$\leq \|p\Delta u\|_{2,\Omega_k} \|u(k-1)\|_{6,\Omega_k} \Big(\int_{\Omega_k} |u_x|^{3/2} \cdot |u_x|^{3/2} dx\Big)^{1/3} \leq$$

$$\leq \|p\Delta u\|_{2,\Omega_k} \|u(k-1)\|_{6,\Omega_k} \|u_x\|^{1/2}_{2,\Omega_k} \|u_x\|^{1/2}_{6,\Omega_k} \leq$$

$$\leq \|p\Delta u\|_{2,\Omega_k} \|u\|_{6,\Omega_{k-1}} \|u_x\|^{1/2}_{2,\Omega_k} \beta_3^{1/2} \|u_x\|^{1/2}_{W_2^1(\Omega_k)} \leq \tag{21}$$

$$\leq \sqrt{\beta_1\beta_3}\, \|p\Delta u\|^{3/2}_{2,\Omega_k} \|u\|_{6,\Omega_{k-1}} \|u_x\|^{1/2}_{2,\Omega_k} \leq$$

$$\leq \beta_2\sqrt{\beta_1\beta_3}\, \|p\Delta u\|^{3/2}_{2,\Omega_k} \|u_x\|_{2,\Omega_{k-1}} \|u_x\|^{1/2}_{2,\Omega_k} \leq$$

$$\leq \beta_2\sqrt{\beta_1\beta_3}\, \Big[\frac{3}{4}\varepsilon^{4/3} \|p\Delta u\|^2_{2,\Omega_k} + \frac{1}{4\varepsilon^4} \|u_x\|^4_{2,\Omega_{k-1}} \|u_x\|^2_{2,\Omega_k}\Big].$$

Используем все только что полученные неравенства для оценки правой части (16):

$$
-\int_{\Omega_k} u_{\bar t}(k) p^k \Delta u(k)\, dx + \nu \|p\Delta u\|^2_{2,\Omega_k} \le
$$

$$
\le \|p\Delta u\|^2_{2,\Omega_k} \left(\frac{\nu}{8} + \frac{3\varepsilon\beta_1}{2} \|\psi\|_{6,\Omega_k} + \frac{3\varepsilon\beta_1}{2} \|\psi_x\|_{2,\Omega_k} + \right.
$$

$$
\left. + \beta_2\sqrt{\beta_1\beta_3}\ \frac{3}{4} \varepsilon^{4/3} \right) + \frac{\beta_2\sqrt{\beta_1\beta_3}}{4\varepsilon^4} \|u_x\|^4_{2,\Omega_{k-1}} \|u_x\|^2_{2,\Omega_k} + \tag{22}
$$

$$
+ \|u_x\|^2_{2,\Omega_k} \left(\frac{C^2_{\varepsilon,3}}{2\varepsilon\beta_1} \|\psi\|_{6,\Omega_k} + \frac{C^2_\varepsilon}{2\varepsilon\beta_1} \|\psi_x\|_{2,\Omega_k} \right) +
$$

$$
+ \frac{2}{\nu} \|p\mathcal{F}_h\|^2_{2,\Omega_k} .
$$

Займемся теперь изучением первого члена левой части (22). Для этого заметим, что если вектор $v \in L_2(\Omega)$ и $v = Pv \oplus \nabla \varphi$ - его ортогональное разложение, то, умножая это равенство скалярно на $\nabla \phi$, и интегрируя, получим

$$
\int_\Omega v \nabla \phi\, dx = \int_\Omega \varphi_x \phi_x\, dx \tag{23}
$$

при любой скалярной функции ϕ из $W_2^1(\Omega)$.

Обозначим через $\hat{W}_2^1(\Omega)$ гильбертово пространство, состоящее из скалярных функций $\phi(x) \in W_2^1(\Omega)$, подчиняющихся условию $\int\limits_{\Omega} \Phi\, dx = 0$. Скалярное произведение в нем введем так:

$$[\varphi, \Phi] = \int\limits_{\Omega} \varphi_x \Phi_x \, dx.$$

Тождество (23) однозначно определяет φ из $\hat{W}_2^1(\Omega)$ по v из $L_2(\Omega)$. Действительно, (23) можно записать в виде

$$[\varphi, \Phi] = \int\limits_{\Omega} v \, \nabla \Phi \, dx. \qquad (\widetilde{23})$$

Правая часть его, как легко видеть, определяет линейный функционал над Φ в $\hat{W}_2^1(\Omega)$. В силу теоремы Рисса его можно представить в виде скалярного произведения $[A(v), \Phi]$ причем $A(v)$ определяется по v однозначно. Этот элемент $A(v)$ из $\hat{W}_2^1(\Omega)$ и есть, очевидно, искомое решение φ из $\hat{W}_2^1(\Omega)$.

Первый член в (22) представим так:

$$-\int\limits_{\Omega_k} u_{\bar{t}}(k) \rho^k \Delta u(k)\, dx = -\int\limits_{\Omega_k} \rho^k u_{\bar{t}}(k) \Delta u(k)\, dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_k} u_{\bar{t}}(k) \Delta u(k)\, dx - \int\limits_{\Omega_k} \frac{u(k-1) - \rho^k u(k-1)}{\Delta t} \Delta u(k)\, dx = \qquad (24)$$

$$= \int\limits_{\Omega_k} u_{x\bar{t}}(k) u_x(k)\, dx - \int\limits_{S_k} u_{\bar{t}}(k) \frac{\partial u(k)}{\partial n}\, dS -$$

$$- \int\limits_{\Omega_k} \frac{u(k-1) - \rho^k u(k-1)}{\Delta t} \Delta u(k)\, dx,$$

учитывая: $\rho^{\kappa} u(\kappa) = u(\kappa)$. Но

$$j_1 \equiv \left| \int_{S_\kappa} u_t(\kappa) \frac{\partial u(\kappa)}{\partial n} ds \right| = \left| \int_{S_\kappa} \frac{u(\kappa-1)}{\Delta t} \frac{\partial u(\kappa)}{\partial n} ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Delta t} \| u(\kappa-1) \|_{2,S_\kappa} \cdot \| u_x(\kappa) \|_{2,S_\kappa}. \tag{25}$$

Ниже будет доказано, что

$$\| u(\kappa-1) \|_{2,S_\kappa} \leq c_1 \Delta t \left(\varepsilon \| u_{xx}(\kappa-1) \|_{2,\Omega_{\kappa-1}} + \frac{1}{\varepsilon} \| u_x(\kappa-1) \|_{2,\Omega_{\kappa-1}} \right) \tag{26}$$

с любым $\varepsilon \in (0,1]$. Кроме того известно, что для любой функции u из $W_2^2(\Omega)$

$$\| u_x \|_{2,S} \leq c \left(\varepsilon \| u_{xx} \|_{2,\Omega} + \frac{1}{\varepsilon} \| u_x \|_{2,\Omega} \right) \tag{27}$$

с любым $\varepsilon \in (0,I]$. (см. ниже неравенство (51$'$)). В силу (26) и (27) из (25) получим

$$j_1 \leq c c_1 \left(\varepsilon \| u_{xx} \|_{2,\Omega_{\kappa-1}} + \frac{1}{\varepsilon} \| u_x \|_{2,\Omega_{\kappa-1}} \right) \times$$

$$\times \left(\varepsilon \| u_{xx} \|_{2,\Omega_\kappa} + \frac{1}{\varepsilon} \| u_x \|_{2,\Omega_\kappa} \right). \tag{28}$$

Элемент же $u(\kappa-1) - \rho^{\kappa} u(\kappa-1)$ имеет вид $\nabla \varphi$, и для него в силу ($\widetilde{23}$) имеем:

$$\int_{\Omega_\kappa} \varphi_x \Phi_x \, dx = \int_{\Omega_\kappa} u(\kappa-1) \nabla \Phi \, dx \text{ при } \forall \Phi \in \hat{W}_2^1(\Omega_\kappa). \quad (29)$$

Преобразуем правую часть (29), помня, что $u(\kappa-1) \in \mathring{J}^1_{2,0}(E_3)$,

$$\int_{\Omega_\kappa} \varphi_x \Phi_x \, dx = -\int_{\Omega_\kappa} \Phi \operatorname{div} u(\kappa-1) \, dx +$$

$$+ \int_{S_\kappa} u(\kappa-1) \cdot n \, \Phi \, ds = \int_{S_\kappa} u_n(\kappa-1) \Phi \, ds.$$

Отсюда следует

$$\left| \int_{\Omega_\kappa} \varphi_x \Phi_x \, dx \right| \leq$$

$$\leq \| u_n(\kappa-1) \|_{2,S_\kappa} \| \Phi \|_{2,S_\kappa} \leq C_2 \| u(\kappa-1) \|_{2,S_\kappa} \| \Phi_x \|_{2,\Omega_\kappa},$$

и, ввиду произвола Φ ,

$$\| \varphi_x \|_{2,\Omega_\kappa} = \| u(\kappa-1) - \rho^\kappa u(\kappa-1) \|_{2,\Omega_\kappa} \leq C_2 \| u(\kappa-1) \|_{2,S_\kappa}. \quad (30)$$

Благодаря (30) и (26)

$$\left| \int_{\Omega_\kappa} \frac{u(\kappa-1) - \rho^\kappa u(\kappa-1)}{\Delta t} \Delta u(\kappa) \, dx \right| \leq$$

$$\leq C_1 C_2 \| \Delta u \|_{2,\Omega_\kappa} \left(\varepsilon \| u_{xx} \|_{2,\Omega_{\kappa-1}} + \frac{1}{\varepsilon} \| u_x \|_{2,\Omega_{\kappa-1}} \right) \quad (31)$$

и потому из (24) в силу (28), (31) и (7) получим

$$-\int_{\Omega_k} u_{\bar t}(k)\,\rho^k \Delta u(k)\,dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_k} u_{x\bar t}(k)\,u_x(k)\,dx - c_3\,(\varepsilon\,\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_k} + \tag{32}$$

$$+\varepsilon\,\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_{k-1}} + \frac{1}{\varepsilon}\,\|u_x\|^2_{2,\Omega_k} + \frac{1}{\varepsilon}\,\|u_x\|^2_{2,\Omega_{k-1}}).$$

Заменим первый член в (22) меньшей величиной из (32), затем полученные неравенства просуммируем по k от $k=2$ до $k=m$, приведем подобные члены, умножим на h, учтем условия (5), (8) и оценку (15) и выберем все ε столь малыми, чтобы коэффициенты при $\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_k}$ и $\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_{k-1}}$ были бы не больше $\frac{\nu}{4}$. В результате этого придем к неравенству

$$h\sum_{k=2}^{m}\Big(\int_{\Omega_k} u_{x\bar t}(k)\,u_x(k)\,dx + \frac{\nu}{2}\,\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_k}\Big) \leq$$

$$\leq c + ch\sum_{k=2}^{m}\|u_x\|^4_{2,\Omega_{k-1}}\,\|u_x\|^2_{2,\Omega_k} + \frac{\nu}{4}\,h\,\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_1}. \tag{33}$$

Прибавим к нему неравенство (22) с $K=1$, умноженное на h, причем учтем, что ввиду $u(0)\big|_{S_1} = u_{0h}\big|_{S_1} = 0$ при $K=1$ вместо (24) справедливо равенство

$$-\int_{\Omega_1} u_{\bar t}(1)\,\rho^4 \Delta u(1)\,dx = \int_{\Omega_1} u_{x\bar t}(1)\,u_x(1)\,dx. \qquad (34)$$

Это дает

$$h\sum_{K=1}^{m}\left(\int_{\Omega_K} u_{x\bar t}(K)\,u_x(K)\,dx + \frac{\nu}{2}\,\|\rho\Delta u\|^2_{2,\Omega_K}\right) \le$$

$$\le C_1 + C_2 h \sum_{K=1}^{m} \|u_x\|^4_{2,\Omega_{K-1}}\,\|u_x\|^2_{2,\Omega_K}. \qquad (35)$$

Для первого члена левой части (35) в силу (10) и того, что $u(x,t_K)=0$ для $x \bar\in \Omega_K$, верно неравенство (II) с функцией u_x вместо u именно:

$$h\sum_{K=1}^{m}\int_{\Omega_K} u_{x\bar t}(K)\,u_x(K)\,dx \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\int_{\Omega_m} u_x^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} (u_{0hx})^2\,dx. \qquad (36)$$

Поэтому из (35) следует

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_m} + \nu h \sum_{k=1}^{m} \|p\Delta u\|^2_{2,\Omega_k} \le$$

$$\le C_3 + C_4 h \sum_{k=1}^{m} \|u_x\|^4_{2,\Omega_{k-1}} \|u_x\|^2_{2,\Omega_k}, \qquad (37)$$

при $m = 1,2,\dots,\left[\frac{T}{h}\right]$, $(C_4 = 2C_2)$.

Из этих неравенств можно заключить, что на некотором интервале $[0, T_1]$ величина, стоящая в левой части (37), не превосходит некоторой постоянной C для $m \le m_0 = \left[\frac{T}{h}\right]$, причем T и C определяются C_3, C_4 и $\|u_x\|_{2,\Omega_0}$. Действительно, отбрасывая сначала второй член левой части (37) и обозначая правую часть (37) через $\chi(m)$, получим

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_m} \le \chi(m), \; m = 1,2,\dots m_0, \qquad (38)$$

и

$$\frac{1}{h}\left[\chi(m) - \chi(m-1)\right] =$$

$$= C_4 \|u_x\|^4_{2,\Omega_{m-1}} \|u_x\|^2_{2,\Omega_m} \le C_4 \chi^2(m-1)\chi(m), \qquad (39)$$

$m = 2,\dots m_0$.

Подсчитаем, для каких m выполняется неравенство $\chi(m) \le$ $\le M\chi(1)$, где M – число, которое будет выбрано ниже $(M>1)$. Пусть $z(k)\le M z(1)$ для $k\le m$. Тогда из (39) получим

$$z(k)\le \frac{z(k-1)}{1-c_4 h z^2(k-1)} \le \frac{z(k-1)}{1-c_4 h M^2 z^2(1)} \le \tag{40}$$
$$\le [1+2c_4 h M^2 z^2(1)]\, z(k-1),$$

считая h, удовлетворяющим условию

$$c_4 h M^2 z^2(1)\le \frac{1}{2}. \tag{41}$$

Далее, из (40) следует

$$z(k)\le (1+2c_4 h M^2 z^2(1))^{k-1} z(1)\le \tag{42}$$
$$\le \exp\{2c_4 M^2 z^2(1)(k-1)h\}\, z(1).$$

Это неравенство верно, пока $z(k)\le M z(1)$, т.е. для k, удовлетворяющих условию

$$\exp\{2c_4 M^2 z^2(1)(k-1)h\}\le M. \tag{43}$$

Легко подсчитать, что при $M=\sqrt{e}$ величина $(k-1)h$, удовлетворяются (43) со знаком равенства, имеет наибольшее возможное значение. Поэтому возьмем $M=\sqrt{e}$ и обозначим, через T^h число $(4c_4 e z^2(1))^{-1}$. При $k\le 1+\left[\frac{T^h}{h}\right]$ будет выполняться (43) с $M=\sqrt{e}$, а следовательно и оценка $z(k)\le\sqrt{e}\, z(1)$. Возвращаясь к (37), находим, что

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_m} + \nu h \sum_{k=1}^{m} \|p\Delta u\|^2_{2,\Omega_k} \leq \sqrt{e}\, z(1) \tag{44}$$

для $m \leq 1 + \left[\frac{T^h}{h}\right] \equiv m^h$. Величина же $z(1)$ оценивается через известные нам величины из (37) при $m=1$, именно

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_1} \leq z(1) = c_3 + c_4 h \|u_x\|^4_{2,\Omega_0} \|u_x\|^2_{2,\Omega_1},$$

и потому

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_1} \leq 2c_3$$

и

$$z(1) \leq 2c_3 \tag{45}$$

при h, удовлетворяющих условию

$$h \leq \frac{1}{2c_4 \|u_x\|^4_{2,\Omega_0}}. \tag{46}$$

Условие (4I), наложенное на h выше, будет выполняться, если мы потребуем от h, кроме (46), удовлетворения неравенству

$$h \leq (8 C_4 C_3^2 e)^{-1} . \qquad (47)$$

Напомним, наконец, что при доказательстве неравенства (I5) (а оно использовано при данном выводе), мы предполагали $h \leq (2C_1)^{-1}$, $C_1 = 1 + (\frac{3}{\nu})^3 C^4$, где " C " взято из (5).

Неравенства (44) и (45) с учетом неравенства (7) дают оценку

$$\| u_x \|^2_{2,\Omega_m} + h \sum_{k=1}^{m} \| u \|^2_{W_2^2(\Omega_k)} \leq C_5 \qquad (48)$$

при $m = 1, 2, \ldots, m_1 = \left[\frac{T_1}{h} \right]$, где $T_1 = (16\, C_3^2\, C_4\, e)^{-1}$.

Из (48) и системы (4) получим оценку для $u_{\bar{t}}$. В силу (4)

$$u_{\bar{t}}(k) = \rho^k u_{\bar{t}}(k) + \frac{\rho^k u(k-1) - u(k-1)}{\Delta t} = \nu \rho^k \Delta u(k) -$$

$$-\rho^k \left[(u_i(k-1) + \Psi_i(k))\, u_{x_i}(k) + u_i(k)\, \Psi_{x_i}(k) - \right.$$

$$\left. - \mathcal{F}_h \right] + \frac{\rho^k u(k-1) - u(k-1)}{\Delta t} .$$

Из этого соотношения, оценок (26) и (30), равенства(34), оценок членов, стоящих в правой части (I6), данных после формулы (20) и уже установленной оценки (48), получим

$$h\sum_{k=1}^{m}\|u_{\bar t}(k)\|^2_{2,\Omega_k}\le c_6\,,\quad m=1,2,\dots m_1.$$

Это неравенство вместе с (48) дает вторую основную для нас оценку

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_m}+h\sum_{k=1}^{m}\left(\|u_{\bar t}\|^2_{2,\Omega_k}+\|u\|^2_{W_2^2(\Omega_k)}\right)\le c_7\,, \qquad (49)$$

при $m=1,2,\dots m_1=\left[\frac{T_1}{h}\right]$, где $T_1=(16c_3^{-2}c_4e)^{-1}$. Постоянная c_7 общая для всех достаточно малых $h<\hat{h}$, удовлетворяющих требованиям (46) и (47)).

Для завершения доказательства оценки (49) нам осталось проверить справедливость неравенства (26). Мы докажем (26) для любой скалярной функции $u(x)$, используя лишь то, что она принадлежит $W_2^2(\Omega_{k-1})\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_{k-1})$ и равна нулю вне Ω_{k-1}. Относительно изменения границы S_t предположим, что оно происходит со скоростью, не превышающей некоторого числа β_0, точнее считаем, что для всех $\Delta t\le h_0$ и всех $t\in[0,T]$: 1) множество точек $\bar\Omega_t+\Pi_{t,\Delta t}$ содержит $\bar\Omega_{t-\Delta t}$, где $\Pi_{t,\Delta t}$ есть приграничная к S_t полоса $[S_t, S_t+\beta_0\Delta t\, n_t]$ ширины $\beta_0\Delta t$ (т.е. совокупность точек x, расположенных на внешних к S_t нормалях n_t и отстоящих от S_t вдоль этих нормалей на расстояние, не большее $\beta_0\Delta t$) и 2) приграничная к $S_{t-\Delta t}$ полоса

$\tilde{\Pi}_{t-\Delta t,\Delta t} = [S_{t-\Delta t} - \beta_0 \Delta t\, n_{t-\Delta t}, S_{t-\Delta t}]$ содержит $\bar{\Omega}_{t-\Delta t} \cap \Pi_{t,\Delta t}$ ($\tilde{\Pi}_{t-\Delta t,\Delta t}$ состоит из точек x, расположенных на внутренних к $S_{t-\Delta t}$ нормалях и отстоящих от $S_{t-\Delta t}$ на расстояние, не большее $\beta_0 \Delta t$). Из условий I) и 2) видно, что S_t при возрастании t может " раздуваться" с любой скоростью, а "сужаться" с конечной.

Итак, нам надо оценить $\int\limits_{S_t} u^2(x)\,ds$, зная, что $u \in W_2^2(\Omega_{t-\Delta t}) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_{t-\Delta t})$ и $u(x) \equiv 0$ для $x \bar{\in} \Omega_{t-\Delta t}$. В силу условия I) функция $u(x)$ равна нулю на внешней границе $\Pi_{t,\Delta t}$, поэтому, как хорошо известно,

$$\int\limits_{S_t} u^2 ds \le c\beta_0 \Delta t \int\limits_{\Pi_{t,\Delta t}} u_x^2\, dx = c\beta_0 \Delta t \int\limits_{\Pi_{t,\Delta t} \cap \Omega_{t-\Delta t}} u_x^2\, dx.$$

Учитывая условие 2), отсюда заключаем, что

$$\int\limits_{S_t} u^2 ds \le c\beta_0 \Delta t \int\limits_{\tilde{\Pi}_{t-\Delta t,\Delta t}} u_x^2\, dx \le c_1 \beta_0 \Delta t \int\limits_0^{\beta_0 \Delta t} \int\limits_{S^\tau} u_x^2\, ds\, d\tau, \qquad (50)$$

где через S^τ обозначено семейство поверхностей $S_{t-\Delta t} - \tau n_{t-\Delta t}$ (т.е. S^τ есть совокупность концов внутренних нормалей к $S_{t-\Delta t}$ длины τ). Величину Δt считаем при этом столь малой, что S^τ, $0 \le \tau \le \beta_0 \Delta t$, составляют регулярное семейство координатных поверхностей. Далее известно, что в области Ω, ограниченной гладкой поверхностью S, для любой $v(x) \in W_1^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_S |v(x)|\,ds \leq c \int_\Omega (|v| + |v_x|)\,dx \tag{51}$$

с постоянной c, определяемой лишь "нормой" S в C^1.

Применяя его к $v = u_x^2$, получим

$$\int_{S^\tau} u_x^2\,dx \leq c \int_{\Omega^\tau} \{u_x^2 + [\sum_{i=1}^3 (2u_{x_k} u_{x_k x_i})^2]^{1/2}\}\,dx \leq$$

$$\leq c \int_{\Omega^\tau} [u_x^2 + 2\sum_{i,k=1}^3 |u_{x_k} u_{x_k x_i}|]\,dx \leq \tag{51'}$$

$$\leq c \int_{\Omega_{t-\Delta t}} [\varepsilon u_{xx}^2 + (1 + \frac{3}{\varepsilon}) u_x^2]\,dx$$

с любым $\varepsilon > 0$. Подставляя эту оценку в (50), придем после элементарных оценок к желаемому неравенству

$$\int_{S_t} u^2 ds \leq c_2 (\beta_0 \Delta t)^2 \int_{\Omega_{t-\Delta t}} (\varepsilon u_{xx}^2 + \frac{1}{\varepsilon} u_x^2)\,dx, \quad \varepsilon \in (0,1].$$

Тем самым вывод оценки (49) закончен.

§ 3. Устремим теперь h к нулю. Функции $u_{oh}(x)$ будут при этом сходиться к $u_o(x)$ в $W_2^1(E_3)$, а $\mathcal{F}_h(x,t)$ к

$\mathcal{F}(x,t)$ в $L_2(Q^T)$. Обозначим через u_h вектор-функцию, определенную нами выше на сечениях Ω_k, $k=0,1,\dots[\frac{T}{h}]\equiv m_0$, как решение задач (4) с $\Delta t=h$, причем $u_h(x,t_k)$ считается продолженной нулем вне Ω_k. Заключим Q^T в цилиндр $Q_T=\Omega\times(0,T)$ и построим по u_h в $Q_{m_0h}=\Omega\times(0,m_0h)$ непрерывные функции $u'_h(x,t)$, совпадающие с u_h на сечениях $t=kt$, $k=0,1,\dots m_0$, и линейные по t для $t\in((k-1)h,kh)$. Как легко видеть, такие функции принадлежат $J^{1,0}_{2,0}(Q_{m_0h})$, т.е. соленоидальны, обращаются в нуль на боковой поверхности Q_{m_0h} и имеют конечную норму

$$\|u'_h\|_{J^{1,0}_{2,0}(Q_{m_0h})}\equiv\left\{\int\limits_{Q_{m_0h}}[(u'_h)^2+(u'_{hx})^2]\,dx\,dt\right\}^{1/2},$$

причем в силу (I5) величины $\|u'_h\|_{J^{1,0}_{2,0}(Q_{m_0h})}$ равномерно ограничены. Поэтому из $\{u'_h\}$ можно выделить подпоследовательность, которая слабо сходится в $J^{1,0}_{2,0}(Q_{T-\varepsilon})$ (ε - произвольно-малое) к некоторому элементу $u(x,t)$ из $J^{1,0}_{2,0}(Q_T)$. Т.к. в любой точке $(x,t)\in\bar{Q}_T\setminus\bar{Q}^T$ все функции u'_h, начиная с достаточно малого h, равны нулю, то и u в них равно нулю, и потому $u(x,t)\in J^{1,0}_{2,0}(Q_T)$.

Далее, $u_h(k)\in W^2_{2,0}(\Omega_k)$, поэтому для любой области Q', отстоящей от боковой поверхности и верхнего основания Q^{T_1} на положительное расстояние, все функции u'_h, начиная с некоторого h, принадлежат

$W_2^{2,1}(Q')$ и их нормы

$$\|u_h'\|_{W_2^{2,1}(Q')} \equiv \left\{ \iint_{Q'} \left[|u_h'|^2 + \left|\frac{\partial u_h'}{\partial t}\right|^2 + |u_{hxx}'|^2 \right] dx\,dt \right\}^{1/2}$$

ограничены постоянной c, не зависящей ни от h, ни от δ. Ввиду этого и для предельной функции $\|u\|_{W_2^{2,1}(Q')} \leq c$, а в силу произвольности δ и $\|u\|_{W_2^{2,1}(Q^{T_1})} \leq c$.

Осталось показать, что функция u удовлетворяет системе (3). Делается это так же, как в [2] при доказательстве сходимости решений разностных уравнений к решению начально-краевой задачи для гиперболических уравнений (см. § 6 гл. I и §§ I-2 гл. Ш).

Именно, наряду с интерполяцией u_h' введем интерполяцию $\tilde{u}_h$ для u_h. Функция $\tilde{u}_h(x,t)$ на слоях $t = kh$ равна $u_h(k) = u_h(x,t_k)$, а для $t \in ((k-1)h, kh]$ равна $u_h(k)$.

Ясно, что $(\widetilde{u_{h\bar{t}}})(x,t) = \dfrac{\partial u_h'(x,t)}{\partial t}$ для $t \in ((k-1)h, kh)$ и

$(\widetilde{u_{hxx}}) = (\tilde{u}_h)_{xx}$.

Возьмем гладкую соленоидальную вектор-функцию $\Phi(x,t)$, равную нулю вблизи боковой поверхности и верхнего основания области Q^{T_1}. Умножим на $h\,\Phi(x,t)$ скалярно первое из уравнений (4), проинтегрируем полученное равенство по Ω_k, сложим по всем k от 1 до m_1, и результат запишем так:

$$0 = h\sum_{k=1}^{m_1} \int_{\Omega_k} [u_{h\bar{t}}(k) - \nu\Delta u_h(k) + (u_{hi}(k-1) +$$

$$+ \psi_i(k))\, u_{hx_i}(k) + u_{hi}(k)\,\psi_{x_i}(k) + \nabla p_h(k) -$$

$$-\mathcal{F}_h(k)]\,\varphi(k)\,dx = \int_{Q^{T_1}} [\frac{\partial u'_h(x,t)}{\partial t} - \nu\Delta\tilde{u}_h(x,t) + \tag{52}$$

$$+ (\tilde{u}_{hi}(x,t-h) + \tilde{\psi}_{hi}(x,t))\,\tilde{u}_{hx_i}(x,t) + \tilde{u}_{hi}(x,t)\,\tilde{\psi}_{hx_i}(x,t) -$$

$$-\tilde{\mathcal{F}}_h(x,t)]\,\tilde{\varphi}_h(x,t)\,dx\,dt,$$

считая h достаточно малым. Как показано в § 6 гл. I [2] , ввиду оценок (I5) и (49) восполнения u'_h и $\tilde{u}_h$ имеют один и тот же предел u (слабый в $L_2(Q^{T_1})$), а функции $\frac{\partial u'_h}{\partial t}$, $\tilde{u}_{hx}$ и $\tilde{u}_{hxx}$ имеют своими пределами (слабыми в $L_2(Q')$) производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, u_x и u_{xx} , соответственно. Кроме этого, $\tilde{u}_h(x,t)$ и $\tilde{u}_h(x,t-h)$ сходятся к $u(x,t)$ сильно в $L_2(Q')$ для любой области Q' описанного выше вида. Функции $\tilde{\psi}_h$ и $\tilde{\mathcal{F}}_h$ сходятся к ψ и $\mathcal{F}$ сильно в $L_2(Q')$, функции $\tilde{\psi}_{hx}$ сходятся к ψ_x сильно в $L_2(Q')$, а $\tilde{\varphi}_h$ сходятся к φ равномерно в $\bar{Q}^{T_1}$. Благодаря этому, предельным для (52) соотношением будет

$$\int_{Q^{T_1}} [\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u_i + \psi_i)\,u_{x_i} + u_i\,\psi_{x_i} - \mathcal{F}]\,\varphi\,dx\,dt = 0,$$

откуда ввиду достаточного произвола φ и принадлежности u

и $W_2^{2,1}(Q^{T_1})$ следует, что u удовлетворяет уравнениям (3).

Итак, доказана теорема:

<u>Теорема I</u>. Задача (3) однозначно разрешима в $W_2^{2,1}(Q^{T_1})$, где T_1 – положительное число, определяемое $\|u_0(x)\|_{W_2^1(\Omega_0)}$, $\|p\mathcal{F}\|_{L_2(Q^T)}$ и $\|\psi\|_{W_2^{2,1}(Q^T)}$. Этими же величинами определяется и норма $\|u\|_{W_2^{2,1}(Q^{T_1})}$ решения u. Область $\bar{Q}^T = \{x \in \bar{\Omega}_t,\ t \in [0,T]\}$ при этом должна иметь кусочно-гладкую границу в E_{n+1}, а границы S_t областей Ω_t в E_3 должны иметь равномерно ограниченные для всех t из $[0,T]$ "нормы" в C^2 и удовлетворять условиям I) и 2) страницы 269. Постоянные, входящие в эти предположения о границах, влияют на величины T_1 и $\|u\|_{W_2^{2,1}(Q^{T_1})}$.

Из этой теоремы следует разрешимость задачи (I),(2) в $W_2^{2,1}(Q^{T_1})$ при тех же предположениях, что и в теореме I (напомним, что $\operatorname{div} u_0 = 0$ и $\operatorname{div} \psi(x,t) = 0$). Единственность решений задач (I),(2) и (3) в классе $W_2^{2,1}(Q^{T_1})$ доказывается так же, как и для прямого цилиндра $Q_T = \Omega \times [0,T]$ (см. гл. УI [I]). Теорема, близкая к теореме I, для прямого цилиндра Q_T была установлена независимо Проди [3] и нами (см. второе английское издание [I]), и Пожже Каннелем и

Шинбродом [4].

Если $\rho^t f(x,t) \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ (или если их нормы достаточны малы), то при достаточно малой $\| u_0(x) \|_{W_2^1(\Omega_0)}$ временной интервал T_1 существования решения из $W_2^{2,1}(Q^{T_1})$ будет равен ∞. В самом деле, в этом случае слагаемое C_1 в правой части будет равно нулю и потому вместо (37) будет иметь

$$
\begin{aligned}
& \| u_x \|^2_{2,\Omega_m} + h \sum_{k=1}^{m} \nu \| \rho \Delta u \|^2_{2,\Omega_k} \le \\
& \le \| u_x \|^2_{2,\Omega_0} + C_4 h \sum_{k=1}^{m} \| u_x \|^4_{2,\Omega_{k-1}} \| u_x \|^2_{2,\Omega_k} .
\end{aligned}
\tag{53}
$$

В силу (7), или точнее

$$
\| u_x \|^2_{2,\Omega_k} \le \beta_1^2 \| \rho \Delta u \|^2_{2,\Omega_k} ,
\tag{54}
$$

из (53) заключим, что для всех m

$$
\| u_x \|^2_{2,\Omega_m} \le \| u_x \|^2_{2,\Omega_0} ,
\tag{55}
$$

если только

$$
\nu - C_4 \beta_1^2 \| u_x \|^4_{2,\Omega_0} \ge 0 .
\tag{56}
$$

Оценка (55) вместе с (37) и системой (4) гарантируют неравенство (49) при любом m.

Решения v задачи (I),(2) из $W_2^{2,1}(Q^T)$ устойчивы по отношению к изменению f и ψ. Именно, справедлива следующая теорема:

<u>Теорема 2.</u> Пусть $f^0 \in L_2(Q^T)$ и $\psi^0 \in W_2^{2,1}(Q^T)$ соответсвует решение $v \in W_2^{2,1}(Q^T)$, Тогда для всех $\tilde{f}$ и $\tilde{\psi}$, достаточно близких к f^0 и ψ^0 в нормах $L_2(Q^T)$ и $W_2^{2,1}(Q^T)$ соответственно, существует решение v из $W_2^{2,1}(Q^T)$ (с тем же T!), и оно мало отличается от v^0 в норме $W_2^{2,1}(Q_T)$. Предположения о S_t, $t \in [0,T]$, те же, что и в теореме I.

Действительно, функция $u = v - (\tilde{\psi} + v^0 - \psi^0)$ есть решение задачи типа (3), и как видно из доказательства теоремы 2, оно существует в $W_2^{2,1}(Q^T)$, и его норма в $W_2^{2,1}(Q^T)$ мала, если только $\| f - f^0 \|_{L_2(Q^T)}$ и $\| \psi - \psi^0 \|_{W_2^{2,1}(Q^T)}$ достаточно малы.

Заметим, что такой же устойчивостью обладают и другие обобщенные решения, изученные в [I].

Для случая плоско-параллельных потоков разрешимость имеет место в $W_2^{2,1}(Q^T)$ при любом промежутке времени T. Доказывается это так же, как и теорема I, только оценка основного нелинейного члена в (I6) вместо (2I) проводится иначе:

$$\left| \int_\Omega u_i(k-1)\, u_{x_i}(k)\, \rho^k\, \Delta u(k)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \| \rho \Delta u \|_{2,\Omega_k} \cdot \| u \|_{4,\Omega_{k-1}} \cdot \| \, |u_x| \, \|_{4,\Omega_k} \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\,\|p\Delta u\|_{2,\Omega_k}\cdot\|u\|^{1/2}_{2,\Omega_{k-1}}\cdot\|u_x\|^{1/2}_{2,\Omega_{k-1}}\cdot\|u_x\|^{1/2}_{2,\Omega_k}\cdot\|\,|u_{xx}|\,\|^{1/2}_{2,\Omega_k}\leq$$

$$\leq \sqrt{2\beta_1}\,c\,\|p\Delta u\|^{3/2}_{2,\Omega_k}\,\|u_x\|^{1/2}_{2,\Omega_{k-1}}\,\|u_x\|^{1/2}_{2,\Omega_k}\leq \tag{$\widetilde{21}$}$$

$$\leq \sqrt{2\beta_1}\,c\left(\frac{3}{4}\varepsilon^{4/3}\|p\Delta u\|^2_{2,\Omega_k}+\frac{1}{4\varepsilon^4}\|u_x\|^2_{2,\Omega_{k-1}}\|u_x\|^2_{2,\Omega_k}\right),\forall\varepsilon>0.$$

При этом мы использовали неравенство (1) § I гл. I [I] и неравенства (7) и (I5) данной работы. Благодаря ($\widetilde{21}$) вместо(37) получим

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_m}+\nu h\sum_{k=1}^{m}\|p\Delta u\|^2_{2,\Omega_k}\leq$$
$$\leq \tilde{c}_3+\tilde{c}_4 h\sum_{k=1}^{m}\|u_x\|^2_{2,\Omega_{k-1}}\cdot\|u_x\|^2_{2,\Omega_k}. \tag{$\widetilde{37}$}$$

Обозначив правую часть этого неравенства через $z(m)$, из ($\widetilde{37}$) получим:

$$\|u_x\|^2_{2,\Omega_m}\leq z(m)$$

и

$$\frac{1}{h}\left[z(m)-z(m-1)\right]=\tilde{c}_4\,\|u_x\|^2_{2,\Omega_{m-1}}\cdot\|u_x\|^2_{2,\Omega_m}\leq$$

$$\leq \tilde{c}_4\,z(m-1)\,\|u_x\|^2_{2,\Omega_m},$$

откуда

$$\varkappa(m) \le (1+\tilde{c}_4 h \|u_x\|^2_{2,\Omega_m})\,\varkappa(m-1) \le (1+\tilde{c}_4 h \|u_x\|^2_{2,\Omega_m})\ldots$$

$$\ldots(1+\tilde{c}_4 h \|u_x\|^2_{2,\Omega_1})\,\varkappa(0) \le e^{1+\tilde{c}_4 h \sum_{k=1}^{m} \|u_x\|^2_{2,\Omega_k}}\,\varkappa(0),$$

т.е. (принимаем во внимание оценку (I5)) $\varkappa(m)$, а потому и левая часть (37), равномерно ограничена для всех $m=0,\ldots,\left[\frac{T}{h}\right]$. Таким образом, имеет место

<u>Теорема 3</u>. В случае плоско-параллельных потоков задачи (I),(2) и (3) однозначно разрешимы в $W_2^{2,1}(Q_T)$ при любом T, если f,ψ и $S_t, t\in[0,T]$, удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме I.

Литература

I О.А.Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., I96I г.

2 О.А.Ладыженская, Смешанная задача для гиперболических уравнений, М., I953 г.

3 G.Prodi, Resultats recents et problemes anciens dans la theorie des equations de Navier-Stokes, Institut de Mathematiques, Trieste, I962.

4 M.Shinbrot and S.Kaniel, The initial value problem for the Navier-Stokes equations, Archiv for Rational Mechanics and Analysis, I966, 2I, № 4, 270-285.