

## О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах

© 2009 г. Ю. Л. Павлов

Рассматриваются случайные графы, моделирующие структуру больших сетей передачи данных, включая Интернет. Изучается подмножество таких графов, состоящих из  $N$  вершин при условии, что число ребер равно  $n$ . Получены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow \lambda$ , где  $\lambda$  — положительная постоянная.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-00007а, и программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 4129.2006.1.

В статьях [1, 2] рассматривался известный (см., например, [3]) вид случайного графа, предназначенный для моделирования сложных сетей телекоммуникаций, в частности, сети Интернет. В связи с этим такие графы иногда называют Интернет-графами. Предполагается, что граф состоит из  $N$  основных вершин, занумерованных числами от 1 до  $N$ , и содержит еще одну вспомогательную вершину, то есть общее число вершин графа равно  $N + 1$ . Степени основных вершин задаются независимыми случайными величинами  $\eta_1, \dots, \eta_N$ , имеющими общее распределение, являющееся дискретным аналогом распределения Парето с положительным показателем  $\tau$ :

$$\mathbf{P}\{\eta_1 \geq k\} = k^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

При описании структуры Интернет-графа в [3] введено понятие полуребра вершины, то есть ребра, инцидентного данной вершине, для которого смежная вершина еще не определена. Все полуребра графа считаются различными и при образовании ребер соединяются равновероятно. Для того, чтобы сумма степеней вершин была четной, вспомогательная вершина имеет степень 0 или 1 в зависимости от того, является ли сумма степеней основных вершин четной или нет.

Во многих работах (см., например, [3, 4, 5]) изучалось предельное поведение различных характеристик Интернет-графов при  $N \rightarrow \infty$ ,  $1 < \tau < 2$ . Выбор интервала (1, 2) для параметра  $\tau$  объясняется тем, что наблюдения за реальными сетями (см. [4, 5]) показали, что такие значения  $\tau$  являются типичными. В то же время отмечается, что при  $\tau = 1, 2$  происходят существенные изменения свойств случайных графов. Поэтому представляет интерес изучение Интернет-графов и при значениях параметра  $\tau$  вне интервала (1, 2).

В [1, 2] впервые предложено использовать обобщенную схему размещения частиц по ячейкам с целью исследования асимптотического поведения Интернет-графов при всех

значениях  $\tau$ . Обобщенная схема была введена и изучена В. Ф. Колчиным (см., например, [6]). Из (1) следует, что

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta_1 = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Пусть

$$\nu_N = \eta_1 + \dots + \eta_N.$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_N$ , для которых

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \lambda^k p_k (1 - (1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1))^{-1}, \quad (3)$$

где  $k = 1, 2, \dots, 0 < \lambda < 1$ ,

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - ze^{-t}} dt, \quad (4)$$

$\Gamma(s)$  — значение гамма-функции в точке  $s$ .

Мы будем рассматривать подмножество Интернет-графов, для которых сумма степеней  $\nu_N$  известна и равна  $n$ . Из (2)–(4) нетрудно получить, что для такого множества графов при всех  $\lambda, 0 < \lambda \leq 1$ , справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}. \quad (5)$$

Это равенство означает, что условия обобщенной схемы размещения [6] выполнены и мы можем ее использовать для исследования условных Интернет-графов при условии  $\nu_N = n$ .

Обозначим  $\eta_{(N)}$  максимальную степень вершины и  $\mu_r$  число вершин степени  $r$ . В [1] получены предельные распределения этих случайных величин при  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \zeta(\tau)$ , где  $\zeta(\tau)$  — значение дзета-функции Римана в точке  $\tau$ . В [2] рассматривались также случаи  $n/N \downarrow 1$  и  $n/N \uparrow \zeta(\tau)$ . В этих работах параметр  $\lambda$  распределения (3) выбирался как решение уравнения

$$m(\lambda) = n/N, \quad (6)$$

где

$$m(\lambda) = \mathbf{E}\xi_1 = \frac{\lambda\Phi(\lambda, \tau, 1) - (1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau-1, 1)}{1 - (1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)}. \quad (7)$$

Используя (2)–(7), нетрудно показать, что если  $n/N \leq C_2 < \zeta(\tau)$ , то справедливо неравенство  $\lambda < 1$ , при этом из условия  $n/N \uparrow \zeta(\tau)$  следует, что  $\lambda \uparrow 1$ . Для того, чтобы описать предельное поведение  $\eta_{(N)}$  и  $\mu_r$  в случае  $n/N \uparrow \zeta(\tau)$ , в [2] значения параметров  $\tau, N, n$  названы допустимыми для  $\lambda$  (являющегося решением уравнения (6)), если выполнено одно из условий:

1.  $\tau > 3$ ;
2.  $\tau = 3, (\ln(1-\lambda))/\sqrt{N} \rightarrow 0$ ;
3.  $2 < \tau < 3, \sqrt{N}(1-\lambda)^{3-\tau} \rightarrow \infty$ ;

$$4. \tau = 2, N(1 - \lambda)^2 |\ln(1 - \lambda)|^3 \rightarrow \infty;$$

$$5. 0 < \tau < 2, N(1 - \lambda)^\tau \rightarrow \infty.$$

Заметим, что условия 4 и 5 являются менее жесткими, чем в [2], но, как нетрудно проверить, доказательства соответствующих результатов в [2] остаются в силе и при таких условиях. Ниже эти результаты приведены в виде теорем 1–3.

**Теорема 1.** Пусть  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \uparrow \zeta(\tau)$  и значения параметров  $\tau, N, n$  допустимы для  $\lambda$ . Пусть  $r = r(N, n)$  выбрано так, что

$$\frac{\tau N \lambda^r}{r^{\tau+1} (1 - \lambda)} \rightarrow \gamma,$$

где  $\gamma$  — некоторая положительная постоянная. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \rightarrow e^{-\gamma}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \uparrow \zeta(\tau)$  и значения параметров  $\tau, N, n$  допустимы для  $\lambda$ . Тогда для целых неотрицательных  $k$  равномерно относительно  $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}(\lambda)\sqrt{N})$  в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}(\lambda)\sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)),$$

где

$$\sigma_{rr}^2(\lambda) = p_r(\lambda) \left( 1 - p_r(\lambda) - \frac{(m(\lambda) - r)^2}{\sigma^2(\lambda)} p_r(\lambda) \right), \quad (8)$$

$$\sigma^2(\lambda) = \mathbf{D}\xi_1 = \frac{2\Phi(\lambda, \tau - 1, 1) - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau - 2, 1) - \Phi(\lambda, \tau, 1)}{1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)} - m^2(\lambda). \quad (9)$$

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и, кроме того,  $r \rightarrow \infty$ . Тогда для целых неотрицательных  $k$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{k!} (Np_r(\lambda))^k \exp\{-Np_r(\lambda)\} (1 + o(1))$$

равномерно относительно  $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$  в любом фиксированном конечном интервале.

Используя (2), (3), (4), (7), (9), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} m &= m(1) = \mathbf{E}\eta_1 = \zeta(\tau), \\ \sigma^2 &= \sigma^2(1) = \mathbf{D}\eta_1 = 2\zeta(\tau - 1) - \zeta(\tau) - \zeta^2(\tau). \end{aligned} \quad (10)$$

Из (2), (10) находим, что при  $\tau > 2$  случайные величины  $\eta_1, \dots, \eta_N$  имеют конечное математическое ожидание и дисперсию. Хорошо известно (см., например, [7]), что в этом случае для суммы  $\nu_N$  справедлива локальная предельная теорема, следовательно,

$$\sup_k \left| \sigma \sqrt{2\pi N} \mathbf{P}\{\nu_N = k\} - \exp \left\{ -\frac{(k - N\zeta(\tau))^2}{2\sigma^2 N} \right\} \right| \rightarrow 0. \quad (11)$$

В случае  $\tau \leq 2$  из (10) следует, что  $\eta_1$  не имеет дисперсии. При  $\tau = 2$  нетрудно получить, используя теоремы 2.2.1, 2.6.2 и 4.2.1 книги [7], что

$$\sup_k \left| \sqrt{2\pi N \ln N} \mathbf{P}\{v_N = k\} - \exp \left\{ -\frac{(k - N\zeta(2))^2}{2N \ln N} \right\} \right| \rightarrow 0. \quad (12)$$

В статье [8] доказано, что в случае  $1 < \tau < 2$  справедливо соотношение

$$\sup_k \left| N^{1/\tau} \mathbf{P}\{v_N = k\} - g \left( \frac{k - N\zeta(\tau)}{N^{1/\tau}} \right) \right| \rightarrow 0, \quad (13)$$

где  $g(x)$  — плотность устойчивого распределения с показателем  $\tau$  и характеристической функцией

$$f(t) = \exp \left\{ -|t|^\tau \frac{\Gamma(2-\tau)}{\tau-1} \left( \cos \frac{\pi\tau}{2} \right) \left( 1 + i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2} \right) \right\}. \quad (14)$$

Из (11)–(13) видно, что при исследовании предельного поведения Интернет-графов без ограничений на сумму  $v_N$  в случае  $\tau > 1$  наибольший интерес представляет центральная зона изменения параметров, в которой  $v_N/N \rightarrow \zeta(\tau)$ . Однако в статьях [1, 2] главным образом рассматривался случай  $n/N \leq C_2 < \zeta(\tau)$  и лишь частично охвачена левая часть центральной зоны (см. теоремы 1–3), ограниченная допустимыми для  $\lambda$  значениями  $\tau$ ,  $N$ ,  $n$ . В настоящей работе исследуется предельное поведение  $\eta_{(N)}$  и  $\mu_r$  в случае  $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$  и фиксированных  $r$ . Далее мы будем предполагать, что параметр  $\lambda$  распределения (3) равен единице. Нетрудно видеть, что в этом случае распределения случайных величин  $\xi_1$  и  $\eta_1$  совпадают (ср. (2)–(4)). Справедливы следующие результаты.

**Теорема 4.** Пусть  $N \rightarrow \infty$ ,  $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$ ,  $r = (N/\gamma)^{1/\tau}(1 + o(1))$ , где  $\gamma$  — некоторая положительная постоянная. Пусть также выполнено одно из следующих условий:

1.  $\tau > 2$ ,  $n - \zeta(\tau)N = O(\sqrt{N})$ ;
2.  $\tau = 2$ ,  $n - \zeta(2)N = O(\sqrt{N \ln N})$ ;
3.  $1 < \tau < 2$ ,  $n - \zeta(\tau)N = O(N^{1/\tau})$ .

Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \rightarrow e^{-\gamma}.$$

**Теорема 5.** Пусть  $N \rightarrow \infty$ ,  $n - \zeta(\tau)N = o(\sqrt{N})$ ,  $\tau > 2$ . Тогда для целых неотрицательных  $k$  равномерно относительно  $u_r = (k - Np_r)/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$  в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)),$$

где

$$\sigma_{rr}^2 = p_r \left( 1 - p_r - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r \right).$$

**Теорема 6.** Пусть  $N \rightarrow \infty$  и выполнено одно из следующих условий:

1.  $\tau = 2$ ,  $n - \zeta(2)N = o(\sqrt{N \ln N})$ ;

2.  $1 < \tau < 2$ ,  $n - \zeta(\tau)N = o(N^{1/\tau})$ .

Тогда для целых неотрицательных  $k$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r (1 - p_r)}} \exp\left\{-\frac{(k - N p_r)^2}{2N p_r (1 - p_r)}\right\}.$$

равномерно относительно  $(k - N p_r)/\sqrt{N p_r (1 - p_r)}$  в любом фиксированном конечном интервале.

**Замечание 1.** Пусть  $n/N \uparrow \zeta(\tau)$ ,  $\tau > 1$  и условия теорем 4–6 не выполнены. Тогда, используя (6), (7) и известные (см. [9, 10]) асимптотические свойства функции (4), нетрудно получить, что значения параметров  $\tau$ ,  $N$ ,  $n$  являются допустимыми для  $\lambda$  и, следовательно, для описания предельного поведения  $\eta_N$  и  $\mu_r$  можно использовать теоремы 1–3.

Ниже приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–6), с помощью которых далее будут доказаны теоремы 4–6.

Введем наборы независимых случайных величин  $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}$  и  $\tilde{\xi}_1^{(r)}, \dots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$  таких, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \leq r\}, \quad k = 1, 2, \dots, r; \quad (15)$$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \neq r\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Введем обозначения

$$v_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)}, \quad \tilde{v}_N^{(r)} = \tilde{\xi}_1^{(r)} + \dots + \tilde{\xi}_N^{(r)}, \quad P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}.$$

Из равенства (5) легко вывести известные (см. [6]) свойства обобщенной схемы размещения.

**Лемма 1.** *Справедливы равенства*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{v_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{v_N = n\}},$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\tilde{v}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{v_N = n\}}.$$

Лемма 1 будет использована для доказательства теорем 4–6. Так как асимптотика вероятности  $\mathbf{P}\{v_N = n\}$  дана соотношениями (11)–(13), осталось рассмотреть предельное поведение бинома  $(1 - P_r)^N$ , вероятностей  $\mathbf{P}\{v_N^{(r)} = n\}$  и  $\mathbf{P}\{\tilde{v}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}$ , и биномиальной вероятности  $\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k}$ .

**Лемма 2.** *Пусть  $N \rightarrow \infty$ ,  $r = (N/\gamma)^{1/\tau}(1 + o(1))$ ,  $0 < \gamma < \infty$ . Тогда  $(1 - P_r)^N \rightarrow e^{-\gamma}$ .*

Используя (2), нетрудно получить, что

$$P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\} = \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k = (r+1)^{-\tau}, \quad (17)$$

поэтому из соотношения  $r^\tau = (N/\gamma)(1 + o(1))$  следует утверждение леммы.

Поскольку  $r \rightarrow \infty$  в теореме 4, для доказательства локальной сходимости распределения суммы  $v_N^{(r)}$  к предельным законам необходимо применить соответствующие теоремы для схемы серий. К сожалению, в нашем случае не выполняются известные простые достаточные условия такой сходимости (см., например, [11]) и мы будем использовать результаты работы [12], условия которых не всегда легко проверяемы.

**Лемма 3.** Пусть  $N \rightarrow \infty, NP_r \rightarrow \gamma, 0 < \gamma < \infty, \tau > 2$ . Тогда равномерно относительно целых положительных  $k$  таких, что  $(k - N\zeta(\tau))/(\sigma\sqrt{N})$  лежит в любом фиксированном конечном интервале,

$$\mathbf{P}\{v_N^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(k - N\zeta(\tau))^2}{2\sigma^2 N}\right\}.$$

*Доказательство.* Обозначим  $\varphi(t)$  характеристическую функцию распределения (2). Используя (4), нетрудно получить, что

$$\varphi(t) = 1 + (e^{it} - 1)\Phi(e^{it}, \tau, 1). \quad (18)$$

Обозначим характеристическую функцию случайной величины  $(v_N^{(r)} - N\zeta(\tau))/(\sigma\sqrt{N})$  через  $\Psi_1(t)$ . Тогда из (15) следует, что

$$\Psi_1(t) = \exp\left\{-\frac{itN\zeta(\tau)}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \left(\frac{\varphi(t/(\sigma\sqrt{N})) - \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k \exp\{itk/(\sigma\sqrt{N})\}}{1 - P_r}\right)^N.$$

В силу (11) при любом фиксированном  $t$

$$\varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) \exp\left\{-\frac{itN\zeta(\tau)}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \rightarrow e^{-t^2/2},$$

поэтому

$$\Psi_1(t) = e^{-t^2/2} \left(\frac{1 - \varphi^{-1}(t/(\sigma\sqrt{N})) \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k \exp\{itk/(\sigma\sqrt{N})\}}{1 - P_r}\right)^N (1 + o(1)). \quad (19)$$

Заметим, что при  $k \rightarrow \infty$

$$p_k = \tau/k^{\tau+1}(1 + o(1)). \quad (20)$$

Учитывая (18) и соотношения

$$NP_r \rightarrow \gamma, \quad \varphi(t/(\sigma\sqrt{N})) = 1 + o(1), \quad \exp\{itk/(\sigma\sqrt{N})\} = 1 + \delta k/\sqrt{N},$$

где величина  $\delta$  не зависит от  $k$  и может быть сделана сколь угодно малой при достаточно больших  $N$ , из (19) и (20) получаем, что

$$\Psi_1(t) \rightarrow e^{-t^2/2}. \quad (21)$$

Таким образом, распределение случайной величины  $(v_N^{(r)} - N\zeta(\tau))/(\sigma\sqrt{N})$  слабо сходится к стандартному нормальному закону. Докажем локальную сходимость.

Обозначим  $\xi^*$  случайную величину, полученную из  $\xi_1$  путем симметризации, то есть  $\xi^* = \xi_1 - \xi_2$ . Пусть  $d \in [1/4, 1/2]$ ,  $\langle \alpha \rangle$  — расстояние от  $\alpha$  до ближайшего целого числа.

Нам потребуется величина  $H_N = \inf_d H_N(d)$ , где  $H_N(d) = N\mathbf{E}\{\xi^* d\}^2$ . Используя (2), нетрудно найти, что при всех  $\tau > 0$  и  $1/4 \leq d \leq 1/2$  справедливо неравенство

$$H_N \geq C_3 N, \quad (22)$$

здесь и далее символы  $C_3, C_4, \dots$  означают некоторые положительные постоянные. Из этого неравенства и (10) следует, что

$$\sigma^2 N = O(H_N). \quad (23)$$

Согласно первому условию теоремы 1 работы [12], соотношений (21) и (23) достаточно для того, чтобы утверждение леммы 3 было верным.

**Лемма 4.** Пусть  $N \rightarrow \infty$ ,  $NP_r \rightarrow \gamma$ ,  $0 < \gamma < \infty$ ,  $\tau = 2$ . Тогда равномерно относительно целых положительных  $k$  таких, что  $(k - N\zeta(2))/\sqrt{N \ln N}$  лежит в любом фиксированном конечном интервале,

$$\mathbf{P}\{v_N^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi N \ln N}} \exp\left\{-\frac{(k - N\zeta(2))^2}{2N \ln N}\right\}.$$

*Доказательство.* Из (12) ясно, что в условиях леммы

$$\varphi^N \left( \frac{t}{\sqrt{N \ln N}} \right) \exp\left\{-\frac{itN\zeta(2)}{\sqrt{N \ln N}}\right\} \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Отсюда получаем, повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 3, что

$$\Psi_2(t) \rightarrow e^{-t^2/2}, \quad (24)$$

где  $\Psi_2(t)$  — характеристическая функция величины  $(v_N^{(r)} - N\zeta(2))/\sqrt{N \ln N}$ . Введем обозначение

$$B_N^2(u) = N \sum_{|k| \leq u} k^2 \mathbf{P}\{\xi^* = k\}. \quad (25)$$

Согласно (2),

$$\mathbf{P}\{\xi^* = k\} = p_{k+1}p_1 + p_{k+2}p_2 + \dots \quad (26)$$

Из (2), (25), (26) нетрудно получить, что

$$B_N^2(H_N^\beta) \geq C_4 N \ln N,$$

где  $\beta \in (0, 1/2)$ . Отсюда и из (22) следует, что

$$H_N \rightarrow \infty, \quad N \ln N = O(B_N^2(H_N^\beta)).$$

Последние соотношения, вместе с (24), означают, что выполнено третье условие теоремы 1 из [12], откуда и следует лемма 4.

**Лемма 5.** Пусть  $N \rightarrow \infty$ ,  $NP_r \rightarrow \gamma$ ,  $0 < \gamma < \infty$ ,  $1 < \tau < 2$ . Тогда равномерно относительно целых положительных  $k$  таких, что  $(k - N\zeta(\tau))/N^{1/\tau}$  лежит в любом фиксированном конечном интервале,

$$\mathbf{P}\{v_N^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{N^{1/\tau}} g\left(\frac{k - N\zeta(\tau)}{N^{1/\tau}}\right),$$

где  $g(x)$  — плотность устойчивого распределения, определенного в (14).

Доказательство. Из (13) и (14) следует, что

$$\varphi^N \left( \frac{t}{N^{1/\tau}} \right) \exp \left\{ -\frac{itN\zeta(\tau)}{N^{1/\tau}} \right\} \rightarrow f(t). \quad (27)$$

Отсюда находим, как и в лемме 3, что

$$\Psi_3(t) = f(t) \left( \frac{1 - \varphi^{-1}(t/N^{1/\tau}) \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k \exp\{itk/N^{1/\tau}\}}{1 - P_r} \right)^N (1 + o(1)) \rightarrow f(t), \quad (28)$$

где  $\Psi_3(t)$  — характеристическая функция случайной величины  $(v_N^{(r)} - N\zeta(\tau))/N^{1/\tau}$ . Достаточные условия локальной сходимости, приведенные в теореме 1 из [12], в нашем случае не выполнены, поэтому далее мы будем следовать обычной схеме доказательства локальных теорем. По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{v_N^{(r)} = k\} = \frac{1}{2\pi N^{1/\tau}} \int_{-\pi N^{1/\tau}}^{\pi N^{1/\tau}} \exp \left\{ -\frac{itk}{N^{1/\tau}} \right\} \Psi_3(t) dt.$$

Поскольку

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t) dt,$$

получаем, что

$$2\pi N^{1/\tau} \mathbf{P}\{v_N^{(r)} = k\} - 2\pi g((k - N\zeta(\tau))/N^{1/\tau}) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_{-A}^A \exp \left\{ -\frac{itk}{N^{1/\tau}} \right\} (\Psi_3(t) - f(t)) dt, \quad I_2 = \int_{A < |t| \leq \varepsilon N^{1/\tau}} \exp \left\{ -\frac{itk}{N^{1/\tau}} \right\} \Psi_3(t) dt,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon N^{1/\tau} < |t| \leq \pi N^{1/\tau}} \exp \left\{ -\frac{itk}{N^{1/\tau}} \right\} \Psi_3(t) dt, \quad I_4 = - \int_{A < |t|} f(t) dt,$$

выбор положительных постоянных  $A$  и  $\varepsilon$  будет ясен из дальнейшего. Лемма будет доказана, если мы покажем, что каждый из интегралов  $I_1, \dots, I_4$  стремится к нулю.

Ясно, что  $I_1 \rightarrow 0$  в силу (28). Из (14) нетрудно получить, что

$$|I_4| \leq \int_A^{\infty} e^{-C_5|t|^\tau} dt,$$

и последнее выражение может быть сделано сколь угодно малым выбором достаточно большого  $A$ . Из (27), (28) следует, что в области интегрирования  $I_2$

$$|\Psi_3(t)| \leq C_6 \varphi^N(t/N^{1/\tau}). \quad (29)$$

Используя известную [10] асимптотику функции (4) при  $z \rightarrow 0$

$$\Phi(e^z, \tau, 1) = \zeta(\tau) + \Gamma(1 - \tau)(-z)^{\tau-1} + O(z),$$

из (4), (18) и (29) находим, что

$$|\Psi_3(t)| \leq C_6 \exp\{-C_7|t|^{\tau-1} N^{1/\tau}\}.$$

Из последнего неравенства следует, что  $I_2 \rightarrow 0$ . Нам осталось рассмотреть  $I_3$ . Ясно, что

$$\Psi_3(t) = \left( \frac{\varphi(t/N^{1/\tau}) - \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k \exp\{itk/N^{1/\tau}\}}{1 - P_r} \right)^N. \quad (30)$$

В области интегрирования интеграла  $I_3$ , как известно, справедливо неравенство

$$|\varphi(t/N^{1/\tau})| \leq e^{-C_8},$$

поэтому из (30) следует, что

$$|I_3| \leq 2\pi N^{1/\tau} \left( \frac{e^{-C_8} + P_r}{1 - P_r} \right)^N \rightarrow 0.$$

Лемма 5 доказана.

Далее мы рассмотрим предельное поведение суммы  $\tilde{v}_N^{(r)}$ . Из (2), (10) и (16) следует, что

$$m_r = \mathbf{E}\tilde{\xi}_1^{(r)} = (m - rp_r)/(1 - p_r), \quad (31)$$

$$\sigma_r^2 = \mathbf{D}\tilde{\xi}_1^{(r)} = \frac{\sigma^2}{(1 - p_r)^2} \left( 1 - p_r - \frac{(m - r)^2}{\sigma^2} p_r \right). \quad (32)$$

Нетрудно видеть, что при фиксированных  $r$  имеют место соотношения, аналогичные (11)–(13), откуда получаем следующее утверждение.

**Лемма 6.** *При  $N \rightarrow \infty$  справедливы следующие утверждения.*

1. Если  $\tau > 2$ , то

$$\sup_k \left| \sigma_r \sqrt{2\pi N} \mathbf{P}\{\tilde{v}_N^{(r)} = k\} - \exp\left\{-\frac{(k - Nm_r)^2}{2\sigma_r^2 N}\right\} \right| \rightarrow 0.$$

2. Если  $\tau = 2$ , то

$$\sup_k \left| \sqrt{2\pi N \ln N} \mathbf{P}\{\tilde{v}_N^{(r)} = k\} - \exp\left\{-\frac{(k - Nm_r)^2}{2N \ln N}\right\} \right| \rightarrow 0.$$

3. Если  $1 < \tau < 2$ , то

$$\sup_k \left| N^{1/\tau} \mathbf{P}\{\tilde{v}_N^{(r)} = k\} - g\left(\frac{k - Nm_r}{N^{1/\tau}}\right) \right| \rightarrow 0,$$

где  $g(x)$  — плотность устойчивого распределения, определенного в (13).

Теперь мы можем доказать теоремы 4–6. Если выполнено первое условие теоремы 4, то из леммы 3 и соотношения (11) находим, что

$$\mathbf{P}\{v_N^{(r)} = n\} / \mathbf{P}\{v_N = n\} \rightarrow 1. \quad (33)$$

Из лемм 4, 5 и, соответственно, соотношений (12), (13), находим, что (33) остается в силе и в условиях 2, 3 теоремы 4. Тогда эта теорема очевидным образом следует из первого утверждения леммы 1, леммы 2 и (33).

Пусть выполнены условия теоремы 5. Согласно известному нормальному приближению для биномиального распределения при  $Np_r(1-p_r) \rightarrow \infty$

$$\binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}} \exp\left\{-\frac{(k-Np_r)^2}{2Np_r(1-p_r)}\right\} \quad (34)$$

равномерно относительно  $(k-Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$  в любом фиксированном конечном интервале. Утверждение теоремы 5 нетрудно получить прямыми вычислениями с помощью (11), (31), (32), (34), второго утверждения леммы 1 и леммы 6. При выполнении первого условия теоремы 6 вероятность  $\mathbf{P}\{v_N = n\}$  можно оценить с помощью (12). Это же соотношение используем и для оценки  $\mathbf{P}\{\tilde{v}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}$ , учитывая (31) и то, что нормирующий множитель предельного распределения, согласно теореме 2.6.2 в [7], имеет вид  $((N-k) \ln(N-k))/(1-p_r)$ . Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{v}_{N-k}^{(r)} = n - kr\} / \mathbf{P}\{v_N = n\} \rightarrow 1 \quad (35)$$

и из (34) и леммы 1 получаем утверждение теоремы 6. При выполнении второго условия теорема 6 доказывается аналогично с использованием соотношений (13), (31), (34), (35), леммы 1 и теорем 2.1.1, 2.6.1 из [7].

## Список литературы

1. Cheplyukova I., Pavlov Yu., Limit distributions of vertex degree in conditional power-law random graphs. In: *Trans. XXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models*. Ort Braude College, Karmel, Israel, 2007, pp. 52–59.
2. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А., Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения. *Дискретная математика* (2008) **20**, №3, 3–18.
3. Reittu H., Norros I., On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation* (2004) **55**, 3–23.
4. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M., On power-law relationships of the internet topology. *Computer Communications Rev.* (1999) **29**, 251–252.
5. Newman M. E. J., Strogatz S. H., Watts D. J., Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications. *Phys. Rev. E* (2001) **64**, 026118.
6. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
7. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., *Независимые и стационарно связанные величины*. Наука, Москва, 1965.
8. Павлов Ю. Л., Предельное распределение объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа. *Дискретная математика* (2007) **19**, №3, 22–34.
9. Robinson J. E., Note on the Bose–Einstein integral functions. *Phys. Rev. 2* (1951) **83**, 678–679.
10. Wood D., *Techn. Rep. 15-20*, Univ. Kent, 1992.
11. Колчин А. В., Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения. *Дискретная математика* (2003) **15**, №4, 148–157.
12. Мухин А. Б., Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) **36**, №4, 660–674.
13. Боровков А. А., *Курс теории вероятностей*. Наука, Москва, 1972.