Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 2. С. 16–23.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ГРАВИТАЦИОННО-ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ВОЛН В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА

Л. В. Борель[a], **В. Е. Федоров**[b]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
[a]*lidiya904@mail.ru;* [b]*kar@csu.ru*

В статье рассматривается начально-краевая задача для системы гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска — интегро-дифференциальной системы уравнений в частных производных. Существование единственного решения такой задачи установлено с использованием методов теории вырожденных эволюционных уравнений в банаховых пространствах.

Ключевые слова: *система гравитационно-гироскопических волн, система внутренних волн, приближение Буссинеска, начально-краевая задача, вырожденное эволюционное уравнение, уравнение с памятью.*

Введение

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$v_n(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T), \tag{1}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

для системы уравнений

$$v_t(x,t) = [v(x,t), \overline{\omega}] - r(x,t) + N^2 \int\limits_0^t v_3(x,s) e_3 ds, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T), \tag{3}$$

$$\nabla \cdot v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T), \tag{4}$$

описывающей в приближении Буссинеска малые колебания равномерно вращающейся относительно вертикальной оси Ox_3 в поле силы тяжести идеальной несжимаемой жидкости. Она называется также системой гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска [1, с. 186]. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, вектор $v = (v_1, v_2, v_3)$ — скорость частиц жидкости, r — градиент динамического давления P, т. е. $r = (r_1, r_2.r_3) = (P_{x_1}, P_{x_2}, P_{x_3})$, $e_3 = (0,0,1)$, ω — удвоенная угловая скорость, $[\cdot, \overline{\omega}]$ — векторное произведение на вектор $\overline{\omega} = \omega e_3 = (0,0,\omega) \in \mathbb{R}^3$, $v_3 e_3 = (0,0,v_3)$, $n = (n_1,n_2,n_3)$ — вектор внешней нормали к границе области $\partial\Omega$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $v_n = \langle v, n \rangle_{\mathbb{R}^3}$, N^2 — частота Вяйселя — Брента, $\nabla \cdot v$ — дивергенция вектор-функции v. Неизвестными являются вектор-функции v и r.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант правительства РФ №14.Z50.31.0020).

Система уравнений является неразрешимой относительно производной по времени (иначе говоря, вырожденной эволюционной системой), так как не содержит производных по t от некоторых неизвестных функций — от функций r_1, r_2, r_3. При этом она содержит интегральный оператор Вольтерра, другими словами, является системой уравнений с памятью. Исследованию вырожденных эволюционных систем с памятью посвящён ряд работ М. В. Фалалеева и С. С. Орлова [2–5], а также работ авторов данной статьи и О. А. Стахеевой [6–9]. В перечисленных работах рассматриваются начальные задачи или задачи с заданной предысторией для дифференциальных уравнений в абстрактных банаховых пространствах с операторными коэффициентами, с вырожденным оператором при старшей производной. Полученные для таких задач теоремы об однозначной разрешимости используются при рассмотрении начально-краевых задач для уравнений или систем уравнений в частных производных с интегральным оператором памяти, не разрешимых относительно производной по времени. Отметим также работы, посвящённые однозначной разрешимости вырожденных эволюционных уравнений с другими интегральными операторами — уравнений с запаздыванием [10–12], нагруженных уравнений [13; 14], уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто [15–17].

Основная идея данной работы — редуцировать задачу (1)–(4) к задаче для вырожденного эволюционного уравнения с памятью в банаховом пространстве и с помощью абстрактных результатов, полученных ранее в [8], получить теорему об однозначной разрешимости задачи (1)–(4). Первый параграф содержит необходимые сведения из работы [8], а во втором осуществлена указанная редукция и доказана соответствующая теорема.

1. Вырожденное эволюционное уравнение с памятью

Для банаховых пространств $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ обозначим банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве $\mathfrak{U}$, действующих в $\mathfrak{V}$, будем обозначать через $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Если $\mathfrak{V}=\mathfrak{U}$, то соответствующие обозначения сократятся до $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $\mathcal{C}l(\mathfrak{U})$.

Через D_M обозначается область определения оператора $M\in\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Снабжённое нормой графика $\|\cdot\|_{D_M}=\|\cdot\|_{\mathfrak{U}}+\|M\cdot\|_{\mathfrak{V}}$, это множество является банаховым пространством в силу замкнутости оператора M.

Обозначим также $\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+=\{0\}\cup\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-=\{x\in\mathbb{R}:x<0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_-=\{0\}\cup\mathbb{R}_-$.

Пусть $L\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $M\in\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Обозначим $\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})\}$. Следуя [18, с. 89], оператор M будем называть (L,σ)-ограниченным, если множество $\sigma^L(M)=\mathbb{C}\setminus\rho^L(M)$ ограничено в $\mathbb{C}$. При условии (L,σ)-ограниченности оператора M обозначим $\gamma=\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|=r>a\}$, где $a>0$ таково, что $\sigma^L(M)\subset B_r(0)=\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu|\leq a\}$. Рассмотрим интегралы

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}R^L_\mu(M)d\mu\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}),\quad Q=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}L^L_\mu(M)d\mu\in\mathcal{L}(\mathfrak{V})\,.$$

Нетрудно убедиться, что P и Q являются проекторами. Положим $\mathfrak{U}^0=\ker P$, $\mathfrak{V}^0=\ker Q$, $\mathfrak{U}^1=\mathrm{im}P$, $\mathfrak{V}^1=\mathrm{im}Q$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ $(D_{M_k}=D_M\cap\mathfrak{U}^k)$, $k=0,1$.

Теорема 1. [18, с. 90, 91]. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*

(i) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{V}^1)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0;\mathfrak{V}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $k=0,1$;

(ii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0;\mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$.

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $H = M_0^{-1}L_0$. При $p \in \mathbb{N}_0$ оператор M называется (L,p)-ограниченным, если он (L,σ)-ограничен, $H^p \neq \mathbb{O}$, $H^{p+1} = \mathbb{O}$.

Обозначим также $\mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathfrak{U})$ — множество функций $h:\mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}$, для которых несобственный интеграл Римана $\int_0^{+\infty} \|h(t)\|_{\mathfrak{U}}dt$ сходится, $C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\overline{\mathbb{R}}_-$ функций, удовлетворяющих равенству $u(0)=0$ с нормой $\|u\|_{C_0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})} = \sup\limits_{t\leq 0}\|u(t)\|_{\mathfrak{U}}$.

Пусть $\mathcal{K}:\overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Для уравнения с интегральным оператором памяти

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T), \tag{5}$$

при выполнении ограничения $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$, $s \geq 0$, имеет смысл рассматривать модифицированное условие заданной истории системы (5)

$$P(u(t) - u_-(t)) = 0, \quad t \leq 0, \tag{6}$$

когда задана лишь история проекции состояния системы на подпространство $\mathfrak{U}^1$. Решением задачи (5), (6) на промежутке $[0,T)$ будем называть функцию $u \in C([0,T);D_M) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$, для которой выполняется (6), $Lu \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$ и при каждом $t \in [0,T)$ справедливо равенство (5).

Теорема 2. [8]. *Пусть* $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* M (L,p)-*ограничен,* $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$, $Pu_- \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathcal{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $Q\mathcal{K}' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathcal{K}(s)$ *при* $s \geq 0$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K} \in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}^{(l)}(0)=0$, $l=0,1,\dots,k-1$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)\mathcal{K}^{(n)} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$, $n=0,1,\dots,k$, $k=0,1,\dots,p$, $f \in C([0,T);\mathfrak{V})$, $H^kM_0^{-1}(I-Q)f \in C^k([0,T);\mathfrak{U})$, $k=0,1,\dots,p$. *Тогда существует единственное решение задачи* (5), (6) *на промежутке* $[0,T)$.

Замечание 1. Очевидно, что уравнение (5) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t) + \int\limits_{0}^{t} \mathcal{K}(t-s)u(s)ds + g(t), \quad t \in [0,T), \tag{7}$$

где

$$g(t) = f(t) + \int\limits_{-\infty}^{0} \mathcal{K}(t-s)u_-(s)ds,$$

и рассматривать для уравнения (7) уже просто задачу Коши $u(0)=u_0$ или задачу $P(u(0)-u_0)=0$.

2. Система гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска

Обозначим $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}$. Замыкание линеала $\mathcal{L}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$. Пусть $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$, $\Pi:\mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ — ортопроектор вдоль $\mathbb{H}_\sigma$.

Следуя подходу, применённому в работе [19] к системе уравнений Соболева, которая от данной системы отличается лишь отсутствием интегрального слагаемого, используем обобщённую постановку начально-краевой задачи (1)–(4), заменив уравнение несжимаемости (4) и граничное условие (1) на уравнение

$$\Pi v(\cdot,t)=0,\quad t\in[0,T). \tag{8}$$

После замены $w(t,x)=v(t,x)-v_0(x)$, считая, что $v_0\in\mathbb{H}_\sigma$, получим начально-краевую задачу

$$w(x,t)\equiv 0,\quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_-, \tag{9}$$

$$w_t(x,t)=[w(x,t),\overline{\omega}]-r(x,t)+N^2\int\limits_0^t w_3(x,s)e_3ds+$$

$$+[v_0(x),\omega]+N^2tv_{03}(x)e_3,\quad (x,t)\in\Omega\times[0,T), \tag{10}$$

$$\Pi w(\cdot,t)=0,\quad t\in[0,T). \tag{11}$$

При этом считается, что предыстория, определяемая условием (9), тождественно нулевая, поскольку она никак не влияет на состояние системы при $t>0$.

Формулой $\widehat{G}:z\to[z,\overline{\omega}]$, $\overline{\omega}=(0,0,\omega)$, зададим линейный непрерывный оператор $\widehat{G}:\mathbb{L}_2\to\mathbb{L}_2$, $\widehat{G}_\sigma=\widehat{G}|_{\mathbb{H}_\sigma}$. Обозначим $\Sigma=I-\Pi$, $P_3\in\mathcal{L}(\mathbb{L}_2)$ — проектор вектор-функций на ось Ox_3, т. е. $P_3z=\langle z,e_3\rangle_{\mathbb{R}^3}=(0,0,z_3)$, если $z=(z_1,z_2,z_3)$. Положим

$$\mathfrak{U}=\mathfrak{V}=\mathbb{H}_\sigma\times\mathbb{H}_\pi, \tag{12}$$

тогда векторы имеют вид $u=(w,r)\in\mathfrak{U}$, $f=(g,h)=(\Sigma f,\Pi f)\in\mathfrak{V}$. При этом использовано то, что в силу (11) $w(\cdot,t)=0\in\mathbb{H}_\sigma$, а градиент давления $r(\cdot,t)=\nabla P(\cdot,t)\in\nabla H^1(\Omega)=\mathbb{H}_\pi$ для всех $t\in[0,T)$.

Систему (10), (11) можно задать в виде (5) с помощью операторов

$$L=\begin{pmatrix} I & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix},M=\begin{pmatrix} \Sigma\widehat{G}_\sigma & \mathbb{O}\\ \Pi\widehat{G}_\sigma & -I\end{pmatrix},\mathcal{K}(t)=\begin{pmatrix} \Sigma k(t)P_3 & \mathbb{O}\\ \Pi k(t)P_3 & \mathbb{O}\end{pmatrix}\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}), \tag{13}$$

где

$$k(t)=\begin{cases} N^2,\ t\in[0,T),\\ N^2(1-(t-T)),\ t\in[T,T+1),\\ 0,\ t\geq T+1,\end{cases}$$

и функции $f(t)=[v_0(x),\omega]+N^2tv_{03}(x)e_3$.

Лемма [20]. *Пусть заданы пространства* (12) *и операторы* (13). *Тогда оператор M $(L,0)$-ограничен, при этом проекторы имеют вид*

$$P=\begin{pmatrix} I & \mathbb{O}\\ \Pi\widehat{G}_\sigma & \mathbb{O}\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} I & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{pmatrix}.$$

Из вида проектора P и операторов $\mathcal{K}(t)$ следует, что (9) для данной задачи имеет вид условия (6), и $\mathfrak{U}^0\subset\ker\mathcal{K}(t)$ при всех $t\geq 0$. При этом по построению функции $k(t)$, не влияющему на задачу (9)–(11) при конечном $T>0$, получаем интегрируемость по Риману оператор-функций $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ (там, где эта производная существует — везде, кроме точек $t=T$ и $t=T+1$) на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$. Из теоремы 2 следует разрешимость задачи (9)–(11), а значит, и задачи (2), (3), (8).

Теорема 3. *Пусть $v_0\in\mathbb{H}_\sigma$, $T>0$ конечно. Тогда существует единственное решение задачи* (2), (3), (8).

Замечание 2. В случае $\omega=0$ получается система внутренних волн в приближении Буссинеска [1, с. 186], для которой теорема 3 также верна.

Список литературы

1. **Демиденко, Г. В.** Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск : Науч. кн., 1998. — 438+xviii с.
2. **Фалалеев, М. В.** Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. «Мат. моделирование и программирование». — 2011. — № 4 (221), вып. 7. — С. 100–110.
3. **Фалалеев, М. В.** Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. «Математика». — 2011. — Т. 4, № 1. — С. 118–134.
4. **Фалалеев, М. В.** Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Изв. вузов. Математика. — 2011. — № 10. — С. 68–79.
5. **Фалалеев, М. В.** Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. «Математика». — 2012. — Т. 5, № 2. — С. 90–102.
6. **Стахеева, О. А.** Локальная разрешимость одного класса линейных уравнений с памятью / О. А. Стахеева // Вестн. Челяб. гос. ун-та. — 2009. — № 20 (158). Математика. Механика. Информатика. Вып. 11. — С. 70–76.
7. **Федоров, В. Е.** О разрешимости линейных уравнений соболевского типа с эффектом памяти / В. Е. Федоров, О. А. Стахеева // Неклассические уравнения математической физики : сб. науч. работ. — Новосибирск : Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2010. — С. 245–261.
8. **Федоров, В. Е.** О разрешимости линейных эволюционных уравнений с эффектами памяти / В. Е. Федоров, Л. В. Борель // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. «Математика». — 2014. — Т. 10. — С. 106–124.
9. **Федоров, В. Е.** О локальном существовании решений уравнений с памятью, не разрешимых относительно производной по времени / В. Е. Федоров, О. А. Стахеева // Мат. заметки. — 2015. — Т. 98, вып. 3. — С. 414–426.
10. **Fedorov, V. E.** On solvability of some classes of Sobolev type equations with delay / V. E. Fedorov, E. A. Omelchenko // Functional Differential Equations. — 2011. — Vol. 18, no. 3–4. — P. 187–199.
11. **Федоров, В. Е.** Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием / В. Е. Федоров, Е. А. Омельченко // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 2. — С. 418–429.
12. **Федоров, В. Е.** Линейные уравнения соболевского типа с интегральным оператором запаздывания / В. Е. Федоров, Е. А. Омельченко // Изв. вузов. Математика. — 2014. — № 1. — С. 71–81.
13. **Федоров, В. Е.** Разрешимость нагруженных линейных эволюционных уравнений с вырожденным оператором при производной / В. Е. Федоров, Л. В. Борель // Алгебра и анализ. — 2014. — Т. 26, № 3. — С. 190–205.
14. **Борель, Л. В.** О разрешимости вырожденных нагруженных систем уравнений / Л. В. Борель // Мат. заметки СВФУ. — 2015. — Т. 22, № 4 (88). — С. 3–11.
15. **Федоров, В. Е.** Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских // Изв. вузов. Математика. 2015. — № 1. — С. 71–83.
16. **Федоров, В. Е.** Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. «Математика». — 2015. — Т. 12. — С. 12–22.

17. **Федоров, В. Е.** Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских, М. В. Плеханова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 10. — С. 1367–1375.
18. **Sviridyuk, G. A.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht ; Boston : VSP, 2003. — 216+vii p.
19. **Соболев, С. Л.** Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18, вып. 1. — С. 3–50.
20. **Федоров, В. Е.** Нелинейная эволюционная обратная задача для некоторых уравнений соболевского типа [Электронный ресурс] / В. Е. Федоров, Н. Д. Иванова // Сиб. электрон. мат. изв. — 2011. — Т. 8 : Труды второй международной молодёжной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». Ч. I. — С. 363–378. — URL: http://semr.math.nsc.ru/v8/c182-410.pdf.

Поступила в редакцию 02.05.2016
После переработки 10.06.2016

Сведения об авторах

Борель Лидия Викторовна, ассистент кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: lidiya904@mail.ru.

Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: kar@csu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 2. P. 16–23.

ON UNIQUE SOLVABILITY OF THE SYSTEM OF GRAVITATIONAL-GYROSCOPIC WAVES IN THE BOUSSINESQ APPROXIMATION

L.V. Borel[a], V.E. Fedorov[b]

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
[a]lidiya904@mail.ru; [b]kar@csu.ru

Initial boundary value problem is studied for the system of gravitational-gyroscopic waves in the Boussinesq approximation, i. e. for the integro-differential system of equations with partial derivatives. The existence of a unique solution is proved for the problem by the methods of the theory of degenerate evolution equations in Banach spaces.

Keywords: *system of gravitational-gyroscopic waves, system of internal waves, Boussinesq approximation, initial boundary value problem, degenerate evolution equation, equation with memory.*

References

1. **Demidenko G.A., Uspenskii S.V.** *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative.* New York, Basel, Marcel Dekker, 2003. 490 p.
2. **Falaleev M.V., Orlov S.S.** Vyrozhdennye integro-differentsial'nye uravneniya spetsial'nogo vida v banakhovykh prostranstvakh i ikh prilozheniya [Degenerate integro-differential equations of a special form in Banach spaces and their applications]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematicheskoye modelirovaniye i programmirovaniye"* [Bulletin of South Ural State University. Mathematical modelling and programming], 2011, iss. 7, no. 4 (221), pp. 100–110. (In Russ.).

3. **Falaleev M.V., Orlov S.S.** Integro-differentsial'nye uravneniya s vyrozhdeniyem v banakhovykh prostranstvakh i ikh prilozheniya v matematicheskoy teorii uprugosti [Integro-differential equations with degeneration in Banach spaces and their applications in the mathematical elasticity theory]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika"* [News of Irkutsk State University. Mathematics], 2011, vol. 4, no. 1, pp. 118–134. (In Russ.).
4. **Falaleev M.V., Orlov S.S.** Degenerate Integro-Differential Operators in Banach Spaces and Their Applications. *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 10, pp. 59–69.
5. **Falaleev M.V.** Integro-differentsial'nye uravneniya s fredgol'movym operatorom pri starshey proizvodnoy v banakhovykh prostranstvakh i ikh prilozheniya [Integro-differential equations with a Fredholm operator at the highest derivative in Banach spaces and their applications]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika"* [News of Irkutsk State University. Mathematics], 2012, vol. 5, no. 2, pp. 90–102. (In Russ.).
6. **Stakheeva O.A.** Lokal'naya razreshimost' odnogo klassa lineynykh uravneniy s pamyat'yu [Local solvability of a class of linear equations with memory]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of Chelyabinsk State University], 2009, no. 20 (158), iss. 11, pp. 70–76. (In Russ.).
7. **Fedorov V.E., Stakheeva O.A.** O razreshimosti lineynykh uravneniy sobolevskogo tipa s effektom pamyati [On solvability of linear Sobolev type equation with memory effect]. *Neklassicheskiye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Nonclassical equations of mathematical physics]. Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS Publ., 2010. Pp. 245–261. (In Russ.).
8. **Fedorov V.E., Borel L.V.** O razreshimosti lineynykh evolyutsionnykh uravneniy s effektami pamyati [On solvability of linear evolution equations with memory effects]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika"* [News of Irkutsk State University. Mathematics], 2014, vol. 10, pp. 106–124. (In Russ.).
9. **Fedorov V.E., Stakheeva O.A.** On the local existence of solutions of equation with memory not solvable with respect to the time derivative. *Mathematical Notes*, 2015, vol. 98, iss. 3, pp. 472–483.
10. **Fedorov V.E., Omel'chenko E.A.** On solvability of some classes of Sobolev type equations with delay. *Functional Differential Equations*, 2011, vol. 18, no. 3–4, pp. 187–199.
11. **Fedorov V.E., Omel'chenko E.A.** Inhomogeneous linear Sobolev type equations with delay. *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, no. 2, pp. 335–344.
12. **Fedorov V.E., Omel'chenko E.A.** Linear equations of the Sobolev type with integral delay operator. *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 1, pp. 60–69.
13. **Fedorov V.E., Borel L.V.** Solvability of loaded linear evolution equations with a degenerate operator at the derivative. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2015, vol. 26, no. 3, pp. 487–497.
14. **Borel L.V.** O razreshimosti vyrozhdennykh nagruzhennykh system uravneniy [On solvability of degenerate loaded systems of equations]. *Matematicheskiye zametki Severo-Vostochnogo federal'nogo universiteta* [Mathematical notes of North-Eastern Federal University], 2015, vol. 22, no. 4 (88), pp. 3–11. (In Russ.).
15. **Fedorov V.E., Gordievskikh D.M.** Resolving operators of degenerate evolution equations with fractional derivative with respect to time. *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 1, pp. 60–70.
16. **Fedorov V.E., Gordievskikh D.M.** Resheniya nachal'no-krayevykh zadach dlya nekotorykh vyrozdennykh system uravneniy drobnogo poryadka po vremeni [Solutions of initial-boundary value problems for some degenerate time-fractional order systems of equations]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika"* [News of Irkutsk State University. Mathematics], 2015, vol. 12, pp. 12–22. (In Russ.).

17. **Fedorov V.E., Gordievskikh D.M., Plekhanova M.V.** Equations in Banach spaces with a degenerate operator under a fractional derivative. *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 10, pp. 1360–1368.
18. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht, Boston, VSP, 2003. 216+vii p.
19. **Sobolev S.L.** Ob odnoy novoy zadache matematicheskoy fiziki [On a new problem of mathematical physics]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya*, 1954, vol. 18, iss. 1, pp. 3–50. (In Russ.).
20. **Fedorov V.E., Ivanova N.D.** Nelineynaya evolyutsionnaya obratnaya zadacha dlya nekotorykh uravneniy sobolevskogo tipa [Nonlinear evolution inverse problem for some Sobolev type equations]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2011, vol. 8. Proceedings of the Second International School-Conference, p. I. Pp. 363–378. Available at: http://semr.math.nsc.ru/v8/c182-410.pdf. (In Russ.).

Accepted article received 02.05.2016
Corrections received 10.06.2016