ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1974 МАТЕМАТИКА № 12 (151)

УДК 513.88

В. П. Одинец

О НОРМАЛЬНЫХ БАЗИСАХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Настоящая работа посвящена изучению свойства монотонности нормальных базисов сепарабельных банаховых пространств над полем R вещественных чисел, т. е. таких базисов, у которых нормы всех элементов, а также нормы всех элементов соответствующей сопряженной системы равны 1.

§ 1. Терминология и обозначения

Пусть $\mathfrak{N}$ — множество натуральных чисел. Множества вида $\{1, 2, \dots, r\}$, где $r \in \mathfrak{N}$, а также множество $\mathfrak{N}$ (в этом случае полагаем $r = \infty$) будем обозначать через $\Gamma(r)$. Пусть B — сепарабельное банахово пространство над полем R. Пусть $\{x_i\}_{i \in \Gamma(r)}$ — последовательность элементов из B. Через $[x_1, x_2, \dots, x_i, \dots]$ $(i \in \Gamma(r))$ будем обозначать замкнутую линейную оболочку множества $\{x_i\}_{i \in \Gamma(r)}$. Множество всех перестановок множества $\Gamma(r)$ обозначим через Π_r.

Напомним, что базис $\{x_i\}_{i \in \Gamma(r)}$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ пространства B называется нормальным, если для любого $i \in \Gamma(r)$: 1°. $\|x_i\| = 1$; 2°. $x_i \perp [x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots]$. Базис $\{x_i\}_{i \in \Gamma(r)}$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ пространства B будем называть монотонным, если для любых $m, n \in \mathfrak{N}$ и $\alpha_i \in R$ $(i = 1, 2, \dots, m+n)$, $\left\| \sum_{i=1}^{m+n} \alpha_i x_i \right\| \geqslant \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \right\|$. Другие ниже встречающиеся обозначения и определения заимствованы из [1], [2], [3].

§ 2. Типы монотонности нормальных базисов

Определение 2.1. Базис $\{x_i\}_{i \in \Gamma(r)}$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ пространства B будем называть *устойчиво монотонным* (или ортогональным в смысле И. Зингера [4]), если для любой перестановки $\sigma \in \Pi_r$ последовательность $\{x_{\sigma(i)}\}_{i \in \Gamma(r)}$ будет монотонным базисом в B.

Определение 2.2. Базис $\{x_i\}_{i \in \Gamma(r)}$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ пространства B будем называть *перестановочно монотонным*, если существует хотя бы одна перестановка $\sigma \in \Pi_r$ такая, что последовательность $\{x_{\sigma(i)}\}_{i \in \Gamma(r)}$ будет монотонным базисом в B.

Для краткости будем говорить, что нормальный базис пространства B соответственно типа: (sm), если базис устойчиво монотонный; (pm), если базис перестановочно монотонный, но не типа (sm); (nm), если базис не типа (pm) и не типа (sm).

Очевидно, в двумерном банаховом пространстве любой нормальный базис принадлежит к типу (sm). В банаховых пространствах бо́льших размерностей это не так.

Пример 2.1. В пространстве l_1^3 существуют нормальные базисы всех трех типов: а) базис $\{e_i\}_{i \in \Gamma(3)}$, где $e_1 = (1; 0; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0)$, $e_3 = (0; 0; 1)$, — типа (sm); б) базис

$\{h_i\}_{i\in\Gamma(3)}$, где $h_1=(1/4;\ 1/4;\ 1/2)$, $h_2=(1/2;\ -1/2;\ 0)$, $h_3=(1/4;\ 1/4;\ -1/2)$, — типа (pm); в) базис $\{h_2, f_1, f_2\}$, где $f_1=(1/3;\ 1/6;\ 1/2)$, $f_2=(1/6;\ 1/3;\ -1/2)$, —типа (nm).

Лемма 2.1. *Пусть* $\{e_i\}_{i\in\Gamma(r)}$ — *устойчиво монотонный нормальный базис пространства* B $(4\leqslant \dim B\leqslant\infty)$. *Пусть* $\{h_i\}_{i\in\Gamma(3)}$, $(h_i=(h_i^{(1)};\ h_i^{(2)};\ h_i^{(3)}))$ — *нормальный базис в* $[e_1, e_2, e_3]$ *типа* (pm) *или* (nm). *Тогда последовательность* $\{v_i\}_{i\in\Gamma(r)}$, *где* $v_j=(h_j^{(1)};\ h_j^{(2)};\ h_j^{(3)};\ 0;\ 0;\ldots)$, $j\in\Gamma(3)$; $v_k=e_k$, $k\in\Gamma(r)\setminus\Gamma(3)$, *будет в* B *нормальным базисом того же типа, что и базис* $\{h_i\}_{i\in\Gamma(3)}$ *в* $[e_1, e_2, e_3]$.

Теорема 2.1. *В пространствах* l_p^n, l_p, $(n\geqslant 3,\ 1\leqslant p\neq 2<\infty)$ *всегда есть нормальные базисы типа* (sm) *и* (pm), *а при* $p=1$ *и типа* (nm).

Доказательство теоремы основывается на лемме 2.1, а также на использовании неравенства

$$([1-z^p)^{1/p}+z/2]+[(1-z^p)^{1/p}-z/2]^p+2^{1-p}z^p>2,$$

справедливого при $p>2$ и достаточно малых $z>0$. Базисы разных типов строятся эффективно.

§ 3. О пространствах с нормальными базисами стабильного типа

Теорема 3.1. *Для любого* $n\in\mathfrak{N}\setminus\Gamma(2)$ *существует* n*-мерное банахово пространство, все нормальные базисы которого принадлежат к типу* (nm).

Справедливость теоремы 3.1 следует из теорем М. З. Соломяка [5] (для $n=3$) и В. И. Гурария [6] (для $n\geqslant 4$) о существовании конечномерных пространств, не имеющих монотонного базиса, а также теоремы Ауэрбаха о существовании в любом конечномерном пространстве нормального базиса ([1], с. 257).

Теорема 3.2. *Для каждого* $r\in\mathfrak{N}\setminus\Gamma(2)$ *существует* r*-мерное равномерно гладкое, строго нормированное банахово пространство, ни один из нормальных базисов которого не принадлежит к типу* (nm). *При этом хотя бы один из нормальных базисов принадлежит к типу* (pm).

Доказательство заключается, грубо говоря, в некоторой перестройке единичной сферы евклидова пространства в достаточно малых окрестностях двух центрально-симметричных точек для получения единичной сферы искомого пространства.

Следствие 3.1. Для любого натурального $r\geqslant 3$ существует равномерно гладкое, строго нормированное банахово пространство, имеющее нормальные базисы всех типов.

Замечание 3.1. Любой нормальный базис гильбертова пространства принадлежит к типу (sm) (см., напр., [1], с. 555). Автору неизвестно, верно ли обратное, т. е. если любой нормальный базис банахова пространства B принадлежит к типу (sm), то будет ли B изометрически изоморфно гильбертову пространству.

§ 4. Типы правильности нормальных базисов

Определение 4.1. Будем говорить, что базис $\{x_i\}_{i\in\Gamma(r)}$ $(1\leqslant r\leqslant\infty)$ пространства B 1°°) *правильный*, если для любого $r\geqslant 1$ на подпространство $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ существует некоторая проекция (ограниченный идемпотентный линейный оператор) из B с единичной нормой; 2°°) *устойчиво правильный*, если для любой перестановки $\sigma\in\Pi_r$ последовательность $\{x_{\sigma(i)}\}_{i\in\Gamma(r)}$ будет правильным базисом в B; 3°°) *перестановочно правильным*, если существует хотя бы одна перестановка $\sigma\in\Pi_r$ такая, что последовательность $\{x_{\sigma(i)}\}_{i\in\Gamma(r)}$ будет правильным базисом в B.

Для краткости будем говорить, что нормальный базис пространства B типа (scb), если этот базис устойчиво правильный; типа (pcb), если этот базис переста-

новочно правильный, но не типа (scb); типа (ncb), если этот базис не типа (scb) и не типа (pcb).

Нормальные базисы пространства l_1^3, указанные в примере 2.1 в пп. а) и б), принадлежат соответственно к типам (scb) и (pcb), а в п. в) — к типу (ncb), что следует из теоремы 3.1 [3].

Предложение 4.1. *Для нормальных базисов пространства B справедливы следующие импликации:*

$$(sm) \Longrightarrow (scb);\ (pm) \Longrightarrow (pcb);\ (ncb) \Longrightarrow (nm).$$

Замечание 4.1. Обратное, в общем случае, неверно, т. к., например, в пространстве $c^{(3)}$ все нормальные базисы устойчиво правильные. При этом среди нормальных базисов есть базисы любого из следующих типов: (sm), (pm), (nm).

Теорема 4.1. *Для любого $k \in \mathfrak{N} \setminus \Gamma(2)$ существует k-мерное равномерно гладкое, строго нормированное пространство, все нормальные базисы которого принадлежат к типу (ncb).*

Доказательство теоремы опирается на теорему Боненблуста [7].

§ 5. Достаточные условия монотонности нормальных базисов

Как отмечалось выше, нормальный правильный базис не является монотонным. Тем не менее справедливо

Предложение 5.1. *Пусть $\{e_i\}_{i \in \Gamma(r)}$ $(2 \leqslant r \leqslant \infty)$ — нормальный правильный базис банахова пространства B. Для того чтобы базис $\{e_i\}_{i \in \Gamma(r)}$ был монотонным, достаточно, чтобы каждый элемент e_i, $i \in \Gamma(r)$, был точкой гладкости пространства B. В частности, нормальный правильный базис гладкого пространства будет монотонным.*

Следствие 5.1. Для нормальных базисов гладкого банахова пространства B $(2 \leqslant \dim B \leqslant \infty)$ справедливы следующие импликации:

$$(scb) \Longleftrightarrow (sm);\ (pcb) \Longleftrightarrow (pm);\ (nm) \Longleftrightarrow (ncb).$$

В заключение хотелось бы отметить, что поводом к написанию данной работы послужила ошибка (обнаруженная М. И. Кадецом) в заметке Б. Е. Вейца [8], [9].

Автор благодарит Ю. Д. Бураго и Д. Ф. Харазова за внимание к работе

ЛИТЕРАТУРА

1. Singer I. Bases in Banach spaces, I. Springer, Berlin — Heidelberg — New York, 1970.
2. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М., ИИЛ, 1961.
3. Одинец В. П. О единственности проекции с нормой, равной 1, в банаховом пространстве. Изв. вузов, Матем., 1974, № 1, с. 82—89.
4. Зингер И. Об одной теореме И. М. Гельфанда. УМН, т. XVII, № 1, 1962, с. 169—176.
5. Соломяк М. З. Об ортогональном базисе в пространстве Банаха. Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., № 1, 1957, с. 27—36.
6. Гурарий В. И. О наклонах подпространств и существовании ортогонального базиса в пространстве Банаха. Зап. мех.-матем. фак. и Матем. о-ва Харьковск. ун-та, т. 30, сер. 4, 1964, с. 34—37.
7. Bohnenblust F. Subspaces of $l_{p,n}$ spaces. Amer. J. Math., v. 63, № 1, 1941, p. 64—72.
8. Вейц Б. Е. Ортогональные системы элементов в гладких пространствах Банаха. ДАН СССР, т. 192, № 1, 1970, с. 9—12.
9. Письмо в редакцию. Вейц Б. Е. ДАН СССР, т. 196, № 5, 1971, с. 998.

г. Ленинград

Поступила
16 IV 1973