



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Могилевич, Ю. А. Блинков, С. В. Иванов, Волны деформации в двух со-
осных кубически нелинейных цилиндрических оболочках с вязкой жидкостью
между ними,

Известия вузов. ПНД, 2020, том 28, выпуск 4, 435–454

<https://www.mathnet.ru/ivp385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

13 мая 2025 г., 03:58:47





Волны деформации в двух соосных кубически нелинейных цилиндрических оболочках с вязкой жидкостью между ними

Л. И. Могилевич¹, Ю. А. Блинков², С. В. Иванов²

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77

²Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

E-mail: mogilevichli@gmail.com, blinkovua@gmail.com, evilgraywolf@gmail.com

Автор для переписки Иванов Сергей Викторович, evilgraywolf@gmail.com

Поступила в редакцию 22.02.2020, принята к публикации 27.05.2020, опубликована 31.08.2020

Тема и цель исследования. В данной статье исследуются продольные волны деформации в физически нелинейных соосных упругих оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними. Учтено влияние на амплитуду и скорость волны инерции движения жидкости и окружающей среды, а также демпфирующие свойства конструкционных материалов, из которых выполнены волноводы, то есть конструкционное демпфирование. Методами качественного анализа невозможно исследовать модели волн деформаций в случае заполнения оболочек вязкой несжимаемой жидкостью и при наличии конструкционного демпфирования в продольном направлении. Это приводит к необходимости применения численных методов. **Методы.** Для построения математической модели явления применяется асимптотический метод двухмасштабных разложений. Численное исследование модели, построенной в ходе данной работы, проводится с использованием разностной схемы для уравнения, аналогичной схеме Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности. **Результаты.** При отсутствии влияния конструкционного демпфирования в продольном направлении, скорость и амплитуда волны не меняются. Движение происходит в отрицательном направлении. Это означает, что скорость движения дозвуковая. Результат вычислительного эксперимента совпадает с точным решением, следовательно, разностная схема и разрешающие уравнения адекватны. При наличии вязкой несжимаемой жидкости между оболочками происходит перекачка энергии между ними. Наличие окружающей среды увеличивает скорость движения волны во внешней оболочке, а конструкционное демпфирование в нормальном направлении уменьшает скорость движения волны во внешней оболочке. Конструкционное демпфирование в продольном направлении приводит к уменьшению амплитуды волны.

Ключевые слова: нелинейные волны, упругие цилиндрические оболочки, вязкая несжимаемая жидкость, разностная схема Кранка–Николсона.

Образец цитирования: Могилевич Л.И., Блинков Ю.А., Иванов С.В. Волны деформации в двух соосных кубически нелинейных цилиндрических оболочках с вязкой жидкостью между ними // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 4. С. 435–454. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-4-435-454>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 19-01-00014а.

Waves of strain in two coaxial cubically nonlinear cylindrical shells with a viscous fluid between them

L. I. Mogilevich¹, Yu. A. Blinkov², S. V. Ivanov²

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
77, Politekhnicheskaya str., Saratov 410054, Russia

²Saratov State University

83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia

E-mail: mogilevichli@gmail.com, blinkovua@gmail.com, evilgraywolf@gmail.com

Correspondence should be addressed to Ivanov Sergey V., evilgraywolf@gmail.com

Received 22.02.2020, accepted 27.05.2020, published 31.08.2020

Subject of the study. Longitudinal deformation waves are investigated in physically nonlinear coaxial elastic shells with a viscous incompressible fluid between them. There are taken into account effect on the amplitude and speed of inertia wave of the fluid and the environment, and as well as the damping properties of the structural materials, from which the waveguides are made. It is impossible to study the models of deformation waves using the methods of qualitative analysis in the case of filling the shell with a viscous incompressible fluid and in the presence of structural damping in the longitudinal direction. This leads to the need for numerical methods. **Methods.** To construct a mathematical model of the phenomenon, the asymptotic method of two-scale decompositions is used. Constructed in the course of this work model is studied numerically using a difference scheme for an equation similar to scheme of Crank–Nicholson for heat equation. **Results.** At the absence of structural damping in longitudinal direction, the speed and amplitude of the wave does not change. Result of the computational experiment coincides with the exact solution; therefore, the difference scheme and the resolving equations are adequate. In the presence of viscous incompressible fluid between the shells, energy is transferred between ones. Due to the environment the wave speed is increased in the outer shell. At structural damping in the normal direction the speed of the wave is decrease in the outer shell. The presence of structural damping in the longitudinal direction leads to decrease of wave amplitudes.

Key words: partial directed coherence, coupling, nonlinearity, nonlinear systems, nonlinear coupling, high-dimensional system.

Reference: Mogilevich L.I., Blinkov Yu.A., Ivanov S.V. Waves of strain in two coaxial cubically nonlinear cylindrical shells with a viscous fluid between them. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 4, pp. 435–454. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-4-435-454>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 19-01-00014a.

Введение

Исследование волнового процесса в упругих оболочках имеет широкое применение в различных технических областях. Распространение волн деформации в упругих, вязкоупругих и нелинейных вязкоупругих оболочках рассмотрено в [1–6] без учета взаимодействия оболочек с вязкой несжимаемой жидкостью. В [7–11] рассмотрено взаимодействие оболочки с вязкой несжимаемой жидкостью, но без учета волновых явлений, также не исследовано влияние локальных членов инерции.

Невозможно исследовать модели волн деформаций методами качественного анализа в случае заполнения оболочки вязкой несжимаемой жидкостью. Это приводит к необходимости применения численных методов. Так, в работе [12] рассмотрена кубически нелинейная оболочка с жидкостью внутри без учета влияния окружающей среды и демпфирующих свойств конструкционных материалов, из которых выполнены волноводы, то есть конструкционного демпфирования и инерции движения жидкости. В работе [13] рассмотрены две соосные кубически нелинейные оболочки с жидкостью между ними без учета влияния окружающей среды, конструкционного

демпфирования и без учета инерции движения жидкости. В работе [14] дополнительно к [13] рассмотрено наличие жидкости во внутренней оболочке без учета инерции ее движения. В работе [15] рассмотрены две соосные оболочки, в отличие от [12–14] с квадратической нелинейностью, с вязкой жидкостью как между ними, так и во внутренней оболочке, аналогично [14], но с учетом влияния окружающей упругой среды на внешнюю оболочку как в нормальном, так и в касательном направлении. Инерция движения жидкости и конструкционные демпфирования не рассматривались. В этих работах исследования проводились на базе численных методов [16–18].

В данной статье методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках с кубической зависимостью между компонентами тензора напряжений и компонентами тензора деформаций. Они отличаются от известных учетом наличия конструкционного демпфирования в нормальном и продольном направлениях, влияния окружающей внешнюю оболочку упругой среды в нормальном направлении, наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками. При этом учитывается инерция движения жидкости. Эти модели получены на основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, в виде системы обобщенных модифицированных уравнений Кортевега–де Вриза (МКдВ). Выявлены эффекты влияния конструкционного демпфирования, упругой окружающей внешнюю оболочку среды и несжимаемой вязкой жидкости между оболочками с учетом инерции ее движения на поведение волны деформаций в соосных оболочках. Наличие волны деформаций во внешней оболочке приводит к возникновению волны деформаций во внутренней оболочке, которой не было в начальный момент времени, и происходит «перекачка энергии» (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней, которая сопровождается немонотонным падением амплитуды волны во внешней оболочке и, как следствие, немонотонным снижением скорости её распространения. При этом во внутренней оболочке происходит немонотонное увеличение амплитуды. Вследствие колебаний амплитуд и скоростей, с течением времени их скорости и амплитуды выравниваются.

Численное исследование модели, построенной в ходе данной работы, проводится с использованием разностной схемы, аналогичной схеме Кранка–Николсона [19].

1. Методика

1.1. Определяющие и разрешающие соотношения физически нелинейной теории оболочек. Деформационная теория пластичности А.А. Илюшина [20, 21] связывает компоненты тензора напряжений σ_x , σ_Θ с компонентами тензора деформаций ε_x , ε_Θ и квадратом интенсивности деформаций ε_u в виде кубической зависимости напряжений от деформации [22, 23].

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(i)} &= \frac{E}{1 - \mu_0^2} \left(\varepsilon_x^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_\Theta^{(i)} \right) \left(1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)2} \right), \\ \sigma_\Theta^{(i)} &= \frac{E}{1 - \mu_0^2} \left(\varepsilon_\Theta^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_x^{(i)} \right) \left(1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)2} \right), \\ \varepsilon_u^{(i)2} &= \frac{4}{3} \left(\mu_1 \left(\varepsilon_x^{(i)2} + \varepsilon_\Theta^{(i)2} \right) - \mu_2 \varepsilon_x^{(i)} \varepsilon_\Theta^{(i)} \right), \\ \mu_1 &= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\mu_0 (2\mu_0 - 1)}{(1 - \mu_0)^2} \right], \quad \mu_2 = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{2\mu_0 (2\mu_0 - 1)}{(1 - \mu_0)^2} \right],\end{aligned}\tag{1}$$

где E – модуль Юнга; m – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие; μ_0 – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Рассмотрим осесимметричные соосные цилиндрические оболочки. Обозначим: R_1 – радиус внутренней поверхности внешней оболочки; R_2 – радиус внешней поверхности внутренней оболочки; $R^{(i)}$ – радиусы срединных поверхностей; $h_0^{(i)}$ – толщины оболочек; $U^{(i)}$ – продольное упругое перемещение; $W^{(i)}$ – прогиб, направленный к центру кривизны ($i = 1$ для внешней, $i = 2$ для внутренней оболочки). При этом $R_1 = R^{(1)} - h_0^{(1)}/2$, $R_2 = R^{(2)} + h_0^{(2)}/2$.

Запишем связь компонент деформаций с упругими перемещениями в виде [10]

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_\Theta^{(i)} = -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}, \quad (2)$$

где x – продольная координата вдоль срединной поверхности; z – нормальная координата в оболочке ($-h_0^{(i)}/2 \leq z \leq h_0^{(i)}/2$). Квадрат интенсивности деформаций запишем в виде

$$\varepsilon_u^{(i)2} = \frac{4}{3} \left\langle \mu_1 \left\{ \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right]^2 + \frac{W^{(i)2}}{R^{(i)2}} \right\} + \right. \\ \left. + \mu_2 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right] \right\rangle. \quad (3)$$

Определим усилия в срединной поверхности оболочки и момент по следующим формулам:

$$N_x^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} dz, \quad N_\Theta^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_\Theta^{(i)} dz, \quad M_x^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} z dz. \quad (4)$$

Уравнения динамики для оболочек запишем так же, как и в физически линейной теории

$$\frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} + \varepsilon_1 \frac{1}{l} \rho_0 h_0^{(i)} \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} - \\ - \left[q_x^{(i)} - W^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial r} + U^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial x} \right]_{R^{(i)}}, \\ \frac{\partial^2 M_x^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} N_x^{(i)} \right) + \frac{1}{R^{(i)}} N_\Theta^{(i)} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} + \\ + \varepsilon_2 \frac{1}{R^{(i)2}} \rho_0 h_0^{(i)} \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} + k_1 \frac{h_0}{R^{(i)3}} \rho_0 h_0^{(i)} \frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)} W^{(i)} (2 - i) - \\ - (-1)^{i-1} \left[q_n - W^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial r} + U^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial x} \right]_{R^{(i)}}, \quad (5)$$

где t – время; $\rho_0^{(i)}$ – плотность материала оболочки; $q_x^{(i)}$, q_n – напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения; r , x – цилиндрические координаты; ε_1 , ε_2 – коэффициенты конструкционного демпфирования в продольном и нормальном направлениях; k_1 – коэффициент постели окружающей упругой среды [24, 25].

Подставляя (1)–(4) в (5), получим уравнения в перемещениях

$$\begin{aligned}
 & \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{4m}{3E} \left\{ \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \times \right. \right. \\
 & \times \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] + \\
 & \left. \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[3\mu_1 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) + (\mu_2 - \mu_1\mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right\} \right\rangle = \\
 & = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} + \varepsilon_1 \frac{1}{l} \rho_0 h_0^{(i)} \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} - \left[q_x^{(i)} - W^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial r} + U^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial x} \right]_{R^{(i)}} \\
 & - \frac{Eh_0^{(i)3}}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \left\{ 1 - \frac{4m}{3E} \left[3\mu_1 \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right]^2 \right] + \right. \right. \\
 & + 2(\mu_2 - \mu_1\mu_0) \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + (\mu_1 - \mu_2\mu_0) \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + \\
 & \left. \left. + 3\frac{h_0^{(i)2}}{20} \mu_1 \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \right\rangle + \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \right. \right. \\
 & - \frac{4m}{3E} \left\{ \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \right. \right. \\
 & + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[3\mu_1 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) + (\mu_2 - \mu_1\mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right\} \right\rangle + \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{1}{R^{(i)}} \left\langle \mu_0 \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] - \right. \\
 & - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{4m}{3E} \left\{ \left[\mu_0 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \right. \right. \\
 & + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] + \\
 & \left. \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[3\mu_1\mu_0 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) + (\mu_1 - \mu_2\mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right\} \right\rangle = \\
 & = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} + \varepsilon_2 \frac{l}{R^{(i)2}} \rho_0 h_0^{(i)} \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} + \\
 & + k_1 \frac{h_0}{R^{(i)3}} \rho_0 h_0^{(i)} \frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)} W^{(i)} (2-1) - (-1)^{i-1} \left[q_n - W^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial r} + U^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial x} \right]_{R^{(i)}}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

1.2. Асимптотический метод исследования уравнений оболочек с жидкостью. Проводимые оценки в безразмерных переменных характеризуют рассматриваемые задачи. Для волновых задач оболочку считаем бесконечной. Для продольных волн в оболочке вводятся безразмерные переменные и безразмерные параметры. Принимаем за характерную длину l – длину волны, а u_m, w_m – характерные значения упругих перемещений

$$\begin{aligned} W^{(i)} &= w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad r^* = \frac{r}{R^{(i)}}, \\ w_m &= h_0^{(i)}, \quad u_m = \frac{h_0^{(i)} l}{R^{(i)}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu_0)}}$ – скорость распространения продольных упругих волн в оболочке.

Положим

$$\begin{aligned} \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} &= \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^{(i)2}}{l^2} = O(\varepsilon), \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = O(1), \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} = O(1), \quad k_1 = O(1), \quad \frac{w_m}{h_0^{(i)}} = O(\varepsilon), \\ \frac{u_m}{l} \frac{R^{(i)}}{h_0^{(i)}} &= O(1), \quad \frac{m\varepsilon}{E} = O(1), \quad \frac{h_0^{(i)2}}{l^2} = \frac{h_0^{(i)2}}{R^{(i)2}} \cdot \frac{R^{(i)2}}{l^2} = \varepsilon^3, \end{aligned} \quad (8)$$

где ε – малый параметр задачи. Введем независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (9)$$

где τ – медленное время; c – скорость волны. Зависимые переменные представим в виде асимптотического разложения

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (10)$$

Получим систему уравнений, подставив (7)–(10) в (6) и оставляя члены порядка ε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right\rangle &= c^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2}, \\ \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из этой системы получаем

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}, \quad c^2 = 1 - \mu_0^2. \quad (12)$$

Таким образом $u_{10}^{(i)}$ – является произвольной функцией, а безразмерная скорость волны $c = (1 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}$ и, следовательно, скорость волны равна \sqrt{E}/ρ_0 – скорости волны в стержне. Поскольку оболочка имеет бесконечную длину, то

$$\xi = \frac{1}{l} \left(x - \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} t \right).$$

Далее получим систему уравнений в приближении ε^2 , с учетом (12)

$$\begin{aligned} \mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{11}^{(i)}}{\partial^2 \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} \frac{\partial u_{31}^{(i)}}{\partial \xi} = \\ = -\frac{4}{3} \frac{m}{E} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0^2) (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) 3 \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial^2 \xi} - \\ - 2 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} q_x^{(i)}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} (1 - \mu_0^2) \mu_0 \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} - \\ - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \mu_0 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + k_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R^{(i)}} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} (2 - i) - \frac{R^{(i)} l}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} (-1)^{i-1} q_n. \end{aligned}$$

Исключая из системы (13) u_{11} и u_{31} , получим разрешающие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 2 \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial^2 \xi} + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial^4 \xi} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} + k_1 \frac{\mu_0^2}{2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R^{(i)}} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} (2 - i) = \\ = -\frac{1}{2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R}{l} (-1)^{i-1} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

В полученной системе уравнений имеем обобщение модифицированных уравнений Кортевега–де Вриза–Бюргера (МКДВ-Б) для $\partial u_{10}^{(i)} / \partial \xi$.

В случае отсутствия жидкости правая часть уравнений равна нулю и получаются МКДВ-Б. Надо определить правую часть, решая уравнения гидродинамики.

1.3. Исследование напряжений, действующих на оболочку со стороны находящейся внутри жидкости. Рассмотрим две соосные бесконечно длинные упругие оболочки (рис. 1), внутри которых находится вязкая несжимаемая жидкость.

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат (r, Θ, x) в случае осесимметричного течения [15] записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

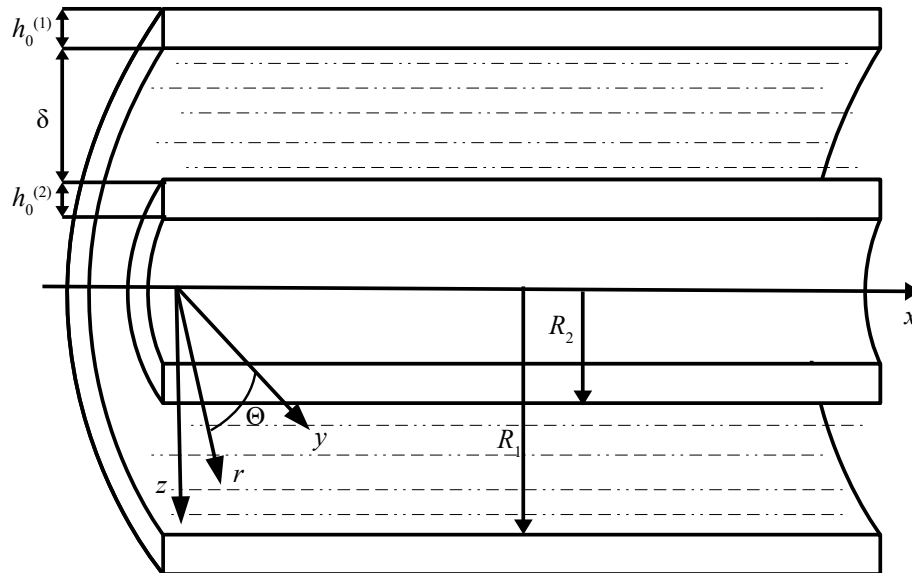


Рис. 1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки
 Fig. 1. Elastic infinitely long coaxial cylindrical shells

На границе оболочек и жидкости (см. рис. 1) при $r = R_i - W^{(i)}$ выполняются условия прилипания жидкости [15]

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} \quad V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}. \quad (16)$$

Здесь V_r, V_x – проекции на оси цилиндрической системы координат вектора скорости; δ – толщина слоя жидкости при кольцевом сечении трубы ($R_1 = R_2 + \delta$); p – давление в жидкости; ρ – плотность жидкости; ν – кинематический коэффициент вязкости.

Напряжения со стороны слоя жидкости определяются формулами

$$\begin{aligned} q_n &= \left[P_{rr} \cos(\widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r}) + P_{rx} \cos(\widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{i}}) \right] \Big|_{r=R_i-W^{(i)}}, \\ q_x &= - \left[P_{rx} \cos(\widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r}) + P_{xx} \cos(\widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{i}}) \right] \Big|_{r=R_i-W^{(i)}}, \\ P_{rr} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad P_{rx} = \rho\nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right), \quad P_{xx} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь \bar{n} – нормаль к срединной поверхности i -й оболочки, $\bar{n}_r, \bar{n}_\Theta, \bar{i}$ – орты базиса (r, Θ, x) цилиндрической системы координат, центр которой расположен на геометрической оси. Если снять напряжения на невозмущенную поверхность оболочки, то можно считать $-\bar{n} = \bar{n}_r$ и $\cos(\widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r}) = 1, \cos(\widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{i}}) = 0$.

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} V_r &= w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x, \quad r = R_2 + \delta r^*, \quad p = \frac{\rho\nu c_0 l R_i w_m}{\delta^3} P + p_0, \\ \psi &= \frac{\delta}{R_2} = o(1), \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m R_2}{R_2 \delta} = o\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right), \quad \frac{w_m}{R_2} = \frac{w_m \delta}{\delta R_2} = \lambda\psi, \\ \frac{w_m}{l} &= \frac{w_m \delta}{\delta R_i} \frac{R_i}{l} = \lambda\psi\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\delta}{l} = \frac{\delta R_i}{R_i l} = \psi\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Полагая теперь $\delta/l = 0$, $\delta/R_2 = 0$ (нулевое приближение по δ/l – гидродинамическая теория смазки) и раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра λ

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad (19)$$

для первых членов разложения получим уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \tilde{Re} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0, \quad \tilde{Re} = \frac{\delta \delta c_0}{l \nu} \quad (20)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} v_r^0 &= -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0, \quad \text{где } r^* = 1, \\ v_r^0 &= -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0, \quad \text{где } r^* = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

С точностью до ψ , λ , из (17) получим

$$\begin{aligned} q_x^{(i)} &\approx -\rho \nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0}^{r^*=1}, \\ q_n &\approx -\frac{\rho \nu c_0 l w_m}{\delta^3} P^0. \end{aligned} \quad (22)$$

Полагая c_0/l равной частоте ω и при гармонической зависимости давления, скоростей жидкости и упругих перемещений оболочки от времени, получим точное решение задачи (20), (21)

$$\begin{aligned} P &= \iint \left[12\gamma \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \alpha \tilde{Re} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^* dx^*, \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} \Big|_{r^*=1} &= \int \left[6\gamma \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{\alpha - 1}{2} \tilde{Re} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^*, \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} \Big|_{r^*=0} &= \int \left[6\gamma \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right) + \frac{\alpha - 1}{2} \tilde{Re} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^*, \end{aligned} \quad (23)$$

где $2\tilde{\varepsilon}^2 = (\delta_0^2 \omega) / \nu = \tilde{Re}$ – число Рейнольдса,

$$\begin{aligned} \gamma(\omega) &= \frac{1}{6 \tilde{\varepsilon}^2} \frac{\tilde{\varepsilon}^3 (\sinh \tilde{\varepsilon} - \sin \tilde{\varepsilon})}{(\cosh \tilde{\varepsilon} + \cos \tilde{\varepsilon}) - 2\tilde{\varepsilon} (\sinh \tilde{\varepsilon} + \sin \tilde{\varepsilon}) + 2(\cosh \tilde{\varepsilon} - \cos \tilde{\varepsilon})}, \\ \alpha(\omega) &= \frac{\tilde{\varepsilon} [\tilde{\varepsilon} (\cosh \tilde{\varepsilon} + \cos \tilde{\varepsilon}) - (\sinh \tilde{\varepsilon} + \sin \tilde{\varepsilon})]}{\tilde{\varepsilon}^2 (\cosh \tilde{\varepsilon} + \cos \tilde{\varepsilon}) - 2\tilde{\varepsilon} (\sinh \tilde{\varepsilon} - \sin \tilde{\varepsilon}) + 2(\cosh \tilde{\varepsilon} - \cos \tilde{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (24)$$

При этом $\gamma(\omega) = 1$ и $\alpha(\omega) = 1.2$ для $\tilde{\varepsilon} \ll 1$.

Из-за нелинейности разрешающих уравнений (14), отбросим предположение о гармонической зависимости от времени параметров жидкости и применим метод итерации, считая $\tilde{Re} < 1$.

На первом шаге итерации полагаем $\tilde{Re} = 0$ (гидродинамическая теория смазки) [14]. Из уравнений движения жидкости получаем с учетом граничных условий

$$P^0 = 12 \int \left[\int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*,$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} = (r^{*2} - r^*) 6 \int \left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) dx^*.$$
(25)

Подставляя найденные значения $\partial v_x^0 / \partial t^*$ в уравнения динамики жидкости, на втором шаге итерации найдем

$$P^0 = \iint \left[12 \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{6}{5} \tilde{Re} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^* dx^*,$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = (2r^* - 1) \int \left[6 \left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) + \frac{1}{10} \tilde{Re} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^*.$$
(26)

Это совпадает с (23), (24) при $\tilde{Re} < 1$ ($\tilde{\varepsilon} \ll 1$), а также обосновывает метод итерации и позволяет использовать (23), (24) как для негармонических законов изменения параметров, так и для нелинейных уравнений динамики оболочек (14).

Учитывая, что введены переменные $\xi = x^* - ct^*$ и $\tau = \varepsilon t^*$, $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$, найдем, с учетом того, что $\varepsilon \ll 1$

$$P^0 = \int \left[12\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{6}{5} \tilde{Re} (1 - \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right] dx^*,$$

$$\frac{\partial P^0}{\partial \xi} = \left[12\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{6}{5} \tilde{Re} (1 - \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right],$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = (2r^* - 1) \left[12\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{\tilde{Re}}{10} (1 - \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right],$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} = 6\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{\tilde{Re}}{10} (1 - \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right),$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} = - \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}.$$
(27)

Найдем выражения, входящие в правую часть уравнений (14). Учитывая, что $w_m l u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_m R^{(i)} u_{30\xi}^{(i)}$ и полагая $R^{(1)} = R^{(2)} = R$, $h_0^{(1)} = h_0^{(2)} = h_0$, в силу малости ψ , λ , для первого уравнения имеем

$$-6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[\left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) - \frac{1}{10} \tilde{Re} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \right].$$
(28)

Для второго уравнения имеем

$$-6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[\left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) - \frac{1}{10} \tilde{R} e \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \right]. \quad (29)$$

1.4. Уравнения динамики соосных оболочек. Система уравнений (14) с учетом найденных правых частей (28), (29) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l}\right)^2 2\sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2 \mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{l^2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^4} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^3} + \\ & + k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R^{(1)}} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} = \\ & = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[\left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) - \frac{1}{10} \tilde{R} e \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l}\right)^2 2\sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2 \mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{l^2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^4} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^3} = \\ & = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[\left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) - \frac{1}{10} \tilde{R} e \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Можно также ввести обозначения $u_{10\xi}^{(1)} = c_3 \varphi^{(1)}$, $u_{10\xi}^{(2)} = c_3 \varphi^{(2)}$, $\eta = c_1 \xi$, $t = c_2 \tau$, где

$$\begin{aligned} c_2 &= 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \frac{\nu}{\delta c_0} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2, \quad c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R}\right)^2 \frac{2}{\mu^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \\ c_3 &= \left[6 \frac{c_2}{c_1} \frac{E \varepsilon}{m} \left(\frac{l}{u_m}\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (31)$$

и положить

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= k_1 \frac{\mu_0^2}{\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R^{(i)}} \frac{c_1}{c_2}, \\ \sigma_1 &= 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \frac{\delta}{l} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{10} \frac{c_1}{c_2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{1}{c_2}, \quad \sigma_3 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{c_1^2}{c_2}. \end{aligned} \quad (32)$$

При этом получаем систему уравнений, обобщающих модифицированные уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргера.

$$\begin{aligned}\varphi_t^{(1)} - 6\varphi^{(1)2}\varphi_\eta^{(1)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} - \sigma_1 \left(\varphi_\eta^{(1)} - \varphi_\eta^{(2)} \right) + \sigma_2\varphi^{(1)} - \sigma_3\varphi_{\eta\eta}^{(1)} + \sigma_0\varphi_\eta^{(1)} &= 0, \\ \varphi_t^{(2)} - 6\varphi^{(2)2}\varphi_\eta^{(2)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} - \sigma_1 \left(\varphi_\eta^{(2)} - \varphi_\eta^{(1)} \right) + \sigma_2\varphi^{(2)} - \sigma_3\varphi_{\eta\eta}^{(2)} &= 0.\end{aligned}\quad (33)$$

При отсутствии конструкционного демпфирования ($\sigma_2 = 0$) и влияния упругой окружающей среды ($\sigma_0 = 0$), система уравнений (33) приобретает вид

$$\begin{aligned}\varphi_t^{(1)} - 6\varphi^{(1)2}\varphi_\eta^{(1)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} - \sigma_1 \left(\varphi_\eta^{(1)} - \varphi_\eta^{(2)} \right) - \sigma_3\varphi_{\eta\eta}^{(1)} &= 0, \\ \varphi_t^{(2)} - 6\varphi^{(2)2}\varphi_\eta^{(2)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} - \sigma_1 \left(\varphi_\eta^{(2)} - \varphi_\eta^{(1)} \right) - \sigma_3\varphi_{\eta\eta}^{(2)} &= 0.\end{aligned}\quad (34)$$

Система уравнений (34) имеет точное решение

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = \frac{\sigma_3}{6} + k \operatorname{th} \left\{ k\eta + \left(2k^3 + k \frac{\sigma_3^2}{6} \right) t \right\}.\quad (35)$$

При отсутствии жидкости и конструкционного демпфирования в продольном направлении ($\sigma_2 = 0$) система уравнений (33) распадается на два уравнения МКдВ-Б. Для внешней оболочки имеем уравнение

$$\varphi_t^{(1)} - 6\varphi^{(1)2}\varphi_\eta^{(1)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(1)} - \sigma_3\varphi_{\eta\eta}^{(1)} + \sigma_0\varphi_\eta^{(1)} - \sigma_3\varphi_{\eta\eta}^{(2)} = 0\quad (36)$$

с точным решением

$$\varphi^{(1)} = \frac{\sigma_3}{6} + k \operatorname{th} \left\{ k\eta + \left(2k^3 - \sigma_0k + k \frac{\sigma_3^2}{6} \right) t \right\}.\quad (37)$$

Для внутренней оболочки имеем уравнение

$$\varphi_t^{(2)} - 6\varphi^{(1)2}\varphi_\eta^{(2)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(2)} - \sigma_3\varphi_{\eta\eta}^{(2)} = 0\quad (38)$$

с точным решением

$$\varphi^{(2)} = \frac{\sigma_3}{6} + k \operatorname{th} \left\{ k\eta + \left(2k^3 + k \frac{\sigma_3^2}{6} \right) t \right\}.\quad (39)$$

При наличии жидкости и конструкционного демпфирования в продольном направлении ($\sigma_2 \neq 0$) требуется численное решение систем уравнений (33) при начальном условии, например

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = \frac{\sigma_3}{6} + k \operatorname{th} \{ k\eta \}.\quad (40)$$

Или

$$\varphi^{(1)} = \frac{\sigma_3}{6} + k \operatorname{th} \{ k\eta \}, \quad \varphi^{(2)} = 0.\quad (41)$$

1.5. Вычислительный эксперимент. Для численного моделирования рассмотрим разностную схему для уравнений (33), аналогичную схеме Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности [19]

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_j^{(1)n+1} - u_j^{(1)n}}{\tau} - 2 \frac{\left(u_{j+1}^{(1)3n+1} - u_{j-1}^{(1)3n+1} \right) + \left(u_{j+1}^{(1)3n} - u_{j-1}^{(1)3n} \right)}{4h} + \\
 & + \frac{\left(u_{j+2}^{(1)n+1} - 2u_{j+1}^{(1)n+1} + 2u_{j-1}^{(1)n+1} - u_{j-2}^{(1)n+1} \right)}{4h^3} + \\
 & + \frac{\left(u_{j+2}^{(1)n} - 2u_{j+1}^{(1)n} + 2u_{j-1}^{(1)n} - u_{j-2}^{(1)n} \right)}{4h^3} + (1 + \sigma_2) \frac{u_j^{(1)n+1} - u_j^{(1)n}}{2} - \frac{u_j^{(2)n+1} - u_j^{(2)n}}{2} - \\
 & - \left((\sigma_1 + \sigma_0) \frac{\left(u_{j+1}^{(1)n+1} - u_{j-1}^{(1)n+1} \right) + \left(u_{j+1}^{(1)n} - u_{j-1}^{(1)n} \right)}{4h} - \right. \\
 & \quad \left. - \sigma_1 \frac{\left(u_{j+1}^{(2)n+1} - u_{j-1}^{(2)n+1} \right) + \left(u_{j+1}^{(2)n} - u_{j-1}^{(2)n} \right)}{4h} \right) - \\
 & - \sigma_3 \frac{\left(u_{j+1}^{(1)n+1} - 2u_j^{(1)n+1} + u_{j-1}^{(1)n+1} \right) + \left(u_{j+1}^{(1)n} - 2u_j^{(1)n} + u_{j-1}^{(1)n} \right)}{4h^3} = 0,
 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_j^{(2)n+1} - u_j^{(2)n}}{\tau} - 2 \frac{\left(u_{j+1}^{(2)3n+1} - u_{j-1}^{(2)3n+1} \right) + \left(u_{j+1}^{(2)3n} - u_{j-1}^{(2)3n} \right)}{4h} + \\
 & + \frac{\left(u_{j+2}^{(2)n+1} - 2u_{j+1}^{(2)n+1} + 2u_{j-1}^{(2)n+1} - u_{j-2}^{(2)n+1} \right)}{4h^3} + \\
 & + \frac{\left(u_{j+2}^{(2)n} - 2u_{j+1}^{(2)n} + 2u_{j-1}^{(2)n} - u_{j-2}^{(2)n} \right)}{4h^3} + (1 + \sigma_2) \frac{u_j^{(2)n+1} - u_j^{(2)n}}{2} - \frac{u_j^{(1)n+1} - u_j^{(1)n}}{2} - \\
 & - \sigma_1 \left(\frac{\left(u_{j+1}^{(2)n+1} - u_{j-1}^{(2)n+1} \right) + \left(u_{j+1}^{(2)n} - u_{j-1}^{(2)n} \right)}{4h} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\left(u_{j+1}^{(1)n+1} - u_{j-1}^{(1)n+1} \right) + \left(u_{j+1}^{(1)n} - u_{j-1}^{(1)n} \right)}{4h} \right) - \\
 & - \sigma_3 \frac{\left(u_{j+1}^{(2)n+1} - 2u_j^{(2)n+1} + u_{j-1}^{(2)n+1} \right) + \left(u_{j+1}^{(2)n} - 2u_j^{(2)n} + u_{j-1}^{(2)n} \right)}{4h^3} = 0.
 \end{aligned}$$

2. Результаты

Графики численного решения уравнений представлены на рис. 2–6. Выполненные вычислительные эксперименты позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости между оболочками с учетом инерции жидкости на поведение нелинейной волны деформации, а также влияние конструкционного демпфирования и окружающей упругой среды. Во всех случаях $k = 0.2$.

Согласно рис. 2, поведение волны совпадает с поведением точного решения (35). Это означает эквивалентность разностной схемы и разрешающих уравнений динамики. Движение графика происходит в отрицательном направлении (влево). Это означает, что скорость волны дозвуковая.

Согласно рис. 3, конструкционное демпфирование в нормальном направлении (σ_3) поднимает графики и уменьшает скорость движения, при этом графики смещаются влево быстрее, чем в предыдущем случае (см. рис. 2), что соответствует точному решению.

Согласно рис. 4, влияние окружающей среды в нормальном направлении (σ_0) приводит к увеличению скорости волны во внешней оболочке больше, чем во внутренней. Скорости волн в обеих оболочках становятся сверхзвуковыми. Движение графиков происходит в положительном направлении (вправо).

Согласно рис. 5, при наличии возмущения во внешней оболочке и отсутствии возмущения во внутренней оболочке в начальный момент времени, с течением времени происходит падение амплитуды волны во внешней оболочке и рост амплитуды волны во внутренней. Этот процесс происходит, пока амплитуды обеих волн не станут равными и не достигнут среднего значения, то есть половины начальной амплитуды волны во внешней оболочке.

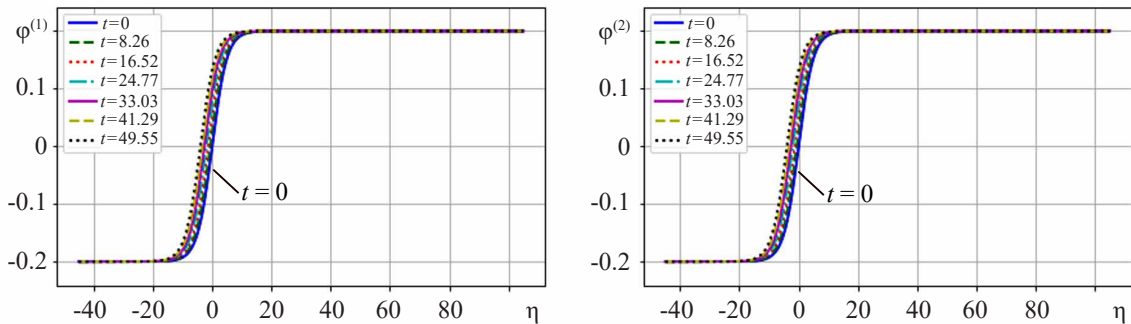


Рис. 2. Проверка адекватности разностной схемы $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, $\sigma_0 = 0$, начальные условия (40)

Fig. 2. Checking the adequacy of the difference scheme $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, $\sigma_0 = 0$, initial conditions (40)

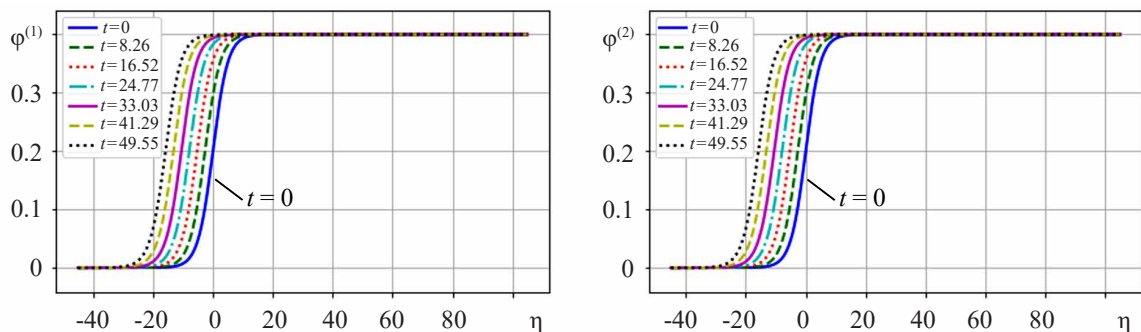


Рис. 3. Влияние конструкционного демпфирования в нормальном направлении $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 6k$, $\sigma_0 = 0$, начальные условия (40)

Fig. 3. Influence of structural damping in the normal direction $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 6k$, $\sigma_0 = 0$, initial conditions (40)

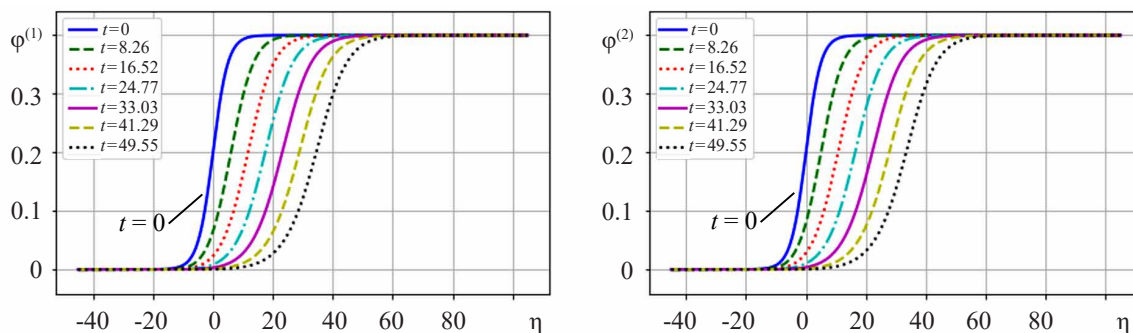


Рис. 4. Влияние окружающей среды в нормальном направлении $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 6k, \sigma_0 = 100k^2$, начальные условия (40)

Fig. 4. Influence of the environment in the normal direction $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 6k, \sigma_0 = 100k^2$, initial conditions (40)

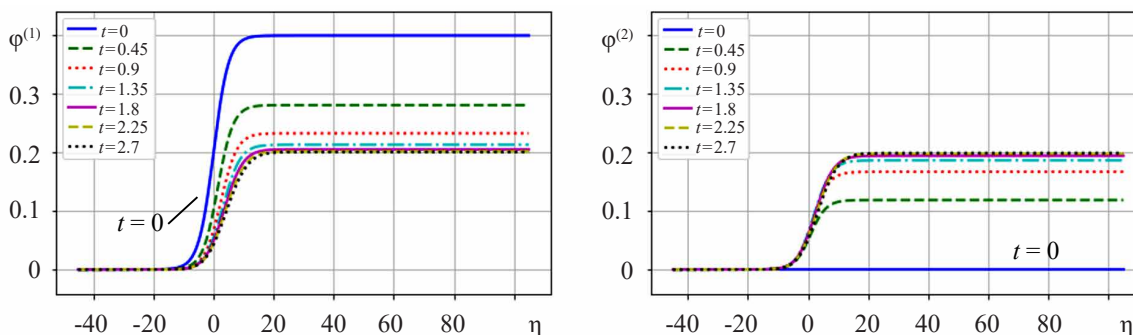


Рис. 5. Влияние окружающей среды в нормальном направлении $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 6k, \sigma_0 = 100k^2$, начальные условия (41)

Fig. 5. Influence of the environment in the normal direction $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 6k, \sigma_0 = 100k^2$, initial conditions (41)

Согласно рис. 6, при наличии возмущения во внешней оболочке и отсутствии возмущения во внутренней оболочке в начальный момент времени, влияние конструкционного демпфирования в продольном направлении (σ_2) привело к падению амплитуды волны во внешней оболочке до нуля. Во внутренней оболочке произошел рост амплитуды волны от нуля до некоторого значения, меньшего амплитуды волны во внешней оболочке на тот же момент времени, затем происходит падение амплитуды волны до нуля.

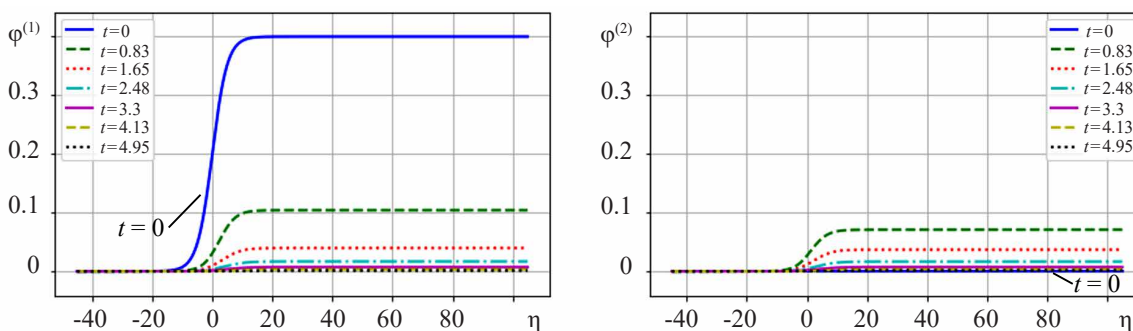


Рис. 6. Влияние конструкционного демпфирования в продольном направлении $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 6k, \sigma_0 = 100k^2$, начальные условия (41)

Fig. 6. Influence of structural damping in the longitudinal direction $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 6k, \sigma_0 = 100k^2$, initial conditions (41)

Заключение

Уединенная волна в упругой оболочке может возникать вследствие действия пьезоэлемента. Вопрос о распространении подобных волн представляет собой предмет данного исследования. Уравнения гидроупругости для двух соосных оболочек с вязкой несжимаемой жидкостью между ними сводятся к системе двух обобщенных модифицированных уравнений Кортвега–де Вриза. Было принято во внимание воздействие конструкционного демпфирования в продольном и нормальном направлениях для обеих упругих оболочек, а также воздействие упругой окружающей среды на внешнюю оболочку. Решение нелинейных уравнений динамики оболочек осуществлялось методом двухмасштабных асимптотических разложений. Это позволило получить нелинейные уравнения.

Решение уравнений механики жидкости с соответствующими граничными условиями проводилось методом асимптотических разложений в ряды по степеням малых параметров задачи. Это разложение приводит к линейным уравнениям гидродинамической теории смазки с учетом локального члена инерции. Последние уравнения решались с помощью итерационного метода с обоснованием его использования.

При отсутствии конструкционного демпфирования и окружающей упругой среды, полученная система разрешающих уравнений имеет точное решение. Это позволило проверить предложенную разностную схему для численного исследования задачи. Численный эксперимент позволил учесть влияние всех факторов рассматриваемой проблемы.

Полученные результаты являются новыми и демонстрируют возможность использования нелинейных волн в оболочках для передачи информации на большие расстояния. Таким образом, полученные результаты демонстрируют необходимость повышения энергии во внешней оболочке с помощью пьезоэлементов для компенсации потерь, вызванных демпфированием конструкции.

Приведенная в статье разностная схема адекватна разрешающей системе уравнений, для которой она строилась.

Конструкционное демпфирование в нормальном направлении структурирует ударную волну и уменьшает скорость волны.

Влияние окружающей среды в нормальном направлении увеличивает скорость волны.

При наличии возмущения во внешней оболочке и отсутствии возмущения во внутренней оболочке в начальный момент времени, с течением времени происходит падение амплитуды волны во внешней оболочке и рост амплитуды волны во внутренней. При наличии жидкости между оболочками происходит перекачка энергии. Амплитуда во внешней оболочке падает, а во внутренней – растет, пока они не выровняются. Влияние конструкционного демпфирования в продольном направлении привело к падению амплитуды волны во внешней оболочке до нуля. Во внутренней оболочке произошел рост амплитуды волны от нуля до некоторого значения, затем происходит падение амплитуды волны до нуля.

Библиографический список

1. *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. ПНД. 1995. Т. 3, № 1. С. 52–58.
2. *Ерофеев В.И., Клюева Н.В.* Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. 2002. Т. 48, № 6. С. 725–740.
3. *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: Новое эволюционное уравнение // РАН. Акустический журнал. 2001. Т. 47, № 3. С. 359–363.

4. *Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I.* The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // *Nonlinear Dyn.* 2019. Vol. 98, no. 1. DOI:10.1007/s11071-019-05181-5
5. *Nariboli G.A.* Nonlinear longitudinal waves in elastic rods // *Journal of Mathematical and Physical Sciences.* 1970. Vol. 4. P. 64–73.
6. *Nariboli G.A., Sedov A.* Burgers's – Korteweg–de Vries equation for viscoelastic rods and plates // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 1970. Vol. 32. P. 661–677.
7. *Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С.* Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* 2014. № 3. С. 17–35
8. *Лекомцев С.В.* Конечно-элементные алгоритмы расчета собственных колебаний трехмерных оболочек // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2012. Т. 5, № 2. С. 233–243.
9. *Бочкарев С.А., Матвеев В.П.* Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2013. Т. 6, № 1. С. 94–102.
10. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. С. 320.
11. *Андрейченко К.П., Могилевич Л.И.* О динамике взаимодействия сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости с упругими стенками // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1982. № 2. С. 162–172.
12. *Блинков Ю.А., Иванов С.В., Могилевич Л.И.* Математическое и компьютерное моделирование нелинейных волн деформаций в оболочке, содержащей вязкую жидкость // *Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика.* 2012. Т. 3. С. 52–60.
13. *Блинков Ю.А., Ковалева И.А., Могилевич Л.И.* Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // *Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика.* 2013. Т. 3. С. 42–51.
14. *Блинков Ю.А., Месянжин А.В., Могилевич Л.И.* Распространение нелинейных волн в соосных физически нелинейных цилиндрических оболочках, заполненных вязкой жидкостью // *Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика.* 2017. Т. 25, № 1. С. 19–35. DOI:10.22363/2312-9735-2017-25-1-19-35.
15. *Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Ребрина А.Ю.* Моделирование волновых процессов в двух соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью и окружённых упругой средой // *Вестник РУДН. Серия МИФ.* 2018. № 3, С. 203–215.
16. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. Изд. 2, испр. М.: Физматлит, 2001. С. 320.
17. *Samarский А.А.* The Theory of Difference Schemes. New York, Marcel Dekker, 2001.
18. *Горохов В.А., Казаков Д.А., Капустин С.А., Чурилов Ю.А.* Алгоритмы численного моделирования процессов деформирования и разрушения конструкций в рамках соотношений механики поврежденной среды // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.* 2016. № 4. С. 86–105. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.06
19. *Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V.* Generation of difference schemes for the burgers equation by constructing Grobner bases // *Programming and Computer Software.* 2006. Vol. 32, no. 2. P. 114–117.
20. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
21. *Овчаров А.А., Брылев И.С.* Математическая модель деформирования нелинейно упругих

подкрепленных конических оболочек при динамическом нагружении // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 3.

URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/viewid=13235>

22. Каудерпер Г. Нелинейная механика. М.: Издательство иностранной литературы, 1961. 778 с. (стр. 77, 727–729).
23. Фельдштейн В.А. Упруго пластические деформации цилиндрической оболочки при продольном ударе // Волны в неупругих средах. Кишинев. 1970. С. 199–204.
24. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. 490 с.
25. Михасев Г.И., Шейко А.Н. О влиянии параметра упругой нелокальности на собственные частоты колебаний углеродной нанотрубки в упругой среде // Труды БГТУ. Минск: БГТУ. 2012. Т. 153. № 6. С. 41–44.

References

1. Zemlyanuhin A.I., Mogilevich L.I. Nonlinear deformation waves in cylindrical shells. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 1995, vol. 3, no. 1, pp. 52–58.
2. Erofeev V.I., Klyueva N.V. Solitons and nonlinear periodic strain waves in rods, plates, and shells (A Review). *Acoustical Physics*, vol. 48, no. 6, 2002, pp. 643–655.
3. Zemlyanuhin A.I., Mogilevich L.I. Nonlinear waves in inhomogeneous cylindrical shells: A new evolution equation. *Acoustical Physics*, vol. 47, no. 3, 2001, pp. 303–307.
4. Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Nonlinear Dyn.*, 2019, vol. 98, no. 1. DOI:10.1007/s11071-019-05181-5
5. Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal waves in elastic rods. *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, 1970, vol. 4. pp. 64–73.
6. Nariboli G.A., Sedov A. Burgers's – Korteweg – de Vries equation for viscoelastic rods and plates. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1970, vol. 32. pp. 661–677.
7. Ageev R.V., Kuznetsova E.L., Kulikov N.I., Mogilevich L.I., Popov V.S. Mathematical model of movement of a pulsing layer of viscous liquid in the channel with an elastic wall. *Perm National Research Polytechnic University. Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 17–35. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.02
8. Lekomcev S.V. Finite-elemental algorithms for calculating the natural oscillations of three-dimensional shells. *Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 233–243.
9. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Stability of coaxial cylindrical shells containing rotating fluid flow. *Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 94–102.
10. Vol'mir A.S. Shells in the flow of liquid and gas: Problems of hydroelasticity. Moscow, Nauka, 1979, p. 320.
11. Andrejchenko K.P., Mogilevich L.I. On the dynamics of interaction between a compressible layer of a viscous incompressible fluid and elastic walls. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of a solid body*, 1982, no 2, pp. 162–172.
12. Blinkov Yu.A., Ivanov S.V., Mogilevich L.I. Mathematical and computer simulation of nonlinear deformation waves in the shell, containing viscous fluid. *Bulletin of RUDN University. Series: Mathematics. Computer science. Physics.* 2012. vol. 3. pp. 52–60.
13. Blinkov Yu.A., Kovaleva I.A., Mogilevich L.I. Modeling dynamics of nonlinear waves in coaxial geometrically and physically nonlinear shells containing a viscous incompressible fluid between them. *Bulletin of RUDN University. Series: Mathematics. Computer science. Physics.*, 2013, vol. 3, pp. 42–51.

14. Blinkov Yu.A., Mesyanzhin A.V., Mogilevich L.I. Spread nonlinear waves in coaxial physically nonlinear cylindrical shells filled with viscous liquid. *Bulletin of RUDN University. Series: Mathematics. Computer science. Physics.* 2017. vol. 25, no. 1, pp. 19–35. DOI:10.22363/2312-9735-2017-25-1-19-35.
15. Blinkov Yu.A., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I., Rebrina A.Yu. Modeling wave processes in two coaxial shells, filled with a viscous fluid and surrounded by an elastic medium. *Bulletin of RUDN University. Series: Mathematics. Computer science. Physics.* 2018. no. 3, pp. 203–215.
16. Samarskij A.A., Mihajlov A.P. *Mathematical Modeling: Ideas. Methods Examples.* 2 ed. Moscow, Fizmatlit, 2001.
17. Samarskij A.A. *The Theory of Difference Schemes.* New York, Marcel Dekker, 2001.
18. Gorokhov V.A., Kazakov D.A., Kapustin S.A., Churilov Yu.A. Algorithms for numerical simulation of structures deformation and fracture within relations of damaged medium mechanics. *Perm National Research Polytechnic University Mechanics Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 86–105. DOI:10.15593/perm.mech/2016.4.06
19. Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V. Generation of difference schemes for the Burgers equation by constructing Grobner bases. *Programming and Computer Software*, 2006, vol. 32, no. 2, pp. 114–117.
20. И'юшин А.А. *Continuum Mechanics.* Moscow, Izd-vo MGU, 1990.
21. Ovcharov A.A., Brylev I.S. Mathematical model of non-linearly deformed elastic reinforced conical shells under dynamic loading. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 2014, no. 3, URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/viewid=13235>
22. Kauderer H. *Nichtlineare Mechanik.* Berlin, Springer-verlag, 1958, 777 p.
23. Fel'dshtejn V.A. Elastic plastic deformations of a cylindrical shell with a longitudinal impact. *Volny v Neuprugih Sredah. Kishinev*, 1970, pp. 199–204.
24. Vlasov B.Z., Leontiev N.N. *Beams, Plates and Shells on an Elastic Base.* Moscow, State. ed. Phys.-Math. literature, 1960, 490 p.
25. Mikhasev G.I., Sheiko A.N.. On the effect of the elastic nonlocality parameter on the natural frequencies of a carbon nanotube in an elastic medium. *Transactions of Belarusian State Technological University. Minsk: Belarusian State Technological University*, 2012, vol. 153, no. 6, pp. 41–44.



Могилевич Лев Ильич – родился в Саратове (1946). Окончил с отличием механико-математический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Механика» (1969) и аспирантуру по кафедре Теоретической механики и аэрогидродинамики по специальности 01.02.05 (1972). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук на тему «Некоторые задачи теории коротких волн» по специальностям «Механика жидкости газа и плазмы» (1972, СГУ). Защитил диссертацию на соискание учёной степени доктора технических наук на специальную тему по специальности 05.11.03 «Приборы навигации» (1989, Киевский политехнический институт). С 2015 года работает на кафедре «Прикладная математика и системный анализ» Саратовского государственного технического университета в должности профессора. Научные интересы – нелинейные колебания и волны в механике сплошных сред, асимптотические методы решения нелинейных задач. Опубликовал свыше 300 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
 E-mail: mogilevichli@gmail.com



Блинков Юрий Анатольевич – родился в Волгоградской области (1965). Окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Механика» (1987). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук на тему «Инволютивные алгоритмы для исследования нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений» по специальности 05.13.16 «Применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях» (1995, ОИЯИ). Защитил диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук на тему «Инволютивные методы исследования моделей, описываемых системами алгебраических и дифференциальных уравнений» по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (2009, РУДН). С 2010 года заведующий кафедрой «Математического и компьютерного моделирования» Саратовского государственного университета. Научные интересы – компьютерная алгебра, дифференциальные уравнения в частных производных, генерация разностных схем, динамика жидкости и газа. Опубликовал свыше 80 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: blinkovua@gmail.com



Иванов Сергей Викторович – родился в Саратове (1976). Окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Прикладная математика» (1998). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук на тему «Математическое моделирование и методы анализа нелинейных волн в упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость» по специальностям 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела» (2013, СГТУ). С 2015 года работает на кафедре «Математического и компьютерного моделирования» Саратовского государственного университета в должности доцента. Научные интересы – уединенные волны в упругих оболочках, математическое моделирование. Опубликовал свыше 20 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: evilgraywolf@gmail.com