П. Н. Вабищевич, О численном решении нелокальных эллиптических задач, *Изв. вузов. Матем.*, 1983, номер 5, 13–19

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1983 МАТЕМАТИКА № 5 (252)

П. Н. Вабищевич

УДК 519.632

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В работе [1] впервые рассмотрен новый класс краевых задач для эллиптических уравнений, в которых задано нелокальное краевое условие. Более подробно и для других типов эллиптических операторов эти задачи изучались позднее в работе [2]. Некоторые результаты для нелокальных задач в цилиндрических областях можно найти в [3]. К последним задачам приводит метод приближенного решения задачи Коши для эллиптических уравнений, предложенный в [4].

Приближенному решению нелокальных эллиптических задач, подобных тем, что рассматривались в [1], посвящена работа [5]. Здесь изучаются различные методы приближенного решения нелокальных эллиптических задач. Рассматриваются прямые разностные методы, а также итерационный процесс последовательных приближений.

§ 1. Нелокальные эллиптические задачи

Рассмотрим постановку простейшей нелокальной эллиптической задачи. Пусть в n-мерной ограниченной области D функция $u(x)$, $x=(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u = -f(x), \quad x \in D, \tag{1}$$

где $c(x) \leqslant 0$. Предположим, что граница ∂D области D состоит из двух частей: $\Gamma^+ + \Gamma^- = \partial D$ и между точками x контура $\gamma \subset D$, лежащего внутри D, и точками y части границы Γ^- установлено взаимно однозначное соответствие, т. е. если $x = x(t)$, $t \in T$, — параметрическое уравнение кривой Γ^-, то γ — диффеоморфный образ $y = Rx$ кривой Γ^-, лежащий в области D с параметрическим уравнением $y = y(t)$, $t \in T$. На части границы Γ^+ заданы краевые условия первого или третьего рода, т. е.

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma^+, \tag{2}$$

или в случае третьей краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \sigma(x) u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma^+. \tag{3}$$

Условия (2), (3) запишем в виде

$$Bu(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma^+. \tag{4}$$

Кроме того, ставится простейшее нелокальное условие

$$u(x) + \alpha(y) u(y) = \psi(x), \quad x \in \gamma, \ y \in \Gamma^-. \tag{5}$$

Задача (1), (4), (5) и будет рассматриваться в дальнейшем. В работе [1] $\alpha(y) = -1$, а в [5] изучаются вопросы численного решения такой задачи. Здесь мы ограничимся другим интересным случаем, когда $\alpha(y) > 0$.

§ 2. Регуляризация некорректных задач продолжения решений эллиптических уравнений

Рассмотрим некорректную задачу продолжения решения эллиптического уравнения (1). Пусть в области D^+ с границей $\partial D^+ = \Gamma^+ + \gamma$ функция $u(x)$ является решением задачи для уравнения (1) с краевыми условиями (4) на Γ^+ и условиями первого рода на γ

$$u(x) = \psi(x), \quad x \in \gamma. \tag{6}$$

Ставится задача продолжения решения задачи (1), (4), (6) в область D^- $(D = D^+ + D^-)$, прилегающую к D^+. Эта задача некорректна в классическом смысле [6]. Некоторые вопросы численного решения этой задачи рассмотрены в [7].

Для приближенного решения (1), (4), (6) в D проведем частичный снос краевого условия (6) с контура γ на Γ^-. Придем к нелокальному условию типа (5), где $\alpha = \text{const} > 0$ — достаточно малое число, которое выступает в качестве параметра регуляризации.

В задаче Коши для эллиптического уравнения (1) ставятся два краевых условия: на Γ^+ задано значение функции $u(x)$ и ее нормальная производная

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \varphi(x), \quad u(x) = \psi(x), \quad x \in \Gamma^+. \tag{7}$$

Необходимо найти приближенное решение задачи (1), (7) в области D. Эта задача является частным случаем рассмотренной выше задачи (1), (3), (6) при γ, совпадающем с Γ^+. Таким образом, приходим к задаче с нелокальным условием

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \varphi(x), \quad u(x) + \alpha u(y) = \psi(x), \quad x \in \Gamma^+, \quad y \in \Gamma^-. \tag{8}$$

Нелокальная задача (1), (8) дает приближенное решение некорректной задачи (1), (7) при согласовании параметра α с погрешностью входных данных.

Метод частичного сноса начального условия при $t = 0$ на момент времени $t = T$ при приближенном решении некорректных задач Коши для эволюционных уравнений первого и второго порядка на отрезке $t \in (0, T)$ рассматривается в работе [4]. В этом случае легко устанавливается оценка, обеспечивающая устойчивость решения задачи с нелокальными условиями по начальным данным. Заметим также, что вместо (8) можно предложить снос значения нормальной производной, в более общем случае сносятся как значения решения на границе, так и нормальной производной. Более подробно теоретические вопросы, связанные с обоснованием приближенных методов решения некорректных задач, рассматриваются в цитированной литературе.

Выбор параметра регуляризации α является существенным моментом в теории регуляризации [6]. При условии, что $\varphi(x)$ задана точно, а $\psi(x)$ известна с погрешностью δ, т. е. выполнено $\|u(x) - \psi(x)\|_{L_2(\gamma)} \leqslant \delta$ (погрешностью в задании $\varphi(x)$ пренебрегаем), параметр α можно выбрать согласно принципу невязки:

$$\|u^\alpha(x) - \psi(x)\|_{L_2(\gamma)} = \int\limits_T [u^\alpha(x(t)) - \psi(x(t))]^2 x'(t)\, dt = \delta^2.$$

С учетом (5) получим

$$\alpha^2 = \delta^2 \Big/ \int\limits_T [u^\alpha(y(t))]^2 x'(t)\, dt,$$

где $x = x(t)$ — параметрическое уравнение контура γ и $y = y(t)$ — контура Γ^-. Заметим также, что если используются приближенные методы с заменой оператора L на L_h, то необходимо при выборе α учесть и погрешность аппроксимации, используя, напр., принцип обобщенной невязки [8], [9]. Обратимся теперь к методам решения нелокальных эллиптических задач, которые поставлены выше.

§ 3. Одномерная нелокальная задача

На отрезке $[0, l]$ рассмотрим задачу

$$\frac{d}{dx} k(x) \frac{du}{dx} - g(x) u = -f(x), \quad x \in (0, l), \tag{9}$$

$$u(\eta) + \alpha u(l) = \mu, \quad \eta \in (0, l), \tag{10}$$

где $g(x) \geqslant 0$ и выбрано нелокальное условие вида (10) со связью граничной точки $x = l$ и некоторой внутренней $x = \eta$. На левом конце, при $x = 0$, ставится условие третьего рода

$$k(du/dx) - \sigma u = -\varkappa, \quad x = 0. \tag{11}$$

Остановимся на разностном решении нелокальной задачи (9) — (11). Аппроксимируем уравнение (9) и краевое условие (11) на равномерной сетке $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $x_0 = 0$, $x_N = l$. Через $y_i = u(x_i)$ обозначим разностное решение задачи. Тогда придем к трехточечной системе уравнений вида

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{12}$$

$$b_0 y_1 - c_0 y_0 = -f_0. \tag{13}$$

Предположим, что точка η лежит между узлами k и $k+1$. Приближенное значение $u(\eta)$ определим линейной интерполяцией по значениям $u(x_k)$ и $u(x_{k+1})$, т. е. $u(\eta) = u(x_k) + (1/h)(\eta - x_k)(u(x_{k+1}) - u(x_k))$. Учитывая это соотношение, из нелокального условия (11) получим

$$\alpha y_N + y_k + (1/h)(\eta - x_k)(y_{k+1} - y_k) = \mu. \tag{14}$$

Для решения системы уравнений (12) — (14) используем метод прогонки [10]. Будем искать решение y_i в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{15}$$

Коэффициенты α_i, β_i определяются из подстановки представления (15) в (12), (13), что дает формулы правой прогонки

$$\begin{gathered} \alpha_{i+1} = b_i/(c_i - \alpha_i a_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \alpha_1 = b_0/c_0, \\ \beta_{i+1} = (f_i + \alpha_i \beta_i)/(c_i - \alpha_i a_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \beta_1 = f_0/c_0. \end{gathered} \tag{16}$$

Далее необходимо определить y_N. Чтобы воспользоваться связью (14), выразим y_k и y_{k+1} через y_N. Пусть

$$y_j = \rho_j y_N + \gamma_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{17}$$

С учетом (15) соотношение (17) приводит к рекуррентным формулам для определения ρ_j, γ_j:

$$\begin{gathered} \rho_j = \alpha_{j+1} \rho_{j+1}, \quad \rho_N = 1, \\ \gamma_j = \alpha_{j+1} \gamma_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad \gamma_N = 0, \quad j = N-1, N-2, \ldots, k, \end{gathered} \tag{18}$$

где α_i, β_i определяются в (16). Подстановка выражений (17) в нелокальное условие (14) дает выражение для y_N:

$$y_N = \frac{\mu - \gamma_k - h^{-1}(\eta - x_k)(\gamma_{k+1} - \gamma_k)}{\alpha + \rho_k + h^{-1}(\eta - x_k)(\rho_{k+1} - \rho_k)}. \tag{19}$$

После нахождения y_N по (16) — (19) совершается обратная прогонка (15) для нахождения разностного решения нелокальной задачи (9) — (11). Устойчивость прогонки определяется коэффициентами a_i, b_i, c_i и при $\alpha > 0$ очевидна. Аналогичный алгоритм использовался в работе [11] для решения нелокальной одномерной параболической задачи.

§ 4. Прямые методы решения нелокальных эллиптических задач

Наиболее быстрыми для численного решения сеточных эллиптических уравнений определенного класса являются прямые методы разделения переменных и циклической редукции [10]. Остановимся на возможности их применения при решении некоторых нелокальных задач. Рассмотрим для простоты задачу в прямоугольнике (случай трех пространственных переменных рассматривается аналогично): $G = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$ для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f(x, y),\ (x, y) \in G \tag{20}$$

с однородными краевыми условиями при $y = 0$ и $y = b$. Пусть, напр.,

$$u(x, 0) = 0,\ u(x, b) = 0. \tag{21}$$

При $x = 0$ ставится условие третьего рода

$$\partial u/\partial x - \sigma u = -\varkappa(y),\ x = 0. \tag{22}$$

К (20) — (22) добавляются нелокальные условия

$$u(l, y) + \alpha u(a, y) = \mu(y),\ l \in (0, a), \tag{23}$$

где $\alpha = \mathrm{const}$. Задача (20) — (23) и ей подобные могут быть успешно решены с использованием дискретного преобразования Фурье. Обозначим через h_x и h_y шаги равномерной сетки по x и y:

$$x_i = ih_x,\ i = 0, 1, \ldots, M,\ x_M = a;\quad y_j = jh_y,\ j = 0, 1, \ldots, N,\ y_N = b,$$

а через u_{ij}—соответствующее сеточное решение задачи (20) — (23). Разложим u_{ij} по собственным функциям разностного оператора второй производной по y с краевыми условиями первого рода. Имеем

$$u_{ij} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k-1}^{N-1} v_{ik} \sin \frac{k\pi j}{N}. \tag{24}$$

Аппроксимируя (20) на обычном пятиточечном шаблоне и подставляя разложение (24), получим для Фурье-образов v_{ik} следующую систему уравнений:

$$(1/h_x^2)(v_{i+1,k} - 2v_{ik} + v_{i-1,k}) + \lambda_k v_{ik} = -\Phi_{ik}, \tag{25}$$

где Φ_{ik} суть Фурье-образы правой части уравнения (20), а собственные значения λ_k определяются выражением $\lambda_k = (4/h_y^2)\sin^2(k\pi/2N)$. Систему уравнений (25) дополним соотношением, которое вытекает из (22), (23). Например, с порядком $O(h_x)$

$$(1/h_x)(v_{1k} - v_{0k}) - \sigma v_{0k} = -\bar{\varkappa}_k. \tag{26}$$

Аналогично одномерной задаче, рассмотренной выше, предположим, что точка $x = l$ лежит между узлами x_s и x_{s+1}, и из (23) получим

$$\alpha v_{Mk} + v_{sk} + (1/h_x)(l - x_s)(v_{s+1,k} - v_{sk}) = \bar{\mu}_k. \tag{27}$$

Систему уравнений (25) — (27) при каждом постоянном значении $k = 1, 2, \ldots, N-1$ можно решить прогонкой, алгоритм которой изложен при рассмотрении одномерной задачи. Затем совершаем обратное преобразование Фурье.

Отметим, что применение прямых методов ограничено эллиптическими задачами внутри прямоугольной области (внутри n-мерного параллелепипеда) с постоянным коэффициентом α, характеризующим снос, для уравнений с разделяющимися переменными. Для задач в нерегулярных областях и $\alpha = \mathrm{const}$ можно применить метод матричной прогонки [10], без какой-либо существенной его переработки. Ввиду того, что метод матричной прогонки редко используется в вычислительной практике и его идейная сторона полностью аналогична одномерной задаче, мы не будем останавливаться на подробном описании его применения при решении нелокальных задач.

§ 5. Эквивалентное интегральное уравнение

При приближенном решении нелокальных задач может оказаться удобным использование эквивалентного интегрального уравнения, для решения которого можно применить хорошо развитые численные методы (см., напр., [12]). Возвратимся снова к задаче (1), (4), (5). Обозначим через $G(x, y)$ функцию Грина, существование которой и ее свойства описаны, напр., в [13] для уравнения (1) с краевыми условиями (4) и условиями первого рода на Γ^-. Тогда решение $u(x)$ во всей области D может быть представлено в виде

$$u(x)=\int\limits_D G(x, y) f(y)\,dy+\int\limits_{\Gamma^+} B'_y G(x, y)\,\varphi(y)\,dy+\int\limits_{\Gamma^-}\frac{\partial}{\partial\nu_y} G(x, y)\,u(y)\,dy.$$

С учетом нелокального условия (5) приходим к интегральному уравнению

$$\int\limits_T \frac{\partial}{\partial\nu_y} G(x, y)\,\theta(t)\,y'(t)\,dt+\beta(t)\,\theta(t)=-F(x), \tag{28}$$

где

$$\theta(t)=u(y),\ y\in\Gamma^-,\ y=y(t),\ t\in T,\ \alpha(y)=\beta(t),$$

$$F(x)=\int\limits_D G(x, y) f(y)\,dy+\int\limits_{\Gamma+} B'_y G(x, y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Если $\alpha(y)=\beta(t)$ — знакопостоянная функция, то интегральное уравнение (28) является уравнением Фредгольма второго рода. Отметим, что интегральное уравнение (28) возникает при использовании метода М. М. Лаврентьева [12] для регуляризации интегрального уравнения первого рода, возникающего при продолжении решения эллиптической задачи (1), (4), (6). Интегральное уравнение (28) можно использовать для численного решения задач достаточно узкого класса при условии, что функция Грина $G(x, y)$ в области D известна.

§ 6. Итерационный процесс последовательных приближений

Более широкую область применимости может иметь итерационный процесс последовательных приближений, на каждом шаге которого нужно решать обычную краевую задачу (1), (4) с условием Дирихле на Γ^-. Он может быть описан следующим образом. По известному s-му приближению $\overset{s}{u}(x)$ задачи (1), (4), (5) следующее $(s+1)$-е приближение находится из уравнений:

$$L\overset{s+1}{u}=-f(x),\ x\in D, \tag{29}$$

$$B\overset{s+1}{u}(x)=\varphi(x),\ x\in\Gamma^+, \tag{30}$$

$$\overset{s+1}{u}(y)=\sigma\overset{s+1}{v}(y)+(1-\sigma)\overset{s}{u}(y),\ y\in\Gamma^-, \tag{31}$$

где $\overset{s+1}{v}(y)=[1/\alpha(y)](-\overset{s}{u}(x)+\psi(x)),\ x\in\gamma,\ y\in\Gamma^-$. Здесь вес $0<\sigma\leqslant 1$ выбирается достаточно малым $(\sigma\sim\alpha)$. Сходимость итерационного процесса (29) — (31) установим в прямоугольнике G для случая простейшей задачи, которая рассматривалась в § 4, напр., с условиями первого рода при $x=0$. Тогда для разности $\overset{s+1}{\omega}(x, y)=\overset{s+1}{u}(x, y)-\overset{s}{u}(x, y)$ получим задачу

$$\Delta\overset{s+1}{\omega}=0,\ (x, y)\in G, \tag{32}$$

$$\overset{s+1}{\omega}(x, 0)=0,\ \overset{s+1}{\omega}(x, b)=0, \tag{33}$$

$$\overset{s+1}{\omega}(0, y)=0, \tag{34}$$

$$\overset{s+1}{\omega}(a, y) = -\frac{\sigma}{\alpha}\overset{s}{\omega}(l, y) + (1-\sigma)\overset{s}{\omega}(a, y). \tag{35}$$

Будем искать решение задачи (32) — (35) методом Фурье. Имеем

$$\overset{s+1}{\omega}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{b}}\sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{\pi i}{b}y\,\overset{s+1}{d_i}(x), \lambda_i = \left(\frac{\pi i}{b}\right)^2, \; i = 1, 2, \ldots \tag{36}$$

Коэффициенты $\overset{s+1}{d_i}(x)$ определяются подстановкой (36) в (32) — (34):

$$\overset{s+1}{d_i}(x) = \overset{s+1}{e_i}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_i}x.$$

С учетом нелокального условия (35) получим

$$\overset{s+1}{e_i} = \overset{s}{e_i}\left\{(1-\sigma) - \frac{\sigma}{\alpha}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_i}l/\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_i}a\right\}.$$

Итерации будут сходиться, если

$$|\rho(\sigma)| = \left|(1-\sigma) - \frac{\alpha}{\alpha}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_i}l/\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_i}a\right| \leqslant 1. \tag{37}$$

Условия (37) будут выполнены при $\sigma \leqslant 2/(1 + (1/\alpha)\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_i}l/\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_i}a)$, где $\alpha > 0$. Последнее соотношение дает оценку для σ

$$\sigma \leqslant \sigma_0 = 2\Big/\left(1 + \frac{1}{\alpha}\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}l/\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}a\right). \tag{38}$$

Более грубая оценка, чем (38), $\sigma \leqslant 2\alpha/(1+\alpha)$. Итерационный процесс последовательных приближений со взвешиванием (29) — (31) сходится, как мы видим, при $\sigma \sim \alpha$. Если α мало, а именно такая ситуация возникает при приближенном решении некорректных задач (§ 2), то приходится выбирать очень малое σ, что ведет к увеличению общего числа итераций в (29) — (31), т. е. к увеличению вычислительных затрат по решению нелокальной задачи. В [5] использовался аналогичный итерационный процесс с $\sigma = 1$. Этот итерационный процесс прошел апробацию при численном решении некоторых модельных задач нелокального типа и показал свою высокую эффективность, но он, несомненно, значительно уступает прямым методам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач.— ДАН СССР, 1969, т. 185, № 4, с. 739—740.

2. Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем.— Сиб. матем. журн., 1972, т. XIII, № 1, с. 165—181.

3. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач.— М., 1980.— 208 с.

4. Абдулкеримов Л. Ш. Регуляризация некорректной задачи Коши для эволюционных уравнений в банаховом пространстве.— Учен. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-матем. н., 1977, № 1, с. 32—36.

5. Гордезиани Д. Г., Джиоев Т. З. О разрешимости одной краевой задачи для нелинейных уравнений эллиптического типа.— Сообщ. АН ГрузССР, 1972, т. 68, № 2, с. 289—292.

6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М., 1974.— 224 с.

7. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения.— М., 1970.— 336 с.

8. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения.— М., 1978.— 206 с.

9. Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики.— М., 1978.— 335 с.

10. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.—М., 1978.— 590 с.

11. Ионкин Н. И. О нахождении численного решения одной неклассической задачи.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., 1979, № 1, с. 64—68.

12. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ.— Киев, 1978.— 291 с.

13. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа.— М., 1957.— 256 с.

г. Москва

Поступила 05. 11. 1981

Л. Д. Потягайло. К оценке аппроксимации корня одного класса уравнений

(аннотация статьи, депонированной в ВИНИТИ № 2117—82 Деп.)

В работе рассматривается уравнение вида

$$f(z)=0, \tag{1}$$

где $w=f(z)$ $(z=x+iy)$—аналитическая функция, принимающая при $z=x$ действительные значения. Пусть ξ—действительный корень уравнения (1), а x_0—некоторое его начальное приближение. Запишем

$$w=f(z)=c_0+c_1(z-x_0)+c_2(z-x_0)^2+\ldots,\quad c_1\neq 0. \tag{2}$$

Обозначим через $z=F(w)$ функцию, обратную к $f(z)$. При $w=0$ получим для корня ξ:

$$\xi=x_0+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{F^{(k)}(c_0)}{k!}c_0^k. \tag{3}$$

В работе доказывается, что при выполнении условий: $c_1<0$, $c_2>0$, $(-1)^n c_n>0$, $n=2,3,\ldots$, и определенным образом выбранном x_0, ряд (3) будет рядом лейбницевского типа. Это дает возможность получить простую оценку разности $|\xi-\xi'|$, где

$$\xi'=x_0+\sum_{k-1}^{n}(-1)^k\frac{F^{(k)}(c_0)}{k!}c_0^k.$$

(Работа поступила в журнал „Математика“ 10.04.1981.)

Б. П. Чебышева. Об инвариантном оснащении полуриманова многообразия с голономным изотропным распределением

(аннотация статьи, депонированной в ВИНИТИ № 4158—82 Деп.)

В работе находятся условия, при выполнении которых на полуримановом многообразии (M, g) с заданным на нем полем вырожденного симметричного тензора g_{ij}, постоянного ранга $r<n=\dim M$ можно построить определенное внутренним образом оснащающее распределение Δ^*, дополнительное к Δ, а также внутренним образом определенную аффинную связность с кручением, относительно которой распределения Δ и Δ^* будут параллельными. При этих построениях предполагается, что изотропное распределение Δ является инволютивным. Устанавливается условие полной приводимости полуриманова многообразия. (Работа поступила в журнал „Математика“ 21.05.1981.)

В. А. Тадеев. Центральная аксонометрия в пространстве Лобачевского (на модели Бельтрами—Клейна)

(аннотация статьи, депонированной в ВИНИТИ № 4504—82 Деп.)

В работе строится метод центрально-аксонометрического отображения трехмерного пространства Лобачевского, рассматриваемого на модели Бельтрами—Клейна. Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы плоская конфигурация, состоящая из окружности и двух остроугольных треугольников, представляла соответственно е. треугольник следов, е. треугольник схода прямых, е. параллельных координатным осям, и абсолютный контур аксонометрической плоскости при некоторой центральной аксонометрии.

Приведены примеры решения основных задач на параллельность и основных метрических задач в пространстве Лобачевского. (Работа поступила в журнал „Математика“ 28.10.1981.)