Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. П. Одинец, О единственности минимальных проекций, *Изв. вузов. Матем.*, 1978, номер 2, 73–75

https://www.mathnet.ru/ivm5726

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
7 декабря 2025 г., 13:33:42

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1978 МАТЕМАТИКА № 2 (189)

УДК 513.88

В. П. Одинец

О ЕДИНСТВЕННОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

В работе [1] была доказана единственность минимальной проекции с неединичной нормой на равномерно выпуклое коразмерности 1 подпространство банахова пространства произвольной (конечной или бесконечной) размерности. Осталось невыясненным: существенна ли всегда равномерная выпуклость подпространства (при выполнении, разумеется, прочих условий). В настоящей заметке будет доказана единственность минимальной проекции с неединичной нормой произвольного трехмерного банахова пространства на его двумерное подпространство, а также будут даны приложения этого результата. Обозначения и основные определения в работе следуют [1].

Банахово пространство над полем R вещественных чисел обозначим через B, а его дополняемое подпространство — через D. (Если не оговорено специально, $\dim B=3$, $\dim D=2$). Пусть p — величина нормы минимальной проекции из B на D (подпространство будем называть тогда p-правильным). Множество всех минимальных проекций из B на D обозначим через $\mathfrak{A}^p(B, D)$. Если множество $\mathfrak{A}^p(B, D)$ состоит лишь из одного элемента, то будем говорить, что пара (B, D) обладает свойством (γ_p) единственности. Пусть $S=\{x\in B: \|x\|=1\}$, $S_{B^*}=\{y\in B^*:\|y\|=1\}$, $U(\theta, p)=\{x\in B:\|x\|\leqslant p\}$, где θ—нулевой элемент в B. Для элемента $x\in B\setminus[\theta]$ пусть $A(x)=\{f\in S_{B^*}: f(x)=\|x\|\}$. Если $P\in\mathfrak{A}^p(B, D)$, то пусть $\operatorname{crit}P=\{z\in S:\|P(z)\|=p\}$.

Лемма 1. *Пусть D есть p-правильное ($p>1$) подпространство пространства B и $P\in\mathfrak{A}^p(B, D)$. Тогда множество $P(\operatorname{crit}P)$ содержит не менее 6 точек.*

Доказательство. Предположим противное. В силу компактности единичного шара в B ($\dim B=3$), очевидно, $P(\operatorname{crit}P)\neq\varnothing$.

1) Пусть лишь x, $(-x)\in P(\operatorname{crit}P)$. Возьмем точку $z\in P^{-1}(x)\cap S$. Легко видеть, что проекция $P_1:B\to D$, аннулирующаяся на прямой, параллельной отрезку с концами z и $(x-tx)$, где t достаточно малое положительное число, будет иметь норму $\|P_1\|<p$, т. е. получим противоречие.

2) Пусть $P(\operatorname{crit}P)$ содержит лишь точки x, y, $-x$, $-y$. Возьмем в S точки $z_1\in P^{-1}(x)$, $z_2\in P^{-1}(y)$. Очевидно, что из 4-х точек: z_1, z_2, $(-z_1)$, $(-z_2)$, какие-то две (либо z_1, z_2, либо z_1, $(-z_2)$) находятся с одной стороны от подпространства D. Без нарушения общности пусть это будут z_1 и z_2. Тогда, как нетрудно показать, проекция $P_1:B\to D$, аннулирующаяся на прямой, параллельной отрезку с концами z_1 и $x-t(x+y)$, где t достаточно малое положительное число, будет иметь норму $\|P_1\|<p$, т. е. получим противоречие.

Элементарными рассуждениями проверяется следующая

Лемма 2. *Пусть μ — граница центрально-симметричной плоской выпуклой ограниченной фигуры F и M_1, M_2, M_3 — точки на μ,*

такие, что: а) *они лежат по одну сторону от некоторого диаметра фигуры* F; б) *точка* M_2 *находится внутри наименьшей дуги в* μ, *соединяющей точки* M_1 *и* M_3; в) *не существует параллельных (или совпадающих) прямолинейных отрезков, содержащихся в* μ *и содержащих одновременно точки* M_1 *и* M_3. *Тогда для любого направления (в плоскости фигуры* F*) и произвольных сдвигов точек* M_1 *и* M_3 *в этом направлении, а точки* M_2 *в противоположном,—хоть одна из трех сдвинутых точек выйдет за пределы фигуры* F.

Теорема 1. *Пусть* D *есть* p*-правильное* ($p > 1$) *подпространство пространства* B ($\dim B = 3$). *Тогда минимальная проекция из* B *на* D *единственна.*

Доказательство. Пусть $P \in \mathfrak{A}^p(B, D)$. В силу леммы 1 множество $P(\operatorname{crit} P)$ содержит не менее 6 точек. Подпространство D разделяет пространство B на два полупространства. Будем помечать все точки в $P(\operatorname{crit} P)$ либо индексом (+), либо (—), в зависимости от того, является ли точка образом точки (или точек) из одного полупространства или из другого. В силу того, что $\|P\| > 1$, каждая точка в $P(\operatorname{crit} P)$ может получить лишь один индекс.

Допустим, что существует некоторый диаметр K шара $U(\theta, p) \cap D$, такой, что точки с индексом (+) расположены по одну его сторону. Аналогично доказательству п. 2) леммы 1 (взяв в качестве x и y концы наименьшей дуги, содержащейся в границе шара $U(\theta, p) \cap D$, и содержащей все точки с индексом (+)), можно показать, что проекция P не минимальная, вопреки условию.

Допустим теперь, что существует диаметр K шара $U(\theta, p) \cap D$ и точки z_1^+, z_2^-, $z_3^+ \in P(\operatorname{crit} P)$, лежащие по одну его сторону, такие, что z_2^- находится внутри наименьшей дуги границы μ шара $U(\theta, p) \cap D$, соединяющей точки $z_1^{(+)}$ и $z_3^{(+)}$. Заметим, что точки $z_1^{(+)}$ и $z_3^{(+)}$ не могут принадлежать двум параллельным отрезкам, возможно содержащимся в границе μ (и тем более принадлежать одному прямолинейному отрезку границы μ). Действительно, предположим противное. Тогда, очевидно, точка $(-z_1)$ имеет индекс (—), и, кроме того, существует прямолинейный отрезок границы μ, содержащий точки $(z_1^{(-)})$, $z_3^{(+)}$ (соответственно, $z_1^{(+)}$, $z_3^{(-)}$). Последнее, как нетрудно показать, влечет равенство $\|P\| = 1$, вопреки условию теоремы. Таким образом, три точки $z_1^{(+)}$, $z_2^{(-)}$ и $z_3^{(+)}$ удовлетворяют условиям леммы 2. Если бы проекция P была бы не единственная с нормой, равной p, то легко видеть, что существовало бы направление (в подпространстве D) такое, что сдвиги точек $z_1^{(+)}$ и $z_3^{(+)}$ в этом направлении, а точки $z_2^{(-)}$ в противоположном, не выводили бы эти точки за пределы шара $U(\theta, p) \cap D$, вопреки лемме 2.

Следствие 1. *Пусть* P — *минимальная проекция пространства* B ($\dim B = 3$), *на* D, *и* $\|P\| > 1$. *Тогда множество* $M = \bigcup_{y \in P(\operatorname{crit} P)} (A(y) \mid D)$ *тотально на* D.

Доказательство. Достаточно рассмотреть множество $M_1 \subset M$, где $M_1 = (A(z_1^{(+)}) \mid D) \cup (A(z_3^{(+)}) \mid D)$, а $z_1^{(+)}$ и $z_3^{(+)}$ определены в ходе доказательства теоремы 1, и учесть, что $z_1^{(+)}$ и $z_3^{(+)}$ не могут принадлежать одной опорной гиперплоскости к шару $U(\theta, p) \cap D$.

Замечание. а) Следствие 1 можно было получить, не опираясь на доказательство теоремы 1, а используя теорему 5 из [2]. б) Автору неизвестно, будет ли единственна минимальная проекция

произвольного n-мерного банахова пространства на его p-правильное ($p > 1$) не строго выпуклое коразмерности 1 подпространство. Отметим лишь, что можно показать, что проекция пространства $c^{(n)}$ ($n \geqslant 3$) на подпространство $D = [e_2 + e_1;\ e_2 + e_3; \ldots;\ e_2 + e_n]$ единственна, где $\{e_i\}$ — канонический базис в $c^{(n)}$.

Следствие 2. *Пусть* $B = H \underset{l_p}{\oplus} X$[1] ($4 \leqslant \dim B \leqslant \infty$), *где* X — *произвольное банахово пространство,* H — *трехмерное содержащее* p_1-*правильное* ($p_1 > 1$) *подпространство* D ($1 < p \leqslant \infty$). *Тогда существует единственная минимальная проекция пространства* B *на* D.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 2 [1], теоремы 1, следствия 1 данной работы и примеров 1.1 и 4.1 [3].

Пример 1. Пусть $B = c_0$, а D — двумерное подпространство, единичный шар которого имеет 6 одномерных граней, и такое, что существуют натуральные числа i, j, k ($i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq i$), и $D \subset [e_i, e_j, e_k]$. Тогда пара ($c_0$, D) обладает свойством (γ_p), где $p > 1$. Доказательство вытекает из следствия 2 и результата В. И. Гурария (см., напр., предложение 3.1 [4]).

Пример 2. Пусть B — гладкое ($4 \leqslant \dim B \leqslant \infty$) банахово пространство, а D — его трехмерное 1-правильное подпространство. Пусть X — произвольное двумерное подпространство в D. Тогда пара (B, X) обладает свойством (γ_p), где $p \geqslant 1$. Доказательство вытекает из следствия 2.2 [4], когда X есть 1-правильное подпространство в D, и из теоремы 3.1 [1], теоремы 1 и следствия 1 — в остальных случаях.

Автор благодарит Ю. Д. Бураго и В. Н. Судакова за полезные замечания при обсуждении настоящей заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Одинец В. П. О единственности минимальных проекций в банаховых пространствах. ДАН СССР, т. 220, № 4, 1975, с. 779—781.

2. Morris P. D., Cheney E. W. On the exstence and characterization of minimal projections. J. reine und angew. Math., Bd. 270, 1974, s. 61—76.

3. Одинец В. П. Дифференциал Гато и единственность расширения линейных операторов с сохранением нормы. Изв. вузов. Матем., 1973, № 4, с. 77—86.

4. Одинец В. П. О единственности проекций с нормой, равной 1, в банаховом пространстве. Изв. вузов. Матем., 1974, № 1, с. 82—89.

г. Ленинград

Поступила
12 III 1975

[1] Для любых $h \in H$ и $x \in X$ имеем $\|h + x\|^p = \|h\|^p + \|x\|^p$, если $1 < p < \infty$, и $h + x\| = \max\{\|h\|, \|x\|\}$, если $p = \infty$.