Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. В. Емельянов, С. К. Коровин, С. В. Никитин, Глобальная управляемость и стабилизация нелинейных систем, *Матем. моделирование*, 1989, том 1, номер 1, 51–90

https://www.mathnet.ru/mm2503

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.173
16 июля 2025 г., 12:18:12

Математическое моделирование

том 1 номер 1/1989

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЯВЛЕНИЙ И ПРОЦЕССОВ

УДК 517.97

Глобальная управляемость и стабилизация нелинейных систем. Емельянов С.В., Коровин С.К., Никитин С.В. Математическое моделирование. Январь 1989. Т. 1, № 1. С.51–90.

Работа посвящена центральным проблемам математической теории систем. С использованием формализма топологической теории слоений и аппроксимативных групп, рассмотрены способы исследования транзитивности подгрупп диффеоморфизмов. Получены новые результаты о построении аппроксимативных групп. Описаны методы локальной и глобальной стабилизации. Развитые методы стабилизации допускают обобщения на бесконечномерный случай, что показано на примере стабилизируемости нелинейных систем с запаздыванием. Ил. 1. Библиогр. 126 назв.

© Издательство "Наука".
Главная редакция
физико-математической литературы,
"Математическое моделирование",
1989

ГЛОБАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

С.В. Емельянов, С.К. Коровин, С.В. Никитин

Математическое моделирование является одним из наиболее эффективных способов изучения систем. Современная математическая теория моделирования обширна и хорошо развита. В данной работе речь идет о том ее аспекте, который ближе всего примыкает к проблемам математической теории систем и математической теории управления и стабилизации. Естественно, что наиболее важными направлениями при этом становятся анализ управляемости и стабилизируемости, идентификация параметров, исследование наблюдаемости и построение наблюдателей состояния, теория реализаций, синтез систем с заданным видом и степенью инвариантности, теория оптимального управления. Каждому из перечисленных направлений посвящено значительное число публикаций теоретического и прикладного характера. Имеется ряд книг [10, 13, 14, 28, 35, 37–42, 44, 48, 78, 93, 102, 116], а также обзоры и работы обзорного характера [3, 9, 12, 21, 23, 30, 31, 63, 64, 68–71, 94, 103, 111, 112, 114, 123, 131], которые описывают современное состояние дел в той или иной области упомянутых теорий. Например, в обзорах [3, 9, 12, 21, 23, 63, 64, 68, 94, 111, 112, 117, 131] и книгах [77, 92, 101, 115] рассматриваются геометрические и алгебраические методы анализа нелинейных систем, работы [10, 38–40, 53, 55–57, 73, 123–125] содержат результаты исследований систем с распределенными параметрами; в [38, 69–71, 103–105, 115, 121] представлены результаты по системам с сингулярными возмущениями, методы анализа стабилизируемости и способы синтеза стабилизирующих обратных связей можно найти в работах [28–37, 44, 49, 52, 60, 61, 65, 97, 109, 117, 126].

Тема данной статьи ограничена описанием некоторых геометрических методов анализа глобальной управляемости и стабилизируемости нелинейных систем. Эти свойства играют центральную роль при построении программного управления, а также при синтезе алгоритмов стабилизации, занимающих важное место в прикладной автоматике, в частности при решении проблем робототехники [73, 76, 136], биотехнологии, атомной энергетики и т.д. Например, в [74] построен регулятор, локализующий фронт пламени в заданной пространственной области посредством манипулирования подачей топлива.

Выделенные вопросы органически связаны не только по существу, но и по форме, так как методам их исследования можно придать единообразную форму, если обратиться к геометрическим и топологическим методам анализа. Последнее обусловливает особенность и определенное своеобразие данной работы.

В первой части работы описаны методы анализа глобальной управляемости. Изложение ведется с использованием формализма топологической теории слоений и аппроксимативных групп, что позволяет с единых позиций рассмотреть большинство результатов, полученных в этой области. С помощью нелинейного аналога инвариантов Кронеккера обобщены результаты Куниты на некоммутативный случай. Особое внимание уделено гиперпространственным системам.

Во второй части статьи описаны методы анализа стабилизируемости и синтеза стабилизирующей обратной связи для нелинейных систем. С помощью формулы вариации хронологической экспоненты построена теория глобальной стабилизации в локально устойчивом положении равновесия на $\mathbf{R}^n$. Наиболее эффективно полученные результаты применены к билинейным системам. При некоторых требованиях к характеристикам Кронеккера предложенный способ стабилизации распространяется

на системы с распределенными параметрами. В качестве следствия из общего результата сформулировано достаточное условие стабилизируемости нелинейной системы с отклоняющимся аргументом.

Глобальная управляемость

Основные понятия и обозначения. В этом разделе описываются методы анализа управляемости системы σ_f:

$$\dot{x} = f(x, u),$$

здесь $x \in M$ – гладкое связное многообразие, $M \in C^\infty$, u – управление, т.е. функция времени из некоторого множества допустимых управлений со значениями в $V \subset \mathbf{R}^m$. Предполагается, что для любого фиксированного $u \in V$ $f(x, u)$ – полное векторное поле на M и при $l \geqslant 1$ $f(x, u) \in C^{l,0}(M \times V, TM)$ – множество функций, действующих из $M \times V$ в TM — касательное расслоение над M со слоем T_xM; каждая функция непрерывна по u при любом фиксированном x и непрерывно-дифференцируема по x до порядка l включительно при любом фиксированном $u \in V$. Для пары векторных полей $X, Y \in C^l(M, TM)$ $(l \geqslant 1)$ определен коммутатор $[X, Y] \in C^{l-1}(M, TM)$, который в локальных координатах задается выражением $[X, Y] = \dfrac{\partial Y}{\partial x} X - \dfrac{\partial X}{\partial x} Y$. Иногда $[X, Y]$ удобно обозначать через $\mathrm{ad}_X Y$ и $\mathrm{ad}_X^i Y = \mathrm{ad}_X(\mathrm{ad}_X^{i-1} Y)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, причем $\mathrm{ad}_X^0 Y = Y$. На протяжении всей работы мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в хронологическом исчислении [1–3, 12, 77]. Точка x гладкого многообразия M одновременно является мультипликативным гомоморфизмом алгебры $C^\infty(M)$ в $\mathbf{R}$, причем при локально-компактном M все мультипликативные гомоморфизмы из $C^\infty(M)$ в $\mathbf{R}$ исчерпываются точками из M*). Это свойство точек многообразия M будет отражать запись

$$x \circ \varphi = \varphi(x), \quad \varphi \in C^\infty(M), \quad x \in M.$$

Соответственно, если $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Diff}(M)$ – гладкие диффеоморфизмы M на себя, то под записью $x \circ \psi_1 \circ \psi_2$ понимаем $\psi_2(\psi_1(x))$. Далее, где это не вызывает недоразумений, аргумент x в обозначении векторного поля $f(x, u)$ будем опускать и писать $f(u)$. Поток, порождаемый нестационарным векторным полем X_t, обозначается символом $\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau \, d\tau$, т.е.

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau \, d\tau \circ X_t.$$

Если X_t – стационарное векторное поле, т.е. $X_t = X \ \forall t \in \mathbf{R}$, то вместо $\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau \, d\tau$ пишут e^{tX}. Таким образом, решение $x_f^u(t, x^0)$ дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x, u)$, отвечающее начальному условию $x^0 \in M$ и допустимому управлению $u(t)$ в терминах хронологического исчисления, имеет вид

$$x_f^u(t, x^0) = x^0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t f(u(\tau)) \, d\tau.$$

---

*) Этот факт сообщил авторам Р.В. Гамкрелидзе.

Хронологическое исчисление возникло в связи с попытками распространить принцип максимума Л.С. Понтрягина на сингулярные задачи управления [4, 5, 14, 88, 100, 101, 106]. Оно позволяет эффективно вычислять вариации высших порядков, что имеет большое значение при анализе локальной управляемости, условий оптимальности высших порядков и релейности экстремальных управлений [4–8]. В рамках этого направления получено много замечательных результатов. Нам понадобится один из них, который носит название формулы вариации хронологической экспоненты.

Теорема 1.1 (формула вариации хронологической экспоненты) [1, 77]. *Если X_t, Y_t, $t \in \mathbf{R}$ – по крайней мере один раз непрерывно дифференцируемые нестационарные векторные поля, то справедлива формула*

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t (X_\tau + Y_\tau)\, d\tau =$$

$$= \overrightarrow{\exp} \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad} X_\theta \, d\theta \, Y_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau \, d\tau,$$

где $\overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad} X_\theta d\theta$ *– решение операторного дифференциального уравнения*

$$\frac{d}{dt} Q_t = Q_t \operatorname{ad} X_t,$$

т.е. $Q_t Y = d\psi_t^*(Y)$, *где* $\psi_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\theta \, d\theta$ *и*

$$x \circ (d\psi_t^* Y) = x \circ \psi_t \circ [(d\psi_t)^{-1} Y],$$

здесь $x \in M$ *и* $d\psi_t$ *– производная диффеоморфизма* ψ_t: $M \longrightarrow M$.

Это утверждение доказывается методом вариации постоянной [1].

В литературе существует довольно много вариантов определения управляемости систем, которые отражают различные свойства систем, фазового многообразия M и допустимого множества управлений. В этом разделе мы остановимся на понятиях глобальной управляемости и различных его модификациях.

Определение 1.1. Под глобальной управляемостью посредством класса управлений $\mathcal{U}$ понимается транзитивность моноида $\mathrm{SS}_f(M, \mathcal{U})$, который состоит из диффеоморфизмов

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t f(u)\, d\tau \colon M \longrightarrow M;\ u \in \mathcal{U},\ t > 0.$$

Закон композиции в $\mathrm{SS}_f(M, \mathcal{U})$ – обычная суперпозиция отображений, единицей является тождественное отображение. Далее через $\mathrm{SS}_f(M, \mathcal{U})x$ обозначается орбита точки $x \in M$,

$$\mathrm{SS}_f(M, \mathcal{U})x = \{g(x);\ g \in \mathrm{SS}_f(M, \mathcal{U})\},$$

соответственно

$$\mathrm{SS}_f^{\leqslant T}(M, \mathcal{U})x = \{x \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t f(u)\, d\tau;\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ u \in \mathcal{U}\},$$

$$\mathrm{SS}_f^{T}(M, \mathcal{U})x = \{x \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^T f(u)\, d\tau;\ u \in \mathcal{U}\}.$$

Множество глобально управляемых систем обозначим через $\mathcal{Y}(M, \mathcal{U})$, т.е. включение $\sigma_f \in \mathcal{Y}(M, \mathcal{U})$ эквивалентно глобальной управляемости σ_f на M посредством $\mathcal{U}$. Следуя работам [16, 17], обозначим через $\mathcal{Y}_T(M, \mathcal{U})$, $\mathcal{Y}_{\leqslant T}(M, \mathcal{U})$ соответственно такие множества систем, что $\mathrm{SS}_f^T(M, \mathcal{U})x = M$ при любом $x \in M$, $\mathrm{SS}_f^{\leqslant T}(M, \mathcal{U})x = M$ при всех $x \in M$.

Систему σ_f обычно называют полностью управляемой, если существует $T > 0$ такое, что $\sigma_f \in \mathcal{Y}_T(M, \mathcal{U})$, т.е. $\sigma_f \in \bigcup\limits_{T>0} \mathcal{Y}_T(M, \mathcal{U})$. Если же $\sigma_f \in \bigcap\limits_{T>0} \mathcal{Y}_{\leqslant T}(M, \mathcal{U})$, то говорят о мгновенной управляемости σ_f. Классы мгновенно управляемых и полностью управляемых систем обозначим соответственно через $\mathcal{Y}_0(M, \mathcal{U})$ и $\mathcal{Y}_\infty(M, \mathcal{U})$.

Допустимые управления $\mathcal{U}$ в большинстве случаев считаются измеримыми функциями времени со значениями из некоторого подмножества $Q \subset \mathbf{R}^m$, последнее в ряде работ [21, 22] считается компактным образом многозначного отображения $Q: M \to \mathbf{R}^m$, непрерывного в смысле отклонений по Хаусдорфу.

При исследовании различных свойств линейных систем большую роль играет понятие инвариантов Кронеккера [66, 81, 98, 119, 120, 122], которые в нелинейном случае вводит

Определение 1.2. Пусть $\mathcal{L}$ – такое фиксированное множество векторных полей, что $\mathcal{L} = \operatorname{span}\limits_{C^\infty(M)} \{Z_i\}_{i=1}^k$, $e^{t\,\mathrm{ad}\,X}\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$ для любого $t \in \mathbf{R}$ (если Ξ – множество элементов некоторого модуля над кольцом K и $K' \subset K$, то $\operatorname{span}\limits_{K'} \Xi$ – совокупность линейных комбинаций элементов из Ξ с коэффициентами из K'). Пара векторных полей $X, Y \in C^\infty(M, TM)$ обладает свойством Кронеккера на $\mathcal{L}$ и имеет индекс Кронеккера $\nu_{\mathcal{L}}(X, Y)$ равный наименьшему натуральному числу m, для которого найдутся такие действительные функции $\gamma_j, \beta_i \in C(M)$ $(i = 0, 1, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, k)$, что

$$\mathrm{ad}_X^{m+1} Y = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \,\mathrm{ad}_X^j Y + \sum_{j=1}^{k} \gamma_j Z_j \text{ на } M.$$

Совокупность функций $\{\gamma_j, \beta_i\}_{j,i}$ называется характеристиками Кронеккера пары (X, Y). Если $\mathcal{L} = \phi$, то вместо $\nu_\phi(X, Y)$ будем говорить просто о свойстве Кронеккера пары (X, Y) и писать $\nu(X, Y)$. Заметим, что $\nu_{\mathcal{L}}(X, Y) \neq \nu_{\mathcal{L}}(Y, X)$. Например, в случае, когда $M = \mathbf{R}^n$ и $X = \mathrm{A}x$, $\mathrm{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $Y = b \in \mathbf{R}^n$, имеем $\nu(\mathrm{A}x, b) = n - 1$, $\nu(b, \mathrm{A}x) = 1$.

Нетрудно видеть, что для любого диффеоморфизма $\psi \in \mathrm{Diff}$ характеристиками пары $(d\psi^* X, d\psi^* Y)$ являются функции

$$\{\psi^*\gamma_j,\ \psi^*\beta_i\}_{j,i},$$

где $\forall\, \varphi \in C^\infty(M)$, $x \in M$, $x \circ (\psi^*\varphi) = x \circ \psi \circ \varphi$, $\{\gamma_j \beta_i\}$ – характеристики пары (X, Y). Таким образом, орбиты $\{(\mathrm{Diff})^*\gamma_j,\ (\mathrm{Diff})^*\beta_i\}_{i,j}$ являются инвариантами пары (X, Y) по отношению к действию группы $(\mathrm{Diff})^* = \{\psi^*;\ \psi \in \mathrm{Diff}\}$ на множестве векторных полей. В отличие от линейного случая совпадение этих инвариантов для двух пар векторных полей (X, Y) и $(\overline{X}, \overline{Y})$ не влечет существования такого диффеоморфизма ψ, что $(X, Y) = (d\psi^*\overline{X}, d\psi^*\overline{Y})$. Заметим, что из условий $\{X, \mathcal{L}\} \subset C^\infty(M, TM)$, $\mathcal{L} = \operatorname{span}\limits_{C^\infty(M)} \{Z_i\}_{i=1}$, $e^{t\,\mathrm{ad}^f}\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$ следует существование таких функций $\rho_{ij} \in C^\infty(\mathbf{R}_t \times M)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant k)$, что $e^{t\,\mathrm{ad}\,X} Z_i = \sum\limits_j \rho_{ij}(t)\, Z_j$.

Следствием свойства Кронеккера пары векторных полей $X, Y \in C^\infty(M, TM)$ является следующая

Теорема 1.2. *Если пара векторных полей X, Y обладает свойством Кронеккера на $\mathcal{L}$ и индекс Кронеккера равен m, то найдутся такие векторные поля $\{Z_i\}_{i=1}^k \subset \mathcal{L}$, что справедливо разложение*

$$e^{\tau \operatorname{ad} X} Y = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(\tau) \operatorname{ad}_X^j Y + \sum_{j=1}^{k} \xi_j(\tau) Z_j,$$

где при всех τ имеет место включение

$$\alpha_i,\ \xi_j \subset C^\infty(M),\quad j = 1, 2, \ldots, k;\ i = 0, 1, \ldots, m,$$

и α_i, ξ_j находятся из задач Коши:

$$\alpha_i^{(m+1)} = \sum_{j=0}^{m} e^{\tau X} \circ \beta_j \alpha^{(j)},\ \alpha_i^{(j)}|_{\tau=0} = \delta_{ij},$$

$$0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant m,$$

$$\xi_j^{(m+1)} = \sum_{l=0}^{m} e^{\tau X} \circ \beta_l \xi_j^{(l)} + \sum_{i=1}^{k} e^{\tau X} \circ \gamma_i \cdot \rho_{ij}(t),$$

$$\xi_j^{(l)}|_{\tau=0} = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant k,\ 0 \leqslant l \leqslant m,$$

здесь δ_{ij} – символ Кронеккера, $\{\beta_i, \gamma_j\}_{i,j}$ – характеристика пары (X, Y) и $\{\rho_{ij}(t)\} \in C^\infty(\mathbf{R}_t \times M)$ – коэффициенты разложения $e^{t \operatorname{ad} X} Z_i = \sum_j \rho_{ij} Z_j$.

Доказательство. Введем векторное поле

$$\xi(\tau) = e^{\tau \operatorname{ad} X} Y - \Big[\sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\tau) \operatorname{ad}_X^i Y + \sum_{j=1}^{k} \xi_j(\tau) Z_j\Big].$$

Тогда $\dfrac{d^{(m+1)}}{d\tau^{m+1}} \xi(\tau) = 0$ и $\xi^{(j)}(0) = 0$, $0 \leqslant j \leqslant m$. Решение этой задачи Коши тождественно равно нулю. Теорема доказана.

Используя формулу вариации хронологической экспоненты, нетрудно доказать следующее

Предложение 1.1. *Система $\Sigma(f, \mathrm{B}): \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x)$ (здесь $\mathrm{B} = \{b_i\}_{i=1}^m, f \in C^\infty(M, TM)$) удовлетворяет включению*

$$\Sigma(f, \mathrm{B}) \in \mathcal{Y}_{\leqslant T}(M, \mathcal{U})\ (\Sigma(f, \mathrm{B}) \in \mathcal{Y}_0(M, \mathcal{U}))$$

в том и только том случае, когда для системы $e^{-tf} \circ \Sigma(f, \mathrm{B})$: $\dot{y} = \sum_{i=1}^{m} u_i e^{t \operatorname{ad} f} b_i$ имеет место

$$e^{-tf} \circ \Sigma(f, \mathrm{B}) \in \mathcal{Y}_{\leqslant T}(M, \mathcal{U})\ (e^{-tf} \circ \Sigma(f, \mathrm{B}) \in \mathcal{Y}_0(M, \mathcal{U})).$$

Это утверждение вместе с теоремой 1.2 позволяет исследовать нелинейные системы, аффинно зависящие от управления при различных предположениях относительно свойств характеристик Кронеккера пар векторных полей $\{(f, b_i)\}_{i=1}^m$.

Необходимые ранговые условия управляемости. В этом подпункте будем считать, что $\mathcal{U} = \mathcal{K}(V)$ – кусочно-постоянные функции со значениями в $V \subset \mathbf{R}^m$, поэтому вместо $\mathrm{SS}_f(M, \mathcal{U})$ будем писать $\mathrm{SS}_f(M)$. Пусть $\mathrm{GS}_f(M)$ – группа, система

образующих которой состоит из элементов моноида $SS_f(M)$. Тогда если $SS_f(M)$ действует транзитивно на M, то и $GS_f(M)$ действует транзитивно. Транзитивность $GS_f(M)$ является необходимым условием того, что $\sigma_f \in \mathcal{Y}(M, \mathcal{K}(V))$. Структуру орбит $GS_f(M)$ описывает

Теорема 1.3 [133–135]. *Если $f(x, u) \in C^{l+1,0}(M \times V, TM)$ (здесь l может быть равным ω, что означает вещественную аналитичность), то для любого $x^0 \in M$ орбита $GS_f(M)x^0$ является C^l-гладким (иммерсированным) подмногообразием в M.*

Доказательство. Структуру многообразия на $GS_f(M)x^0$ зададим с помощью семейства отображений

$$\{g \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t f(u)\, d\tau \circ g^{-1}\}_{g \in GS_f(M)}.$$

Введем в рассмотрение подмножество векторов Π_{x^0} из $T_{x^0}M$ следующим образом:

$$\Pi_{x^0} = \bigcup_{g \in GS_f(M)} dg^* f(v)\,|_{x^0},$$

где $f(v)$ – векторное поле с фиксированным $v \in V$. В силу построения, для любых $x, y \in M$ $\operatorname{rank} \Pi_x = \operatorname{rank} \Pi_y$. Пусть $\operatorname{rank} \Pi_{x^0} = r$, где r – некоторое натуральное число, тогда найдется r линейно независимых в $T_{x^0}M$ векторов $\{dg_1^* f(v_1), dg_2^* f(v_2), \ldots, dg_r^* f(v_r)\}$. Зададим отображения

$$\psi_{x^0}(y_1, \ldots, y_r) = x^0 \circ g_1 \circ e^{y_1 f(v_1)} \circ g_1^{-1} \circ g_2 \circ e^{y_2 f(v_2)} \circ$$
$$\circ\, g_2^{-1} \circ \ldots \circ g_r \circ e^{y_r f(v_r)} \circ g_r^{-1}.$$

Тогда существует достаточно малая окрестность нуля $U \subset \mathbf{R}^r$, иммерсируемая на $GS_f(M)x^0$. Атлас $\mathcal{A}$ класса C^l на $GS_f(M)x^0$ задается следующей совокупностью карт:

$$\{(g^{-1}\psi_{x^0 \circ g}, g^{-1}\psi_{x^0 \circ g}(U))\}_{g \in GS_f(M)}.$$

В силу того что M – многообразие и вторая аксиома счетности имеет место, из атласа $\mathcal{A}$ всегда можно выбрать счетное семейство карт, покрывающих $GS_f(M)$. Если $\rho^{-1}\psi_{x^0 \circ \rho}(U) \cap g^{-1}\psi_{x^0 \circ g}(U) \neq \phi$, то отображение $\psi^{-1}_{x^0 \circ \rho}\rho g^{-1}\psi_{x^0 \circ g}$ диффеоморфно отображает

$$\psi^{-1}_{x^0 \circ g}(g(\rho^{-1}\psi_{x^0 \circ g}(U) \cap g^{-1}\psi_{x^0 \circ g}(U))) \text{ на}$$

$$\psi^{-1}_{x^0 \circ \rho}(\rho(\rho^{-1}\psi_{x^0 \circ \rho}(U) \cap g^{-1}\psi_{x^0 \circ g}(U)))$$

и непрерывно дифференцируемо до порядка l включительно. Последнее завершает доказательство теоремы.

Нетрудно видеть, что касательная плоскость к $GS_f(M)x^0$ в точке x^0 определяется соотношением $\bigcup_{g \in GS_f(M)} dg^* f(v)\,|_{x^0}$. Таким образом, мы имеем важную характеристику системы σ_f – размерность орбиты $GS_f(M)x^0$, которую принято называть размерностью системы σ_f, т.е.

$$\dim_y \sigma_f = \dim T_y GS_f(M)x^0 = \operatorname{rank}\{\bigcup_{g \in GS_f(M)} dg^* f(v)|_{x^0}\}.$$

Эффективных способов подсчета числа $\dim_y \sigma_f$ не существует, однако можно дать нижнюю оценку для $\dim_y \sigma_f$, используя понятие ранга системы, который в известной мере характеризует важный инвариант системы σ_f, именно связанную с ней алгебру Lie F_V, порожденную семейством векторных полей $F_V = \{ f(x, u);\ u \in V \}$ при условии, что $f(x, u) \in C^{\infty,0}(M \times V, TM)$. Рангом системы σ_f называется отображение

$$\operatorname{rank}_y \sigma_f = \dim \operatorname{Lie} F_V(x),$$

здесь Lie $F_V(x)$ – линейное пространство, натянутое на значение векторных полей из Lie F_V в точке x.

Если $f(x, u) \in C^{1,0}(M \times V, TM)$, то под $\operatorname{Lie}_l F_V$ понимается множество векторных полей

$$\{ \operatorname{ad}^{i_1}_{f(u_1)} \operatorname{ad}^{i_2}_{f(u_2)} \dots d^{i_l}_{f(u_l)} f(v);\ i_j \geqslant 0,\ v,\ u_j \in V,$$

$$1 \leqslant j \leqslant l,\ \sum_{j=1}^{l} i_j \leqslant l \}.$$

Предложение 1.2. *В любой точке $y \in M$ справедливо неравенство*

$$\max_{z \in \mathrm{GS}_f(M)y} \operatorname{rank}_z \sigma_f \leqslant \dim_y \sigma_f$$

и, кроме того, $\operatorname{Lie}_l F_V(x) \subset T_x \mathrm{GS}_f(M)x$ *при всех* $x \in M$.

Справедливость этого утверждения сразу следует из введенных выше определений для $\operatorname{Lie}_l F_V(x)$, $T_x \mathrm{GS}_f(M)x$ и функций $\operatorname{rank}_z \sigma_f$, $\dim_y \sigma_f$.

Поясним введенные понятия и сформулированные утверждения на примерах.

Пример 1.1. Рассмотрим систему σ:

$$\dot{x}_1 = u_1,$$

$$\dot{x}_2 = \omega(x) \cdot u_2,$$

где

$$\omega(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x^2| - 1}\right) & \text{при } |x|^2 < 1, \\ 0 & \text{при } |x|^2 \geqslant 1. \end{cases}$$

При $|x|^2 \geqslant 1$ $\omega(x) = 0$, и поэтому $\operatorname{rank}_x \sigma = 1$, вместе с тем $\dim_x \sigma = 2$ в полосе $\Pi = \{x \in \mathbf{R}^2;\ |x_2| < 1\}$ и $\dim_x \sigma = 1$ вне этой полосы.

В данном примере $\max\limits_{z \in \mathrm{GS}_f(M)\, y} \operatorname{rank}_z \sigma_f = \dim_y \sigma_f$ при всех $y \in \mathbf{R}^2$. Следующий пример показывает, что знак неравенства в предложении 1.2 нельзя заменить на знак равенства.

Пример 1.2. Пусть $M = \mathbf{R}^3$ и система $\mathfrak{S}$ имеет вид

$$\dot{x}_1 = \omega(x_3), \qquad \dot{x}_2 = \omega(-x_3), \qquad \dot{x}_3 = u,$$

где

$$\omega(\eta) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\eta}\right) & \text{при } \eta < 0, \\ 0 & \text{при } \eta \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда $\operatorname{rank}_y \sigma = 2$ и $\dim_y \sigma = 3$ при всех $y \in \mathbf{R}^3$. Геометрическая ситуация выглядит следующим образом; при $x_3 < 0$ мы можем свободно передвигаться по каждой из плоскостей вида $\{x_2 = c;\ c \in \mathbf{R}\}$, а при $x_3 > 0$ – по плоскостям $\{x_1 = c;\ c \in \mathbf{R}\}$ и, кроме того, перемещаемся в любом направлении по прямым, параллельным координатной оси x_3.

Необходимым условием управляемости является равенство $\dim_x \sigma_f = \dim M$. Однако до сих пор не существует эффективного способа подсчета $\dim_x \sigma_f$, при этом $\operatorname{rank}_x \sigma_f$ считается сравнительно легко. Поэтому особый интерес представляют вещественно-аналитические системы, для которых имеет место

Предложение 1.3. *Пусть система σ_f и многообразие M вещественно-аналитические, тогда* $\operatorname{Lie} F_V(x) = T_x \mathrm{GS}_f(M)\, x$ *для любого* $x \in M$.

Доказательство. Включение $\operatorname{Lie} F_V(x) \subseteq T_x \mathrm{GS}_f(M)\, x$ следует из предложения 1.2 и является следствием введенного определения для $T_x \mathrm{GS}_f(M) x$. Поскольку $u \in \mathcal{K}(V)$, то для доказательства обратного включения достаточно показать, что $d(e^{t \operatorname{ad} f(u)})^*$: $\operatorname{Lie} F_V(x) \to \operatorname{Lie} F_V(x)$ для любого $u \in V$. В силу вещественной аналитичности это свойство нужно доказать лишь при малых t, но при малых t имеет место разложение

$$d(e^{t \operatorname{ad} f(u)})^* = \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{ad}^i_{f(u)} \frac{t^i}{i!}.$$

Таким образом, $d(e^{t \operatorname{ad} f(u)})^*$: $\operatorname{Lie} F_V(x) \to \operatorname{Lie} F_V(x)$, и теорема доказана.

Таким образом, выполнение равенства $\max\limits_{x \in \mathrm{GS}_f(M)\, y} \operatorname{rank}_x \sigma_f = \dim M$ при всех $y \in M$ является необходимым, но не достаточным условием управляемости, однако его можно усилить с помощью предложения 1.1, т.е. верно

Предложение 1.4. *Если* $\Sigma(f, \mathrm{B}) \in \mathcal{Y}_{\leqslant T}(M, \mathcal{U})$ *при некотором* $T > 0$ *и* $f, \mathrm{B} \in C^{\omega}(M, TM)$, *то*

$$\operatorname{rank}_x \operatorname{Lie}\{\mathrm{B}, \operatorname{ad}_f \mathrm{B}, \operatorname{ad}_f^2 \mathrm{B}, \ldots, \operatorname{ad}_f^n \mathrm{B}, \ldots\} = n$$

для любого $x \in M$, *здесь* $\operatorname{ad}_f^i \mathrm{B} = \{\operatorname{ad}_f^i b_1, \ldots, \operatorname{ad}_f^i b_m\}$.

Отметим те случаи, когда равенство $\operatorname{rank} \sigma_f = \dim M$ является не только необходимым, но и достаточным условием управляемости. Если для любого $u \in V$ существует такое $v \in V$, что $f(x, u) = -f(x, v)$ для всех $x \in M$, то систему σ называют симметричной [114, 132]. Для симметричной системы $\mathrm{SS}_f(M)\, x = \mathrm{GS}_f(M) x$ при всех $x \in M$, поэтому из $\operatorname{rank} \sigma_f = \dim M$ следует $\sigma_f \in \mathcal{Y}(M, \mathcal{K}(V))$. Особое место занимают также системы, заданные правоинвариантными векторными полями на вещественно-аналитической компактной группе Ли. Дело заключается в том, что компактная топологическая группа не содержит собственных подполугрупп, т.е. справедливо следующее

Предложение 1.5. *Пусть G – секвенциально компактная топологическая группа. Тогда если $\mathcal{P} \subseteq G$ – подполугруппа из G, то $\overline{\mathcal{P}}$ – замыкание $\mathcal{P}$ – является группой в G.*

Доказательство. Возьмем последовательность степеней $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ элемента $x \in \overline{\mathcal{P}}$. Тогда в силу компактности существует такая последовательность натуральных чисел $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $n_{i+1} > n_i + 1$ и

$$\lim_{i \to \infty} x^{n_i} = x^* \in \overline{\mathcal{P}}.$$

Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{i \to \infty} x^{n_i+1-1} x^{-n_i} = x^{-1}$ – элемент, обратный к x, и $x^{n_i+1-1} x^{-n_i} = x^{n_i+1-1-n_i} \in \bar{\mathcal{P}}$ при всех $1 \leqslant i < \infty$. Таким образом, для любого $x \in \bar{\mathcal{P}}$ имеем $x^{-1} \in \bar{\mathcal{P}}$, и предложение доказано.

Из предложения следует, что для любого $x \in G$ (G – компактная группа Ли) верно равенство $\overline{\mathrm{SS}_f(G)x} = \mathrm{GS}_f(G)$, где $f(x, u) = \mathrm{A}x + \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \mathrm{B}_i x$, $\mathrm{A}x$, $\{\mathrm{B}_i x\}_{i=1}^{m}$ – правоинвариантные векторные поля на G. Если внутренность $\operatorname{int} \mathrm{SS}_{-f}(G)x$ орбиты $\mathrm{SS}_{-f}(G)x$ не пуста для любого $x \in G$, то равенство $\operatorname{rank} \sigma_f = \dim G$ является критерием управляемости системы σ_f [96], заданной (лево-) правоинвариантными векторными полями. В работе [132] доказана

Теорема 1.4. $\operatorname{int} \mathrm{SS}_{\mp f}(M)x \neq \phi$ *тогда* (*и только тогда при* $M \in C^{\omega}$ *и* $f(x, u) \in C^{\omega,0}(M \times V, TM)$), *когда* $\dim \mathrm{Lie}_l F_V(x) = \dim M$. *При этом внутренность орбиты* $\mathrm{SS}_{\mp f}(M)x$ *плотна в ней самой*:

$$\overline{\operatorname{int} \mathrm{SS}_{\mp f}(M)x} \supseteq \mathrm{SS}_{\mp f}(M)x.$$

Таким образом, для систем полного ранга имеет место $\operatorname{int} \mathrm{SS}_{\mp f}(M)x \neq \phi$ при всех $x \in M$.

Исходя из этого получаем, что для системы σ_f, заданной (лево-) правоинвариантными полями на вещественно-аналитической компактной группе Ли, равенство $\operatorname{rank} \sigma_f = \dim G$ влечет $\sigma_f \in \mathcal{J}(G, \mathcal{K}(V))$ [96].

Аппроксимативные группы. Условие $\operatorname{rank} \sigma_f = \dim M$ влечет управляемость лишь достаточно специфических систем. В большинстве же случаев метод, основанный на погружении моноида $\mathrm{SS}_f(M)$ в группу $\mathrm{GS}_f(M)$ и последующем изучении транзитивности последней, является довольно грубым и потому дает лишь необходимые условия управляемости, которые вычислимы лишь в вещественно-аналитическом случае. Изучим более тонкие методы анализа транзитивности моноида $\mathrm{SS}_f(M)$, основанные на построении аппроксимативных групп [15, 16, 21, 23].

Определение 1.3. Пусть Ω – некоторое топологическое пространство, а $\mathfrak{M}(\Omega)$ – моноид отображений из Ω в Ω, $\mathfrak{M}(\Omega)x = \{g(x);\ g \in \mathfrak{M}(\Omega)\}$. Группа G отображений из Ω в Ω называется аппроксимативной группой моноида $\mathfrak{M}(\Omega)$, если для любого $x \in \Omega$ орбита группы G удовлетворяет включению $Gx \subseteq \overline{\mathfrak{M}(\Omega)x}$; черта вверху означает замыкание $\mathfrak{M}(\Omega)$ в топологии пространства Ω.

Аппроксимативные группы моноида $\mathrm{SS}_f(M)$ называются аппроксимативными группами системы σ_f. Если система управляема на M, то для нее аппроксимативна любая группа преобразований многообразия M.

В каких случаях из транзитивности аппроксимативной группы следует транзитивность моноида $\mathrm{SS}_f(M)$?

Ответ на этот вопрос дает

Предложение 1.6. *Если для любого* $x \in M$ $\operatorname{int} \mathrm{SS}_f(M)x \neq \phi$, *то из транзитивности аппроксимативной группы системы следует управляемость этой системы.*

В [83, 129] показано, что для довольно общего класса систем выполнение неравенства $\operatorname{int} SS_f(M)x \neq \phi$ в каждой точке $x \in M$ является типичным свойством.

Теорема 1.5. [129]. *Множество систем, у которых ранг равен размерности соответствующего многообразия во всех его точках, образует открытое и плотное множество в C^k – топологии Уитни* $(k \geqslant \dim M)$.

Таким образом, задача анализа управляемости системы общего положения сводится к построению ее транзитивной аппроксимативной группы.

Известны три основных метода построения аппроксимативной группы системы: метод больших коэффициентов [67, 89], метод Лобри [113], метод Куниты [107]. Остановимся более подробно на каждом из них.

Теорема 1.6 (метод больших коэффициентов [67, 89]). *Если найдутся такие γ_j, $\beta_j \in \mathbf{R}^m$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, что $\gamma_j + k\beta_j \in V \subset \mathbf{R}^m$ (так как $\mathcal{K}(V)$ – класс допустимых управлений) при всех $k \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant j \leqslant r$, и на любом компакте $K \subset M$ в смысле топологии $C^1(K, TK)$ существуют пределы*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(x, \gamma_j \pm k\beta_j)}{k^\rho} = \pm \zeta_j(x) \qquad (1 \leqslant j \leqslant r),$$

где $\rho = \dfrac{2\omega_1 + 1}{2\omega_2 + 1}$ *(ω_1, ω_2 – неотрицательные целые числа) и $\{\zeta_j(x)\}_{j=1}^r$ – полные векторные поля на M, то группа гомеоморфизмов с системой образующих $\{e^{t\zeta_j};\ t \in \mathbf{R},\ 1 \leqslant j \leqslant r\}$ является аппроксимативной группой системы σ_f.*

Далее группу с системой образующих $\{e^{t\zeta_j};\ t \in \mathbf{R},\ 1 \leqslant j \leqslant r\}$ будем обозначать через $\langle \zeta_j \rangle_{j=1}^r$.

Эта теорема является следствием непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от правой части и начальных условий.

Особенно эффективен метод больших коэффициентов в случае нелинейной системы $\Sigma(f, \mathbf{B})$, аффинно зависящей от управления, область значений которого есть все пространство $\mathbf{R}^m$. Непосредственно из теоремы 1.6 вытекает

Следствие 1 [67, 84, 85, 89]. *Если система имеет вид*

$$\dot{x} = f(x, u) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) u_i,$$

где $b_i(x) \in C^l(M, TM)$ $(l \geqslant 1)$ и семейство $\{f(x, u);\ u \in \mathbf{R}^m\}$ равномерно ограничено в $C^1(K, TK)$ на любом компакте $K \subset M$, то $\langle b_i \rangle_{i=1}^m$ – аппроксимативная группа системы.

Рассмотрим метод Лобри построения аппроксимативных групп, который развит для систем, заданных на римановых компактных многообразиях. Он основан на том, что консервативные векторные поля на компактном римановом многообразии имеют всюду плотное множество точек, устойчивых по Пуассону.

Теорема 1.7 (Пуанкаре). *Если M – риманово многообразие с нормированной естественной мерой, т.е. $\mu(M) = 1$ и $\mu(V) = c \int_V \sqrt{g}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$,*

где c – нормирующий коэффициент из $\mathbf{R}_+$, $\sqrt{g}\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ – элемент объема, ассоциированный с римановой метрикой, то любое консервативное векторное поле на M имеет всюду плотное множество точек, устойчивых по Пуассону.

Напомним, что векторное поле называется консервативным, если порожденная им однопараметрическая группа сохраняет естественную меру риманова многообразия. Тогда $y \in M$ называется устойчивой по Пуассону для векторного поля $\zeta(x)$, если для любой открытой окрестности U точки y и для любого действительного числа T найдется такое $t > T$, что $e^{t\zeta}(U) \cap U \neq \phi$, где $e^{t\zeta}(U)$ – сдвиг на время t окрестности U вдоль потока $e^{t\zeta}$.

Метод Лобри построения аппроксимативных групп заключается в следующем.

Теорема 1.8 [113]. *Если M – компактное риманово многообразие, $\operatorname{rank}_x \sigma_f = \dim M$ при всех $x \in M$ и множество $\{v_i\}_{i=1}^m \subset V \subset \mathbf{R}^m$ такое, что векторные поля $f(x, v_1), f(x, v_2), \ldots, f(x, v_m)$ консервативны, то $\langle f(x, v_i) \rangle_{i=1}^m$ – аппроксимативная группа системы σ_f: $\dot{x} = f(x, u)$.*

Для того чтобы установить управляемость системы σ_f, надо построить транзитивную аппроксимативную группу. Таким образом, аппроксимативная группа должна быть достаточно богатой отображениями. В ряде случаев проще построить более узкую группу отображений, а затем расширить ее с помощью метода Куниты [107], который заключается в следующем.

Пусть $\mathcal{L}$ – множество полных векторных полей, обозначим через $\langle \mathcal{L} \rangle$ группу с системой образующих $\{e^{t\xi};\ t \in \mathbf{R},\ \xi \in \mathcal{L}\}$. Вектор $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, компоненты которого $\{i_j\}_{j=1}^n$ – натуральные числа, принято называть мультииндексом, соответственно $|i| = \sum_{j=1}^n i_j$, $i! = i_1!\, i_2! \ldots i_n!$. Введем обозначения $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$, где $Z_i \in \mathcal{L}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $\operatorname{ad}_Z^i b = \operatorname{ad}_{Z_1}^{i_1} \operatorname{ad}_{Z_2}^{i_2} \ldots \operatorname{ad}_{Z_n}^{i_n} b$, $\operatorname{ad}_{\mathcal{L}}^l b = \{\operatorname{ad}_Z^i b;\ |i| = l,\ Z = (Z_1, \ldots, Z_n),\ Z_i \in \mathcal{L}\}$.

Метод расширения аппроксимативной группы $\langle \mathcal{L} \rangle$ дает

Теорема 1.9. *Пусть $\mathcal{L} \in C^l(M, TM)$, $f(x, u) \in C^{l,0}(M \times V, TM)$. Тогда если $\langle \mathcal{L} \rangle$ – аппроксимативная группа системы σ_f и найдутся такие $u \in V \subset \mathbf{R}^m$, натуральное число $k < l$, что $\operatorname{ad}_{\mathcal{L}}^{k+1} f(x, u) \subset \operatorname{span}_{C^\infty(M)} \operatorname{Lie}_l \mathcal{L}$, то*

$$\langle \mathcal{L} \cup \operatorname{odd} \operatorname{ad}_{\mathcal{L}}^k f(u) \rangle$$

– аппроксимативная группа системы σ_f, здесь $\operatorname{span}_{C^\infty(M)} \operatorname{Lie}_l \mathcal{L}$ – линейная оболочка векторов из $\operatorname{Lie}_l \mathcal{L}$ с коэффициентами из $C^\infty(M)$, $\operatorname{odd} \operatorname{ad}_{\mathcal{L}}^k f(u)$ – подмножество из $\operatorname{ad}_{\mathcal{L}}^k f(u)$, в каждом элементе которого хотя бы одна из компонент мультииндекса $i = (i_1, \ldots, i_n)$ является нечетным натуральным числом, $\operatorname{Lie}_l \mathcal{L}$ – множество векторных полей, получаемых из $\mathcal{L}$ с помощью операций коммутирования (скобок Ли), причем порядок производных не должен превышать l, $\forall Z \in \operatorname{Lie}_l \mathcal{L}$, $t \in \mathbf{R}$ $e^{tZ} \operatorname{Lie}_l \mathcal{L} \subseteq \operatorname{Lie}_l \mathcal{L}$.

Доказательство. По условию теоремы $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}^{k+1} f(u) \subset \underset{C^\infty(M)}{\mathrm{span}}\ \mathrm{Lie}_l \mathcal{L}$, поэтому индекс Кронеккера $\nu_{\mathrm{Lie}_l \mathcal{L}}(Z_n,\ f(u)) = k$ и, применяя теорему 2, имеем разложение

$$e^{y_n \mathrm{ad}\, Z_n} f(u) = \sum_{i=0}^{k} y_n^i \mathrm{ad}_{Z_n}^i f(u) + X_1,$$

где $X_1 \in \underset{C^\infty(M)}{\mathrm{span}}\ \mathrm{Lie}_l \mathcal{L}$. Легко видеть, что

$$e^{y_{n-1} \mathrm{ad}\, Z_{n-1}} e^{y_n \mathrm{ad}\, Z_n} f(u) = \sum_{i=0}^{k} y_n^i e^{y_{n-1} \mathrm{ad}\, Z_{n-1}} \mathrm{ad}_{Z_n}^i f(u) + X_2, \tag{1}$$

где

$$X_2 \in \underset{C^\infty(M)}{\mathrm{span}}\ \mathrm{Lie}_l \mathcal{L} \quad \text{и} \quad X_2 = e^{y_n \mathrm{ad}\, Z_n} X_1.$$

В силу условий теоремы $\nu_{\mathrm{Lie}_l \mathcal{L}}(Z_{n-1}, \mathrm{ad}_{Z_n}^i f(u)) = k-i$ и верно разложение

$$e^{y_{n-1} \mathrm{ad}\, Z_{n-1}} \mathrm{ad}_{Z_n}^i f(u) = \sum_{j=0}^{k-i} y_{n-1}^j \mathrm{ad}_{Z_{n-1}}^j \mathrm{ad}_{Z_n}^i f(u) + X_i, \tag{2}$$

так как $X_i \in \underset{C^\infty(M)}{\mathrm{span}}\ \mathrm{Lie}_l \mathcal{L}$ $(0 \leqslant i \leqslant k)$.

Подставляя (2) в (1), получаем

$$e^{y_{n-1} \mathrm{ad}\, Z_{n-1}} e^{y_n \mathrm{ad}\, Z_n} f(u) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} y_n^i y_{n-1}^j \mathrm{ad}_{Z_{n-1}}^j \mathrm{ad}_{Z_n}^i f(u) + X_3, \qquad X_3 \in \underset{C^\infty(M)}{\mathrm{span}}\ \mathrm{Lie}_l \mathcal{L}.$$

Продолжая таким образом, получаем

$$e^{y_1 \mathrm{ad}\, Z_1} e^{y_2 \mathrm{ad}\, Z_2} \ldots e^{y_n \mathrm{ad}\, Z_n} f(u) = \sum_{i_1=0}^{k} \sum_{i_2=0}^{k-i_1}$$

$$\sum_{i_3=0}^{k-i_1-i_2} \ldots \sum_{i_n=0}^{k-|i|+i_n} y^i \mathrm{ad}_Z^i f(u) + X, \tag{3}$$

$$X \in \underset{C^\infty(M)}{\mathrm{span}}\ \mathrm{Lie}_l \mathcal{L}.$$

Аналогичным образом доказывается разложение

$$e^{y_{\sigma(1)}\operatorname{ad} Z_{\sigma(1)}} e^{y_{\sigma(2)}\operatorname{ad} Z_{\sigma(2)}} \ldots e^{y_{\sigma(n)}\operatorname{ad} Z_{\sigma(n)}} f(u) =$$

$$= \sum_{i_{\sigma(1)}=0}^{k} \sum_{i_{\sigma(2)}=0}^{k-i_{\sigma(1)}} \sum_{i_{\sigma(3)}=0}^{k-i_{\sigma(1)}-i_{\sigma(2)}} \ldots \sum_{i_{\sigma(n)}=0}^{k-\uparrow i\uparrow+i_{\sigma(n)}} y^{\sigma(i)} \operatorname{ad}_Z^{\sigma(i)} f(u) + \bar{X},$$

здесь $\bar{X} \in \operatorname{span}_{C^\infty(M)} \operatorname{Lie}_l \mathcal{L}$ и σ – любой элемент из S_n – группа подстановок порядка n. Очевидно, что при всех $\sigma \in S_n$, $x \in M$, $y \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}_+$ верно включение

$$x \circ \exp\{t(e^{y_{\sigma(1)}\operatorname{ad} Z_{\sigma(1)}} e^{y_{\sigma(2)}\operatorname{ad} Z_{\sigma(2)}} \ldots$$

$$\ldots e^{y_{\sigma(n)}\operatorname{ad} Z_{\sigma(n)}} f(u))\} \in \mathrm{SS}_f(M)x. \tag{4}$$

Пользуясь методом больших коэффициентов, из разложения вида (3) и включения (4) получаем $\langle \operatorname{odd} \operatorname{ad}_{\mathcal{L}}^k f(u) \rangle$ – аппроксимативную группу системы. Таким образом, доказано, что $\langle \mathcal{L} \cup \operatorname{odd} \operatorname{ad}_{\mathcal{L}}^k f(u) \rangle$ – аппроксимативная группа системы σ_f, а вместе с этим и теорема 9.

Ранговые условия управляемости. Условие полноты ранга, $\operatorname{rank}_x \sigma_f = \dim M$ при всех $x \in M$, позволяет исследовать управляемость системы σ_f с помощью аппроксимативных групп, т.е. из транзитивности группы следует управляемость системы σ_f. Вместе с тем, если группа имеет вид $\langle \mathcal{L} \rangle$, где $\mathcal{L}$ – семейство гладких векторных полей, то теорема 3' (Стефана – Суссмана) дает достаточное условие транзитивности, которое для вещественно-аналитических векторных полей является также необходимым, т.е. верно

Предложение 1.7. *Если $\mathcal{L} \subset C^l(M, TM)$, то группа $\langle \mathcal{L} \rangle$ транзитивна тогда (и только тогда в вещественно-аналитическом случае, $\mathcal{L} \subset C^\omega(M, TM)$), когда* $\operatorname{rank}_x \operatorname{Lie}_l \mathcal{L} = \dim M$ *при всех $x \in M$.*

Это утверждение вместе с теоремой 1.4 и предложением 1.6 позволяет получить ранговые условия управляемости, которые являются обобщением классических результатов Р.Е. Калмана [99], Н.Н. Красовского [35, 36].

Предложение 1.8. *Пусть $\mathcal{L} \subset C^l(M, TM)$ и $\langle \mathcal{L} \rangle$ – аппроксимативная группа системы σ_f: $\dot{x} = f(x, u)$, $u \in \mathcal{K}(V)$. Тогда если* $\operatorname{rank}_x \sigma_f = \dim M$ *при всех $x \in M$, то из условия полноты ранга* $\operatorname{rank}_x \operatorname{Lie}_l \mathcal{L} = \dim M$ *для любого $x \in M$ следует $\sigma_f \in \mathcal{Y}(\mathcal{K}(V), M)$.*

Ранговое условие управляемости системы $\dot{x} = f(x, u) + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x)$ имеет следующий вид.

Теорема 1.10 [67, 84, 85, 89]. *Если семейство $\{f(x, u);\ u \in \mathbf{R}^m\} \subset C^{l,0}(M \times V, TM)$ равномерно ограничено в $C^1(K, TK)$ на любом компакте $K \subset M$, $\mathbf{B} \subset C^l(M, TM)$ и для любого $x \in M$* $\operatorname{rank}_x \operatorname{Lie}_l(\mathbf{B}) = \dim M$, *то $\Sigma(f, \mathbf{B}) \in \mathcal{Y}_0(M, \mathcal{K}(\mathbf{R}^m))$.*

Доказательство утверждения сводится к применению следствия 1 теоремы 1.6 и предложения 1.8. Если M – компактное риманово многообразие с мерой $\mu(V) = \int\limits_V \sqrt{g}\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, где $\sqrt{g}\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ – элемент объема, ассоциированный с римановой метрикой на M, то ранговое условие управляемости дает

Теорема 1.11 [113]. *Если $f(x, u) \in C^{l,0}(M \times V, TM)$, M – компактное риманово многообразие и найдется такое множество $\{v_i\}_{i=1}^m \subset V$, что векторные поля $f(x, v_1), \ldots, f(x, v_m)$ консервативны по мере $\mu(V) = \int\limits_V \sqrt{g}\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ и $\operatorname{rank}_x \operatorname{Lie}_l\{f(x, v_i)\}_{i=1}^m = \dim M$ при всех $x \in M$, то $\sigma_f \in \mathcal{Y}(M, \mathcal{K}(V))$.*

Это утверждение следует из теоремы 1.8 и предложения 1.8.

Теперь сформулируем достаточное условие управляемости системы $\Sigma(f, \mathbf{B})$: $\dot{x} = f(x) + \sum\limits_{i=1}^m u_i b_i(x)$, используя метод расширения аппроксимативной группы.

Теорема 1.12. *Пусть $f, \mathbf{B} \subset C^\infty(M, TM)$, допустимые управления берутся из $\mathcal{K}(\mathbf{R}^m)$ и имеется следующая последовательность множеств векторных полей $\{\theta_i\}_{i=0}^\gamma$ (здесь γ может быть и бесконечным): $\theta_0 = \mathbf{B}$, $\forall 0 \leqslant i \leqslant \gamma\ \exists k_i$ такое, что $\operatorname{ad}_{\theta_i}^{k_i+1} f \subset \underset{C^\infty(M)}{\operatorname{span}} \operatorname{Lie} \theta_i$, $\theta_{i+1} = \operatorname{odd} \operatorname{ad}_{\theta_i}^{k_i} f$. Тогда если $\operatorname{rank}_x \operatorname{Lie}\{\bigcup\limits_{i=0}^\gamma \theta_i\} = \dim M$, то $\Sigma(f, \mathbf{B}) \in \mathcal{Y}_0(M, \mathcal{K}(\mathbf{R}^m))$.*

Эта теорема является следствием теоремы 1.9 и предложения 1.8. Из нее вытекает ряд следствий, которые имеют большое значение при анализе управляемости полиномиальных систем.

Следствие 1 [90, 107]. *Пусть $f, \mathbf{B} \in C^\infty(M, TM)$ и $\mathbf{I}(\mathbf{B})$ – идеал алгебры $\operatorname{Lie}(f, \mathbf{B})$, порожденный множеством $\mathbf{B}$. Тогда, если $[\mathbf{B}, \mathbf{I}(\mathbf{B})] \subset \underset{C^\infty(M)}{\operatorname{span}} \mathbf{B}$ и $\operatorname{rank}_x \mathbf{I}(\mathbf{B}) = \dim M$ при всех $x \in M$, то $\Sigma(f, \mathbf{B}) \in \mathcal{Y}_0(M, \mathcal{K}(\mathbf{R}^m))$.*

Следствие 2. *Пусть $M = \mathbf{R}^n$ и $f(x)$ – полиномиальное векторное поле и $b_1, \ldots, b_m$ – постоянные векторные поля. Тогда если θ_i – множество постоянных векторных полей из $\operatorname{odd} \operatorname{ad}_{\theta_{i-1}}^i f$, $\theta_0 = \mathbf{B}$ и $\operatorname{rank}\{\bigcup\limits_{i=0}^\infty \theta_0\} = n$, то $\Sigma(f, \mathbf{B}) \in \mathcal{Y}_0(\mathbf{R}^n; \mathcal{K}(\mathbf{R}^m))$.*

Интересно, что при однородном нечетном полиномиальном поле $f(x)$ (т.е. $f(kx) = k^{2\rho+1} f(x)$, где ρ – натуральное число) условия следствия 2 являются не только достаточными, но и необходимыми для управляемости системы $\Sigma(f, \mathbf{B})$. Именно, верно следующее обобщение критерия Калмана [35].

Следствие 3 [95]. *Пусть $M = \mathbf{R}^n$, $f(x)$ – однородное полиномиальное векторное поле нечетной степени и $b_1, \ldots, b_m \subset \mathbf{R}^n$. Тогда $\Sigma(f, \mathbf{B}) \in \mathcal{Y}_0(\mathbf{R}^n, \mathcal{K}(\mathbf{R}^m))$ в том и только том случае, когда $\operatorname{rank} \mathcal{L} = n$, где $\mathcal{L}$ – постоян-*

ные векторные поля алгебры Lie $(f, \mathbf{B})$. *Достаточность этого утверждения вытекает из следствий* 1, 2, *а необходимость получается после подсчета ранга системы* $\Sigma(f, \mathbf{B})$ *в точке нуль.*

В работах [113, 87] приведены примеры, которые показывают, что с помощью проверки условий типа полноты ранга не всегда удается исследовать управляемость системы. В следующем пункте описана более тонкая техника, основанная на топологической теории слоений и редуцирований исходной системы к системе меньшей размерности.

Методы топологической теории слоений и редуцирование к системе меньшей размерности. Впервые техника редуцирования к системе меньшей размерности была предложена А.Ю. Федоровым [46] и развита в регулярном случае. Затем Аграчев А.А. и Сарычев А.В. в работе [6] получили формулу для редуцирования системы также в случае регулярного слоения $\mathfrak{B}$, задаваемого системой $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x)$. Топологические методы исследования управляемости в нерегулярном случае были описаны в работах [19–21, 23]. Основой для этого послужило понятие системы на слоении.

Определение 1.4 [19, 20, 21, 23]. *Если задано непрерывно-дифференцируемое слоение* $\mathfrak{F}$ *многообразия* M, *то система* σ_f: $\dot{x} = f(x, u)$ $(f(x, u) \in C^{l,0}(M \times V, TM)$, $l \geqslant 1)$; *индуцирует систему на слоении* $\mathfrak{F}$ *следующим образом. Пусть* $\mathfrak{F}_x \in \mathfrak{F}$ – *такой слой, что* $x \in \mathfrak{F}_x$. *Тогда соответствие* $\Sigma_f^{t,u}(\mathfrak{F}_y) = \mathfrak{F}_{x_f^u(t,y)}$, *продолженное с помощью суперпозиции*

$$\Sigma_f^{t_n, u_n}(\ldots(\Sigma_f^{t_1, u_1}(\mathfrak{F}_y))\ldots) = \Sigma_f^{T, \bar{u}}(\mathfrak{F}_y),$$

где $\bar{u}(t) = u_i(t - \sum_{j=0}^{i-1} t_j)$ *при*

$$\sum_{j=0}^{i-1} t_j \leqslant t \leqslant \sum_{j=0}^{i} t_j, \qquad T = \sum_{i=1}^{n} t_i, \quad t_0 = 0, \quad t_i > 0 \ (i = 1, \ldots, n),$$

называется системой Σ_f *на слоении* $\mathfrak{F}$.

Если $\Sigma_f^{T, \bar{u}}(\mathfrak{F}_y) = \mathfrak{F}_z$, то говорим, что система Σ_f переводит слой $\mathfrak{F}_y$ в $\mathfrak{F}_z$. Далее символы $T, \bar{u}$ в записи $\Sigma_f^{T, \bar{u}}(\mathfrak{F}_y) = \mathfrak{F}_z$ не указываются. На рис. 1 показано, каким образом система может переводить один слой в другой.

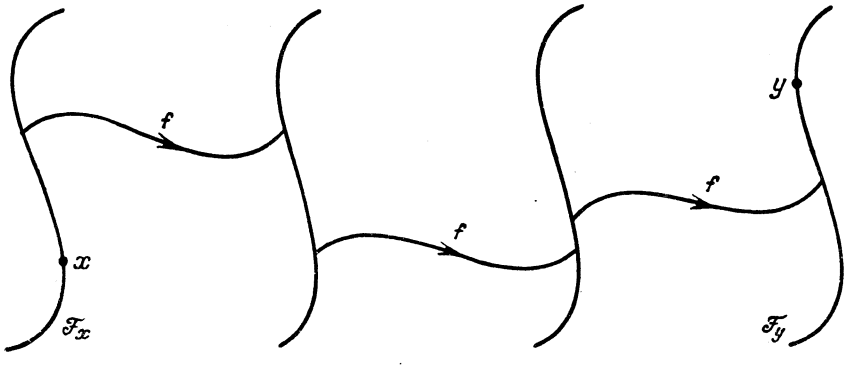

Рис. 1

Понятие управляемости для систем на слоении вводит

Определение 1.5 [19, 20, 21, 23]. Если система Σ_f переводит любые два слоя $\mathcal{F}_x$, $\mathcal{F}_y \in \mathcal{F}$ один в другой, то говорим, что система Σ_f управляема на слоении $\mathcal{F}$, и пишем $\Sigma_f \in \mathcal{Y}(\mathcal{F})$.

В качестве управляемой на слоении $\mathcal{F}$ системы приведем следующий

Пример 1.2. Пусть M – многообразие с нормированной мерой μ (локально эквивалентной объему в евклидовом пространстве) и система $\dot{x} = f(x)$ задает эргодический поток на M. Тогда если M допустимо для слоения $\mathcal{F}$, то система Σ_f управляема на $\mathcal{F}$. Напомним, что связное многообразие M называется допустимым для слоения $\mathcal{F}$, если для любого $x \in M$ множество $M \setminus \mathcal{F}_x$ несвязно.

Если G – группа отображений из M в M, то через $\mathcal{F}(G)$ обозначим слоение M на орбиты $\mathcal{F}_x(G) = Gx = \{g(x);\ g \in G\}$. Справедлива следующая

Теорема 1.13 [19, 20, 21, 23]. *Если G – аппроксимативная для σ_f группа гомеоморфизмов многообразия M на себя, $\mathcal{F}(G)$ – непрерывно-дифференцируемое слоение M и при всех $x \in M$ справедливо включение $x \in \overline{\operatorname{int} SS_f(M)x}$,* то $\sigma_f \in \mathcal{Y}(M, \mathcal{K}(V))$ *тогда и только тогда, когда* $\Sigma_f \in \mathcal{Y}(\mathcal{F}(G))$.

Из этой теоремы видно, что в случае общего положения анализ управляемости системы σ_f сводится к исследованию управляемости системы Σ_f на слоении $\mathcal{F}(G)$.

Перейдем к исследованию управляемости системы Σ_f на слоении $\mathcal{F}$, но прежде введем топологическое пространство $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ слоения $\mathcal{F}$. Множество слоев $\mathcal{F}$ с финальной топологией, порожденной отображением

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}\colon M \to \mathcal{F}, \qquad \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(x) = \mathcal{F}_x,$$

называется топологическим пространством $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ слоения $\mathcal{F}$. Сначала рассмотрим регулярный случай, т.е. M индуцирует на $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ структуру многообразия и $\mathcal{F}$ задается системой $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x)$, $u \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{B} \subset C^l(M, TM)$, $l \geqslant 1$, $\mathbf{B} = \{b_i\}_{i=1}^{m}$. В этих условиях можно задать семейство векторных полей на $\mathcal{M}(\mathcal{F})$, управляемость которого эквивалентна глобальной управляемости системы σ_f с аппроксимативной группой $\langle \operatorname{Lie}_l \mathbf{B} \rangle$.

Теорема 1.14 [6]. *Пусть M индуцирует структуру многообразия на $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G)$, где $G = \langle \varphi_i \rangle_{i=1}^{k}$, здесь $k \geqslant m$, $\langle \operatorname{Lie}_l \mathbf{B} \rangle = \langle \varphi_i \rangle_{i=1}^{k}$, $[\varphi_i, \varphi_j] = 0$ для любых $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Тогда $\Sigma_f \in \mathcal{Y}(\mathcal{F})$ в том и только том случае, когда семейство векторных полей $\mathcal{P} =$* [замыкание в $T_x M$ (при каждом $x \in M$) множества

$$\{e^{y_1 \operatorname{ad} \varphi_1} e^{y_2 \operatorname{ad} \varphi_2} \ldots e^{y_k \operatorname{ad} \varphi_k} f(u);\ (u, y) \in V \times \mathbf{R}^l\}]$$

глобально управляемо на $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ посредством $(u, y) \in \mathcal{K}(V \times \mathbf{R}^l)$.

Доказательство сводится к применению теоремы 1.13 и проверке корректности определения семейства $\mathcal{P}$ на $\mathcal{M}(\mathcal{F})$.

Перейдем к изучению нерегулярного случая. Предположим, что слоение $\mathcal{F}$ локально коориентируемое, т.е. каждый слой $\mathcal{F}_x \in \mathcal{F}$ обладает окрестностью $\mathcal{O}(\mathcal{F}_x)$, ограничение слоения $\mathcal{F}$ на которую коориентируемо в обычном смысле. Пусть E_f – множество слоев, обладающих следующим свойством:

найдутся такие точки $y, z \in \mathcal{F}_x$, $u_y, u_z \in V$, что $f(z, u_z)$, $f(y, u_y)$ задают противоположные коориентации.

Тогда имеет место

Теорема 1.15 [19, 20, 21, 23]. *Если слоение $\mathcal{F}$ локально коориентируемо и* codim $\mathcal{F}=1$, *то* $\mathcal{F}=E_f$ *влечет* $\Sigma_f \in \mathcal{Y}(\mathcal{F})$.

В ряде случаев равенство $\mathcal{F}=E_f$ является необходимым условием того, что $\Sigma_f \in \mathcal{Y}(\mathcal{F})$. Именно, справедлива

Теорема 1.16 [19, 20, 21, 23]. *Если слоение $\mathcal{F}$ локально коориентируемо,* codim $\mathcal{F}=1$ *и для любого* $x \in M$ $M \setminus \mathcal{F}_x$ *несвязно, то* $\Sigma_f \in \mathcal{Y}(\mathcal{F})$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{F}=E_f$.

Условие $\mathcal{F}=E_f$ слишком обременительно и не всегда выполняется. Опишем более тонкий подход к анализу управляемости, основанный на теории графов.

Множество слоев $\mathcal{F}$ с финальной топологией, порожденной отображением

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}\colon M \to \mathcal{F}, \qquad \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(x)=\mathcal{F}_x,$$

называется топологическим пространством $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ слоения $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ гомеоморфно склейке Ξ не более чем счетных семейств интервалов $\{\mathrm{I}_i\}$, $\mathrm{I}_i=\{z \in \mathbf{R};\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ и полуинтервалов $\mathrm{J}_i=\{z \in \mathbf{R};\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, то слоение $\mathcal{F}$ называется предхаусдорфовым. Отождествив неотделимые друг от друга по Хаусдорфу точки склейки, получим хаусдорфово топологическое пространство $\Gamma(\Xi)$, которое именуют графом склейки. Его вершинами являются концы интервалов $\{\mathrm{I}_i\}$, полуинтервалов $\{\mathrm{J}_i\}$, а также образы нехаусдорфовых точек после отождествления. Пусть $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{l}$ – совокупность ребер графа $\Gamma(\Xi)$ с какой-либо фиксированной ориентацией, а $\mathcal{P}$ – естественная проекция, $\mathcal{P}\colon \mathcal{M}(\mathcal{F}) \to \Gamma(\Xi)$. На множествах $\mathcal{M}_i(\mathcal{F})=\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$ зададим отношения порядка:

пишем $\mathcal{F}_x \prec \mathcal{F}_y$, если из $\mathcal{P}(\mathcal{F}_x)$ можно попасть в $\mathcal{P}(\mathcal{F}_y)$, двигаясь в соответствии с ориентацией на $\mathcal{O}_i$.

Введем множества $E^+(\mathcal{M}_i(\mathcal{F}))$, $E^-(M_i(F))$. Будем считать, что $\mathcal{F}_x \in E^+(\mathcal{M}_i(\mathcal{F}))$ $(\mathcal{F}_x \in E^-(\mathcal{M}_i(\mathcal{F})))$, если найдутся такие $\tau>0$, $z \in \mathcal{F}_x$, $u \in \mathcal{K}(V)$, $u\colon [0,\tau] \to V$, что при всех $t_1, t_2 \in [0,\tau]$ неравенство $t_1 \leqslant t_2$ влечет

$$\mathcal{F}_{x_f^u(t_1,\,z)} \prec \mathcal{F}_{x_f^u(t_2,\,z)} \left(\mathcal{F}_{x_f^u(t_2,\,z)} \prec \mathcal{F}_{x_f^u(t_1,\,z)}\right).$$

Дополнив $\Gamma(\Xi)$ новыми вершинами – граничными точками множеств $\mathcal{P}(E^{\pm}(\mathcal{M}_i(\mathcal{F})))$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$ – и новыми ориентированными ребрами – связными компонентами множеств $\mathcal{P}(E^{\pm}(\mathcal{M}_i(\mathcal{F})))$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, – получим граф системы Σ_f на слоении $\mathcal{F}$, который обозначим $\Gamma_f(\mathcal{F})$. Ориентацию графа индуцирует собственная ориентация множеств $E^{\pm}(\mathcal{M}_i(\mathcal{F}))$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, которая может отличаться от порядка следования слоев из $\mathcal{M}_i(\mathcal{F})$.

Определение 1.6 (условия проходимости) [19, 20, 21, 23]. Пусть ребро $\mathcal{O}_j$ графа $\Gamma_f(\mathcal{F})$ есть связная компонента множества

$$\mathcal{P}(E^+(\mathcal{M}_i(\mathcal{F}))) \ \left(\mathcal{P}(E^-(\mathcal{M}_i(\mathcal{F})))\right).$$

Говорим, что ребро $\mathcal{O}_j$ проходимо, если из того, что $\mathcal{F}_z$ – нижняя (верхняя) грань множества $\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{O}_j)$ следует $\forall\ \mathcal{F}_x \in \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{O}_j)$, $\mathcal{F}_z \prec \mathcal{F}_x$ $(\mathcal{F}_x \prec \mathcal{F}_z)$, справедливость равенства $\Sigma_f(\mathcal{F}_z)=\mathcal{F}_x$.

Пусть v_n – такая вершина графа $\Gamma_f(\mathcal{F})$, что $\mathcal{P}^{-1}(v_n)=\{\mathcal{F}_{x_i}\}$ – слои, неотделимые друг от друга по Хаусдорфу в смысле топологии $\mathcal{M}(\mathcal{F})$. Такую v_n называем α-вершиной. Говорим, что α-вершина v_n проходима, если для любого смежного с v_n ребра $\mathcal{O}_j \subset E^+(\mathcal{M}_i(\mathcal{F}))$ $(\mathcal{O}_j \in E^-(\mathcal{M}_i(\mathcal{F})))$ существуют $\mathcal{F}_{x_k} \in \{\mathcal{F}_{x_i}\}$, $z \in \mathcal{F}_{x_k}$, $u \in$

$\in V$, $\mathcal{O}(z)$ – окрестность точки z в смысле топологии M такие, что при всех $x \in \mathcal{O}(z) f(x, u) \in T_x \mathcal{F}_x$ и для каждого $x^0 \in \mathcal{O}(z) \cap (\mathcal{P}_{\mathcal{F}} \circ \mathcal{P})^{-1}(\mathcal{O}_j)$ найдется такое $\tau > 0$, что для любых $t_1, t_2 \in [0, \tau]$, $t_1 \leqslant t_2$ имеем

$$\mathcal{F}_{x_f^u(t_1, x^0)} \prec \mathcal{F}_{x_f^u(t_2, x^0)} \left(\mathcal{F}_{x_f^u(t_2, x^0)} \prec \mathcal{F}_{x_f^u(t_1, x^0)} \right).$$

Напомним, что ориентированный граф называется связным, если из любой его вершины можно попасть в наперед заданную, двигаясь по ребрам графа в соответствии с их ориентацией. Существуют конструктивные способы проверки связности орграфа. Непосредственным следствием введенных понятий является

Теорема 1.17 [19, 20, 21, 23]. *Если $\mathcal{F}$ – предхаусдорфово слоение, все ребра и α-вершины графа $\Gamma_f(\mathcal{F})$ проходимы, то $\Sigma_f \in \mathcal{Y}(\mathcal{F})$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_f(\mathcal{F})$ связен.*

Следствие 1. *Если $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ гомеоморфно окружности S^1, то $\Sigma_f \in \mathcal{Y}(\mathcal{F})$ тогда и только тогда, когда либо $E_f^+(\mathcal{M}(\mathcal{F}))$ проходимо и $E^+(\mathcal{M}(\mathcal{F})) = \mathcal{M}(\mathcal{F})$, либо $E^-(\mathcal{M}(\mathcal{F}))$ проходимо и $E_f^-(\mathcal{M}(\mathcal{F})) = \mathcal{M}(\mathcal{F})$.*

Аппроксимативные группы и теория систем на слоениях играют важную роль в анализе управляемости нелинейных систем. Возможности этого подхода иллюстрируются далее при исследовании управляемости гиперпространственных систем.

Гиперпространственные системы. Следуя работам [109, 110], гиперпространственной будем называть систему σ_f, у которой существует такая аппроксимативная группа G, что каждый слой $\mathcal{F}_x(G)$ слоения $\mathcal{F}(G)$ является гладким подмногообразием из M коразмерности единица. Среди нелинейных систем управляемость гиперпространственных систем наиболее хорошо изучена. Этот вопрос затронут в значительном числе публикаций [24–27, 59, 88, 89, 91, 92, 109, 110]. К гиперпространственным системам относятся также двумерные системы, аффинно-зависящие от управления, исследование управляемости которых, в основном, завершено [17, 18, 21, 22, 25, 91]. Имеются результаты по глобальной управляемости и стабилизации кусочно-линейных гиперпространственных систем [109, 110]. Почти во всех перечисленных работах, за исключением лишь [109, 110], анализ управляемости сводится к применению теорем 15–17 и различных их модификаций, зависящих от конкретного вида системы.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{P}}^{-1}(0)$ статическую характеристику систем $\Sigma(f, \mathbf{B})$, т.е.

$$\tilde{\mathcal{P}}^{-1}(0) = \{ x \in M;\ \exists u^* \in V \subset \mathbf{R}^m,$$

$$f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} u_i^* b_i(x) = 0, \quad \text{где} \quad \dim M = n \}.$$

Если f, $\mathbf{B} = \{ b_1, \ldots, b_{n-1} \} \subset C^\omega(M, TM)$ и $V = \mathbf{R}^m$, то $\langle \mathrm{Lie}\, \mathbf{B} \rangle$ – аппроксимативная группа системы $\Sigma(f, \mathbf{B})$ и по теореме 1.3 равенство $\dim_x \mathrm{Lie}\, \mathbf{B} = n - 1$ означает, что система $\Sigma(f, \mathbf{B})$ является гиперпространственной. Обозначим через $\mathcal{B}$ слоение M, задаваемое группой $\langle \mathrm{Lie}\, \mathbf{B} \rangle$.

В работе [59] доказана следующая модификация теоремы 1.15.

Теорема 1.18 [59]. *Если $\tilde{\mathcal{P}}^{-1}(0)$ связно, для любого $x \in M$ $\mathcal{B}_x \cap \tilde{\mathcal{P}}^{-1}(0) \neq \phi$ и выполнены следующие условия трансверсальности:*

$$f \pitchfork \mathcal{B}, \quad f \pitchfork \tilde{\mathcal{P}}^{-1}(0), \qquad \tilde{\mathcal{P}}^{-1}(0) \pitchfork \mathcal{B}.$$

(Здесь $f \pitchfork \mathcal{B}$ ($f \pitchfork \tilde{\mathcal{P}}^{-1}(0)$) означает трансверсальность отображения f каждому слою $\mathcal{B}_x$ (или $\tilde{\mathcal{P}}^{-1}(0)$), рассматриваемому как подмногообразие из TM коразмерности единица; $\tilde{\mathcal{P}}^{-1}(0) \pitchfork \mathcal{B}$ означает трансверсальность $T\tilde{\mathcal{P}}^{-1}(0)$ и $\mathcal{B}$ как подмногообразий из TM), то $\Sigma(f, \mathcal{B}) \in \mathcal{Y}(M, \mathcal{K}(\mathbf{R}^{n-1}))$.)

Рассмотрим управляемость специального типа гиперпространственных систем, называемых потенциальными.

Определение 1 [19, 20, 21, 23]. Система σ_f называется потенциальной, если существует такая аппроксимативная группа G системы σ_f, что слои слоения $\mathcal{F}(G)$ суть поверхности уровня некоторой C^1-субмерсии $W: M \to \mathbf{R}$.

Это означает, что для любого слоя $\mathcal{F}_x \in \mathcal{F}(G)$ найдется такое $c \in \mathbf{R}$, что $\mathcal{F}_x$ – связная компонента множества $\{y \in M;\ W(y) = c\}$. Изучим управляемость потенциальной системы σ_f на M посредством класса управлений $\mathcal{K}(V)$.

Для удобств формулировок введем отображение

$$\mathcal{P}: M \times V \to \mathbf{R}, \quad \mathcal{P}(y, u) = (dW(x_f^u(t, y))/dt)\big|_{t=0}.$$

Другими словами, $\mathcal{P}(y, u)$ – производная $W(x)$ по направлению кривой $x_f^u(t, y)$ при $t = 0$. Непосредственным следствием теорем 13, 15 является

Теорема 1.19 [23, 20]. *Пусть σ_f – потенциальная система,* $\operatorname{int} \mathrm{SS}_{-f}(M)x \neq \neq \phi$ *для всех $x \in M$ и C^1-субмерсия $W(x): M \to \mathbf{R}$ задает слоение $\mathcal{F}(G)$, где G – аппроксимативная группа системы σ_f. Тогда если на каждом слое $\mathcal{F}_x \in \mathcal{F}(G)$ найдутся такие точки $y, z \in \mathcal{F}_x$, что $\mathcal{P}(y, \bar{u}) > 0$, $\mathcal{P}(z, \tilde{u}) < 0$ при некоторых $\bar{u}, \tilde{u} \in V$, то $\sigma_f \in \mathcal{Y}(\mathcal{K}(V), M)$.*

Аналогичным образом из теоремы 16 следует

Теорема 1.20 [23, 20]. *Пусть σ_f – потенциальная система,* $\operatorname{int} \mathrm{SS}_f(M)x \neq \neq \phi$ *для всех $x \in M$ и C^1-субмерсия $W: M \to \mathbf{R}$ задает слоение $\mathcal{F}(G)$, G – аппроксимативная группа системы σ_f; кроме того, для любого $\mathcal{F}_x \in \mathcal{F}(G)$ множество $M \setminus \mathcal{F}_x$ несвязно. Тогда $\sigma_f \in \mathcal{Y}(\mathcal{K}(V), M)$ в том и только том случае, когда на всяком слое $\mathcal{F}_x \in \mathcal{F}(G)$ найдутся точки $y, z \in \mathcal{F}_x$ такие, что $\mathcal{P}(y, \bar{u}) < 0$, $\mathcal{P}(z, \tilde{u}) > 0$ при некоторых $\tilde{u}, \bar{u} \in V$.*

Обозначим $\mathcal{P}_v^{-1}(0) = \{x \in M;\ \mathcal{P}(x, v) = 0\}$. Предъявив дополнительные требования к функции $\mathcal{P}(x, v)$ и слоению $\mathcal{F}(G)$, можно получить различные следствия сформулированных теорем, например справедливо следующее

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 19, для любого $u \in V$ отображение $\mathcal{P}(\cdot, u): M \to \mathbf{R}$ есть C^1-субмерсия и для любого $x \in M$ найдется такое $v \in V$, что слой $\mathcal{F}_x$ трансверсально пересекает $\mathcal{P}_v^{-1}(0)$, то $\sigma_f \in \mathcal{Y}(\mathcal{K}(V), M)$.*

До сих пор мы исследовали управляемость при условии, что многообразие M не имеет края. Как показано в работах [21, 23], управляемость потенциальной гиперпространственной системы на многообразии с краем является хрупким свойством, т.е. исчезающим либо при малых шевелениях векторных полей, либо при слабых деформациях границы ∂M многообразия M [21, 23]. Исследуем управляемость гиперповерхностной потенциальной системы $\Sigma(f, \mathbf{B})$: $\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x)$ в области $\mathcal{D} \subset M$ ($\mathcal{D}$ – открытое связное множество). Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{D})$ слоение области $\mathcal{D} \subset M$, которое задается системой $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i(x)$. Если $W(x)$: $\mathcal{D} \to \mathbf{R}$ есть непрерывная функция на $\bar{\mathcal{D}}$, то через $\arg\operatorname{loc}\max_{\bar{\mathcal{D}}} W(x)$, $\arg\operatorname{loc}\min_{\bar{\mathcal{D}}} W(x)$ обозначим те точки многообразия $\bar{\mathcal{D}}$ в которых функция $W(x)$ принимает, соответственно, локально-максимальные и локально-минимальные значения. Используя введенные обозначения, приведем необходимое условие управляемости потенциальной гиперповерхностной системы $\Sigma(f, \mathbf{B})$ на многообразии

$$\mathcal{D} \subset \operatorname{int} M, \quad \dim \mathcal{D} = \dim M.$$

Теорема 1.21 [23]. *Пусть область $\mathcal{D}$ допустима для локально коориентируемого слоения $\mathcal{B}(\mathcal{O}(\bar{\mathcal{D}}))$ ($\mathcal{O}(\bar{\mathcal{D}})$ – некоторая окрестность замыкания области $\mathcal{D}$), которое задается линиями уровня субмерсии $W \in C^1(\mathcal{O}(\bar{\mathcal{D}}), \mathbf{R})$. Тогда если $\Sigma(f, \mathbf{B}) \in \mathcal{Y}(\mathcal{D}, \mathcal{K}(\mathbf{R}^m))$, то каждая связная компонента множества* $\arg\operatorname{loc}\max\limits_{\partial\mathcal{D}} W \cup \arg\operatorname{loc}\min\limits_{\partial\mathcal{D}} W$ *имеет непустое пересечение с* $\mathcal{P}^{-1}(0)$.

При некоторых дополнительных предположениях теорема 1.21 дает не только необходимое, но и достаточное условие управляемости. Именно, справедлива

Теорема 1.22 [23]. *Пусть выполнены условия теоремы 1.21 и, кроме того, слоение $\mathcal{B}$ трансверсально к $\mathcal{P}^{-1}(0) \cap \mathcal{D}$ в M, $\mathcal{D}$ – односвязная область из $\operatorname{int} M$, $\mathcal{P}^{-1}(0) \cap \bar{\mathcal{D}}$ – связное множество и $\mathcal{P}^{-1}(0)$ трансверсально границе $\partial\mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$. Тогда $\Sigma(f, \mathbf{B}) \in \mathcal{Y}(\mathcal{D}, \mathcal{K}(\mathbf{R}^m))$ в том и только том случае, когда любая связная компонента множества*

$$\arg\operatorname{loc}\max_{\partial\mathcal{D}} W \cup \arg\operatorname{loc}\min_{\partial\mathcal{D}} W$$

имеет непустое пересечение с $\mathcal{P}^{-1}(0)$.

В качестве следствия из теорем 1.21, 1.22 сформулируем конструктивно проверяемое условие управляемости линейной гиперповерхностной системы $\Sigma(\mathbf{A}x, \mathbf{B})$:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i, \qquad x \in \mathbf{R}^n,$$

при наличии фазовых ограничений, задаваемых выпуклой областью $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$. В данном случае $W(x) = \mathbf{R}_B(x) = \det(x, b_1, \ldots, b_{n-1})$, где $\det(x, b_1, \ldots, b_{n-1})$ – определитель матрицы $(x, b_1, \ldots, b_{n-1})$, задаваемой столбцами $x, b_1, \ldots, b_{n-1}$.

Следствие 1. *Если $\mathcal{D}$ – выпуклая область, то $\Sigma(\mathbf{A}x, \mathbf{B}) \in \mathcal{Y}(\mathcal{D}, \mathcal{K}(\mathbf{R}^{n-1}))$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}^{-1}(0) \cap \operatorname{int} \mathcal{D} \neq \phi$ и* $\arg\max\limits_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{R}_B(x) \cap \mathcal{P}^{-1}(0) \cap \partial\mathcal{D} \neq \phi$, $\arg\min\limits_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{R}_B(x) \cap \mathcal{P}^{-1}(0) \cap \partial\mathcal{D} \neq \phi$.

В заключение этой части приведем пример анализа управляемости системы $\Sigma(\mathbf{A}x, \mathbf{B})$ в выпуклой области $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n;\ \langle x, Tx \rangle < 1\}$, где $\langle x, Tx \rangle$ – положительно определенная квадратичная форма, T – ее матрица, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – обычное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$. Поскольку $0 \in \mathcal{P}^{-1}(0) \cap \Omega$, то $\mathcal{P}^{-1}(0) \cap \Omega \neq \phi$. Используя правило множителей Лагранжа, получаем

$$\arg\max_{\partial\Omega} \mathbf{R}_B(x) = \frac{1}{\langle T^{-1}\rho, \rho \rangle} T^{-1}\rho,$$

$$\operatorname{arf}\min_{\partial\Omega} \mathbf{R}_B(x) = -\frac{1}{\langle T^{-1}\rho, \rho \rangle} T^{-1}\rho,$$

где $\rho = b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_{n-1}$ – векторное произведение векторов $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$. Используя следствие 1, получаем $\Sigma(\mathbf{A}x, \mathbf{B}) \in \mathcal{Y}(\Omega, \mathcal{K}(\mathbf{R}^{n-1}))$ тогда и только тогда, когда $\langle \mathbf{A}T^{-1}\rho, \rho \rangle = 0$. Нетрудно заметить, что $\operatorname{grad} \mathbf{R}_B(x) = \rho$, $\operatorname{grad} \mathcal{P}(x) = \mathbf{A}^*\rho$. Поэтому включение $\Sigma(\mathbf{A}x, \mathbf{B}) \in \mathcal{Y}(\Omega, \mathcal{K}(\mathbf{R}^{n-1}))$ эквивалентно ортогональности векторов $\operatorname{grad} \mathbf{R}_B(x)$ и $\operatorname{grad} \mathcal{P}(x)$ относительно билинейной формы $\langle y, T^{-1}z \rangle$.

Стабилизация движения

Постановка задачи и основные понятия. Рассмотрим систему σ_f

$$\dot{x} = f(x, u)$$

на связном гладком многообразии M. При любом $u \in \mathbf{R}^m$ $f(x, u)$ – полное векторное поле на M, причем $f \in C^{l,k}(M \times \mathbf{R}^m, TM)$. В этом пункте изучается задача стабилизации системы σ_f посредством заданного класса обратных связей $\mathcal{U}$.

Определение 2.1. Пусть $K, U \subset M$, K – компакт. Говорят, что система σ_f стабилизируема в K на U посредством класса обратных связей $\mathcal{U}$, если существует такое управление $u(t, x) \in \mathcal{U}$, что для системы, замкнутой этой обратной связью, K является устойчивым аттрактором с областью притяжения, содержащей U. Напомним, что замкнутое множество $K \subset M$ называется аттрактором системы $\dot{x} = f(x, u(t, x))$ с областью притяжения $\mathbf{A}$, $\mathbf{K} \subset \mathbf{A}$, если для любых момента времени $t_0 \in \mathbf{R}$, окрестности $\mathcal{O}(K)$ компакта K и точек $x^0 \in \mathbf{A}$ найдется такое T, что решение $x^u(t, t_0, x^0) \in \mathcal{O}(K)$ $(x(t_0, t_0, x^0) = x^0)$ при $t > T$. Аттрактор K называется устойчивым, если для любой окрестности $\mathcal{O}_1(K)$ найдется такая окрестность $\mathcal{O}_2(K)$, что для любых $(t_0, x^0) \in \mathbf{R} \times \mathcal{O}_2(K)$ справедливо включение $x(t, t_0, x^0) \in \mathcal{O}_1(K)$ при всех $t \geqslant t_0$.

Если σ_f стабилизируема на U в K посредством $\mathcal{U}$, то пишем $\sigma_f \in \mathrm{St}(\mathcal{U}, U, K)$.

Далее будем интересоваться, главным образом, теми свойствами, которыми должна обладать пятерка $\{M, \sigma_f, \mathcal{U}, U, K\}$, чтобы имело место включение $\sigma_f \in \mathrm{St}(\mathcal{U}, U, K)$.

Сначала несколько упростим задачу, точнее рассмотрим ее локальный аналог. Пусть $K = x^*$, где x^* – некоторая точка из M. Если при $K = x^*$ задача неразрешима, то укажем минимально возможный диаметр окрестности точки x^* с компактным замыканием, при котором возможна локальная стабилизация в некоторой точке из замыкания этой окрестности.

Обозначим через $\operatorname{diam} K$ диаметр множества K, т.е. $\operatorname{diam} K = \sup\limits_{x, y \in K} \rho_M(x, y)$, где $\rho_M(x, y)$ – некоторая фиксированная метрика на M.

Определение 2.2. Если существует такая окрестность $\mathcal{O}(x^*)$ точки x^*, что $\operatorname{diam}\mathcal{O}(x^*) = \epsilon$, и найдется точка $y \in \mathcal{O}(x^*)$, для которой $\sigma_f \in \mathrm{St}(\mathcal{U}, \vartheta(y), y)$, где $\vartheta(y)$ – некоторая окрестность точки y, и, кроме того, не существует окрестности точки x^* меньшего диаметра, удовлетворяющей этим требованиям, то говорят, что система σ_f ϵ-стабилизируема в x^*.

Если система ϵ-стабилизируема в x^* посредством $\mathcal{U}$, то будем писать $\sigma_f \in \mathrm{St}^{\epsilon}(\mathcal{U}, x^*)$. При $\epsilon = 0$ вместо $\mathrm{St}^0(\mathcal{U}, x^*)$ пишем $\mathrm{St}(\mathcal{U}, x^*)$ и соответственно говорим просто о локальной стабилизации в x^*.

Стабилизация по первому приближению. $\mathcal{U} = \mathcal{K}^m(M, \mathbf{R})$ – класс кусочно-непрерывно-дифференцируемых стационарных обратных связей $u(x) \in \mathcal{K}^m(M, \mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда найдется не более чем счетное покрытие компактами $\{K_i\}$ многообразия M; $u(x) \in C^m(\operatorname{int}(K_i), \mathbf{R})$ – непрерывно-дифференцируемые отображения и, кроме того, на любой границе ∂K_i функция $u(x)$ и все ее производные до порядка m могут иметь разрывы только первого рода.

Изучим включение $\sigma_f \in \mathrm{St}(\mathcal{K}(M, \mathbf{R}), x^*)$. Необходимым условием для $\sigma_f \in \mathrm{St}(\mathcal{K}(M, \mathbf{R}), x^*)$ является $x^* \in \mathcal{F}^{-1}(0) = \{x \in M$; существует такое $u \in \mathbf{R}^m$, что $f(x, u) = 0\}$ – статическая характеристика системы σ_f.

Исследуем тот случай, когда, используя первые члены ряда Тейлора для $f(x, u) \in C^{l,k}(M \times \mathbf{R}^m, TM)$ $(l, k > 1)$, можно установить справедливость включения $\sigma_f \in \mathrm{St}(K(M, R), x^*)$. Если это так, то x^* – регулярная точка статической характеристики $\mathcal{F}^{-1}(0)$.

Теорема 2.1. *Пусть $f(x, u) \in C^{l,k}(M \times \mathbf{R}^m, TM)$, $x^* \in \mathcal{F}^{-1}(0)$. Тогда если система*

$$\dot{y} = \frac{\partial f(x^*, u^*)}{\partial x} y + \frac{\partial f(x^*, u^*)}{\partial u} v,$$

(здесь $u^* \in \mathbf{R}^m$ такое, что $f(x^*, u^*) = 0$) стабилизируема в нуле на $\mathbf{R}^n$ $(n = \dim M)$ посредством класса линейных обратных связей – $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, то $\sigma_f \in \mathrm{St}(C^\infty(M, \mathbf{R}^m), x^*)$ и, более того, x^* – регулярная точка статической характеристики, т.е. в некоторой окрестности этой точки $\mathcal{F}^{-1}(0)$ является иммерсированным C^r-многообразием $(r = \min(k, l))$ размерности m.

Сформулированное утверждение есть непосредственное следствие теоремы о неявной функции [45] и устойчивости по первому приближению [43]. При использовании критерия управляемости Калмана теорема 2.1 влечет

Следствие 1. *Если $f(x, u) \in C^{l,k}(M \times \mathbf{R}^m, TM)$ $(l, k > 1)$, $x^* \in \mathcal{F}^{-1}(0)$ и найдется такое $u^* \in \mathbf{R}^m$, что $f(x^*, u^*) = 0$,*

$$\operatorname{rank}\left\{\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial u}\right\}_{(x^*, u^*)} = n,$$

то $\sigma_f \in \mathrm{St}(C^\infty(M, \mathbf{R}^m), x^*)$.

Следующие два утверждения являются основой для синтеза стабилизирующей обратной связи в регулярном случае.

Следствие 2. *Если в любой точке $y \in \omega_{x^*}$ (ω_{x^*} – связная компонента $\mathcal{F}^{-1}(0)$, содержащая точку x^*) выполнены условия теоремы 2.1, то существует такая окрестность $\mathcal{O}(\omega_{x^*})$, что*

$$\sigma_f \in \mathrm{St}(\mathcal{K}(M, \mathbf{R}^m), \mathcal{O}(\omega_{x^*}), x^*).$$

Следствие 3. *Пусть $f(x, u) \in C^{l,k}(M \times \mathbf{R}^m, TM)$, $u^* \in \mathbf{R}^m$ такие, что $x^* \in \mathcal{F}^{-1}(0)$, $f(x^*, u^*) = 0$ и*

$$\operatorname{rank}\left\{\frac{\partial f}{\partial u}, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial u}\right\}_{(x^*, u^*)} = n.$$

Тогда, если $v(y) = Ky$ есть стабилизирующая обратная связь линеаризованной системы

$$\dot{y} = \frac{\partial f(x^*, u^*)}{\partial x} y + \frac{\partial f(x^*, u^*)}{\partial u} v,$$

то $u(x) = u^* + K(x - x^*)$ – обратная связь, которая локально стабилизирует систему σ_f в точке x^*.

Локальная стабилизация, основанная на прямом методе Ляпунова. Рассмотрим задачу локальной стабилизации системы $\Sigma(f, b)$: $\dot{x} = f(x) + b(x)u$ в точке $x^* \in M$. Поскольку все рассуждения этого подпункта будут иметь локальный характер, то без ограничения общности считаем, что $M = \mathbf{R}^n$.

Пусть имеется гладкая положительно-определенная в некоторой окрестности точки x^* функция $V(x)$, $V(x^*) = 0$; требуется найти условия на $V(x)$, $f(x)$, $b(x)$, при которых существует такая обратная связь $u(x) \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n \setminus x^*, \mathbf{R})$, что

$\langle \operatorname{grad} V(x), f(x)+u(x)b(x)\rangle \leqslant 0$ и множество $\langle \operatorname{grad} V(x), f(x)+u(x)b(x)\rangle = 0$ не содержит целых траекторий. Если последние два соотношения выполнены, то из рассуждений, аналогичных доказательству теоремы Барбашина [11], получаем, что обратная связь $\dot{u}(x)$ локально стабилизирует систему $\Sigma(f, b)$ в точке x^*.

Свойства локальной стабилизации зависят от геометрии расположения поверхностей, задаваемых соотношениями $\mathcal{F}(x)=0$, $\mathfrak{F}(x)=0$, где

$$\mathcal{F}(x)=\langle \operatorname{grad} V(x), f(x)\rangle, \qquad \mathfrak{F}(x)=\langle \operatorname{grad} V(x), b(x)\rangle.$$

Теорема 2.2 [23]. *Если существует такая проколотая окрестность $\mathcal{O}(x^*)\backslash x^*$, что отображения $V(x)$, $f(x)$, $b(x)$ непрерывно-дифференцируемы и*

$$\{x\in\overline{\mathcal{O}(x^*)}\backslash x^*;\quad \mathfrak{F}(x)=0\}\in\{x\in\overline{\mathcal{O}(x^*)}\backslash x^*,\ \mathcal{F}(x)<0\},$$

то

$$\Sigma(f, b)\in \operatorname{St}(\mathcal{K}(\mathbf{R}^n\backslash x^*, \mathbf{R}), x^*).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что окрестность $\mathcal{O}(x^*)\backslash x^*$ имеет следующее строение:

$$\mathcal{O}(x^*)\backslash x^*=\{x\in\mathbf{R}^n;\ 0<V(x)<\epsilon\},$$

где $\epsilon>0$. Введем последовательность окрестностей

$$\mathcal{O}_n=\{x\in\mathbf{R}^n;\ \frac{1}{n}<V(x)<\epsilon\}.$$

Пусть $\rho_n=\max\limits_{\{x\in\bar{\mathcal{O}}_n;\ \mathfrak{F}(x)=0\}}\mathcal{F}(x)$; обозначим

$$W_n=\{x\in\bar{\mathcal{O}}_n;\ \mathcal{F}(x)>\rho_n/2\}.$$

Тогда $\Xi=\bigcup\limits_n W_n$ – такая окрестность множества $\{x\in\mathcal{O}(x^*)\backslash x^*;\ \mathcal{F}(x)\geqslant 0\}$, что $\Xi\cap\{x\in\mathcal{O}(x^*)\backslash x^*;\ \mathfrak{F}(x)=0\}=\phi$. Построим обратную связь следующим образом:

$$u(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\notin\Xi,\\ -\mathcal{F}(x)/\mathfrak{F}(x)-\operatorname{sgn}\mathfrak{F}(x) & \text{при } x\in\Xi.\end{cases} \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что $u(x)$ стабилизирует систему $\Sigma(f, b)$ в x^* и $u(x)\in\mathcal{K}(\mathbf{R}^n\backslash x^*, \mathbf{R})$. Теорема доказана.

Предполагая, что $V(x)$, $f(x)$, $b(x)$ удовлетворяют различным дополнительным условиям, можно получить конструктивно проверяемые следствия теоремы 2.2.

Следствие 1 [23]. *Пусть векторные поля $f(x)$, $b(x)$ по крайней мере два раза непрерывно-дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^*\in\mathcal{F}^{-1}(0)$; $\langle \operatorname{grad}\mathcal{F}(x^*), \operatorname{grad}\mathfrak{F}(x^*)\rangle\neq 0$. Тогда если существует такая положительно определенная квадратичная форма $V(x)$, что $V(x^*)=0$, $V\in C^3(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}_+)$, и положительны все собственные значения матрицы $\{\gamma_{ij}(x^*)\}_{i,j\neq l}$, где*

$$\gamma_{ij}(x^*)=-\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial\mathcal{F}(x^*)}{\partial x_l}\right)\Bigg[\frac{1}{(\partial\mathcal{F}/\partial x_l)^3}\Bigg\{\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_l}\right)^2-$$
$$-\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x_i\partial x_l}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_j}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_l}-\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x_l\partial x_j}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_l}+$$
$$+\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x_l^2}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_j}\Bigg\}-\frac{1}{(\partial\mathfrak{F}/\partial x_l)^3}\Bigg\{\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x_l}\right)^2-$$
$$-\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial x_i\partial x_l}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x_j}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x_l}-\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial x_l\partial x_j}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x_i}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x_l}+\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial x_l^2}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x_i}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x_j}\Bigg\}\Bigg]_{x^*},$$

где $1 \leqslant l \leqslant n$ – такое число, что $\dfrac{\partial \mathcal{F}(x^*)}{\partial x_l} \dfrac{\partial \mathfrak{F}(x^*)}{\partial x_l} \neq 0$, то

$$\Sigma(f, b) \in \mathrm{St}(\mathcal{K}(\mathbf{R}^n \setminus x^*, \mathbf{R}), x^*).$$

Доказательство. Для доказательства нужно установить справедливость включения

$$\{x \in \mathcal{O}(x^*) \setminus x^*;\ \mathfrak{F}(x) = 0\} \subset \{x \in \mathcal{O}(x^*) \setminus x^*;\ \mathcal{F}(x) < 0\}$$

для некоторой проколотой окрестности $\mathcal{O}(x^*) \setminus x^*$ точки x^*. Рассмотрим тот случай, когда $\dfrac{\partial \mathcal{F}(x^*)}{\partial x_l} > 0$. Из теоремы о неявной функции следует, что при $\dfrac{\partial \mathcal{F}(x^*)}{\partial x_l} \dfrac{\partial \mathfrak{F}(x^*)}{\partial x_l} \neq 0$ существует такая окрестность $\mathcal{O}(x^*)$, что в ней множества

$$\{x \in \mathbf{R}^n;\ \mathcal{F}(x) < 0\},\quad \{x \in \mathbf{R}^n;\ \mathfrak{F}(x) = 0\}$$

задаются соотношениями

$$x_l < \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n),\quad x_l = \beta(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n)$$

соответственно, причем функции $\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$ два раза непрерывно-дифференцируемы в $o(x^*)$. Для того чтобы имело место утверждение теоремы 2.2, достаточно справедливости неравенства

$$\beta(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n) <$$
$$< \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n)$$

в какой-либо окрестности точки z^* с координатами $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{l-1}^*, x_{l+1}^*, \ldots, x_n^*)$. Последнее неравенство выполяется, если

$$\sum_{i, j \neq l} \frac{\partial^2 \alpha(z^*)}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j > \sum_{i, j \neq l} \frac{\partial^2 \beta(z^*)}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j$$

при всех $y \in \mathbf{R}^{n-1}$, т.е. когда симметричная матрица

$$\left\{ \frac{\partial^2 \alpha(z^*)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \beta(z^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i, j \neq l}$$

имеет только положительные собственные значения. Выражая $\dfrac{\partial^2 \alpha(z^*)}{\partial x_i \partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 \beta(z^*)}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j \neq l)$ через производные функций $\mathcal{F}(x)$, $\mathfrak{F}(x)$, получаем утверждение следствия 1.

Аналогичным образом рассматривается тот случай, когда $\dfrac{\partial \mathcal{F}(x^*)}{\partial x_l} < 0$. Доказательство закончено.

Если несколько огрубить утверждение следствия 1, то достаточное условие локальной стабилизации можно представить как соотношение между главными кривизнами поверхностей $\mathcal{F}(x) = 0$, $\mathfrak{F}(x) = 0$.

Следствие 2 [23]. *Пусть векторные поля $f(x)$, $b(x)$ по крайней мере два раза непрерывно-дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^* \in \mathcal{F}^{-1}(0)$;* $\langle \operatorname{grad} \mathcal{F}(x^*), \operatorname{grad} \mathfrak{F}(x^*) \rangle \neq 0$. *Тогда если существует такая положительно опре-*

деленная квадратичная форма $V(x)$, *что* $V(x^*) = 0$ *и в точке* x^* *минимальная главная кривизна поверхности* $\mathcal{F}(x) = 0$ *вдоль направления* grad $\mathcal{F}(x^*)$ *больше максимальной главной кривизны поверхности* $\mathfrak{F}(x) = 0$ *вдоль этого же направления, то*

$$\Sigma(f, b) \in \mathrm{St}(\mathcal{K}(\mathbf{R}^n \setminus x^*, \mathbf{R}), x^*).$$

Следствия 1 и 2 дают достаточные условия локальной стабилизации второго порядка в том смысле, что для их проверки нужно вычислять вторые производные функций $\mathcal{F}(x)$, $\mathfrak{F}(x)$. Если функции $f(x)$, $b(x)$ обладают более высокой степенью гладкости, то можно получить достаточные условия локальной стабилизации более высоких порядков. Здесь мы этого делать не будем.

Сформулированные в этом подпункте (см. следствия 1 и 2) достаточные условия локальной стабилизации используют второй член разложения функции $b(x)$ в ряд Тейлора, и поэтому их можно рассматривать как развитие результатов предыдущего подпункта, в котором был задействован только первый член этого разложения.

Пример 2.1. Стабилизируема ли локально билинейная система $\mathfrak{B}$:

$$\dot{x}_1 = x_1 + 1 + u, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_2 u,$$

в начале координат? В данном примере $x^* = 0$, $u^* = -1$, поэтому линеаризация системы $\mathfrak{B}$ в точке (x^*, u^*) имеет следующий вид: $\dot{x}_1 = x_1 + u$, $\dot{x}_2 = -2x_2$, т.е. $\mathfrak{B}$ стабилизируема в первом приближении.

Методика, основанная на прямом методе Ляпунова, также решает эту задачу. В качестве $V(x)$ возьмем $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2$. Тогда $\mathcal{F}(x) = \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 - x_2^2 - \frac{1}{4}$, $\mathfrak{F}(x) = x_1 + x_2^2$. Воспользуемся следствием 1 теоремы 2.2. Поскольку

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_1}(0) = \frac{\partial \mathfrak{F}(0)}{\partial x_1} \neq 0,$$

то $l = 1$. В двумерном случае матрица $\{\gamma_{ij}(x^*)\}_{i,j \neq l}$ состоит из одного элемента $\gamma_{22}(x^*)$, который в этом примере равен 4, поэтому $\mathfrak{B} \in \mathrm{St}(\mathcal{K}(\mathbf{R}^n \setminus x^*, \mathbf{R}), x^*)$.

Пример 2.2. Изучим глобальную стабилизацию на $\mathbf{R}^3$ системы $\mathfrak{X}$:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1 u, \qquad \dot{x}_2 = x_2 + 2x_2 u, \qquad \dot{x}_3 = -1 - u,$$

в начале координат. В первом приближении система не стабилизируема в $x^* = 0$. Воспользуемся методами этого подпункта. Пусть $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2$, тогда

$$\mathcal{F}(x) = -x_1^2 + x_1^2 - x_3,$$
$$\mathfrak{F}(x) = -x_3 + 2x_2^2 + x_1^2.$$

На поверхности $\mathfrak{F}(x) = 0$ функция $\mathcal{F}(x)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(x)|_{\mathfrak{F}(x)=0} = -2x_1^2 - x_2^2, \text{ т.е. } \{x \in \mathbf{R}^3 \setminus 0;\ \mathfrak{F}(x) = 0\} \subset$$
$$\subset \{x \in \mathbf{R}^3 \setminus 0;\ \mathcal{F}(x) < 0\}.$$

Таким образом, из теоремы 2.2 следует

$$\mathfrak{X} \in \mathrm{St}(\mathcal{K}(\mathbf{R}^3 \setminus 0, \mathbf{R}), 0).$$

Изучим, как ведет себя обратная связь из (5) в окрестности особой точки x^*. Пусть $\langle \operatorname{grad} \mathcal{F}(x^*), \operatorname{grad} \mathfrak{F}(x^*)\rangle \neq 0$ и $\mathcal{F}$, $\mathfrak{F} \in C^{\omega}(\mathcal{O}(x^*), \mathbf{R})$, где $\mathcal{O}(x^*)$ – некоторая окрестность точки x^*. Тогда $u(x)$ имеет предел вдоль любого такого направления $\xi \in \mathbf{R}^n$, что $\langle \operatorname{grad} \mathfrak{F}(x^*), \xi\rangle \neq 0$. Действительно, в силу вещественной аналитичности $\mathfrak{F}(x), \mathcal{F}(x)$ существует такое $\tau > 0$, что при $t \in (0, \tau)$ $\mathcal{F}(t\xi) \neq 0$, $\mathfrak{F}(t\xi) \neq 0$, но тогда либо $\{t\xi;\ t \in (0, \tau)\} \not\subset \Xi$, либо $\{t\xi;\ t \in (0, \tau)\} \subset \Xi$. В первом случае $u(t\xi) \equiv 0$ при $t \in (0, \tau)$, и поэтому предел равен нулю. Во втором случае предел

$$\lim_{t \to +0} u(t\xi) = \lim_{t \to +0} \left\{ \frac{\mathcal{F}(t\xi)}{\mathfrak{F}(t\xi)} - \operatorname{sgn} \mathfrak{F}(t\xi) \right\}$$

раскрываем по правилу Лопиталя. В результате получаем

$$\lim_{t \to +0} u(t\xi) = \frac{\langle \operatorname{grad} \mathcal{F}(x^*), \xi\rangle}{\langle \operatorname{grad} \mathfrak{F}(x^*), \xi\rangle} - \operatorname{sgn} \mathfrak{F}(\xi\tau/2).$$

Для того чтобы функция $u(x)$ была ограничена в малой окрестности точки x^*, достаточно равномерной ограниченности $\lim\limits_{t \to +0} u(t\xi)$ вдоль любого такого направления $\xi \in \mathbf{R}^n$, что $\langle \operatorname{grad} \mathfrak{F}(x^*), \xi\rangle = 0$.

Таким образом, если квадратичная форма

$$W(y) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j$$

не вырождена на подпространстве

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{grad} \mathfrak{F}(x^*)) = \{\xi \in \mathbf{R}^n;\ \langle \operatorname{grad} \mathfrak{F}(x^*), \xi\rangle = 0\},$$

то обратная связь из (5) ограничена в окрестности точки достаточно малого диаметра.

Замечание (ϵ-стабилизация). Если $x^* \notin \mathfrak{F}^{-1}(0)$, то для системы $\sigma_f : x = f(x, u)$ справедливо $\sigma_f \notin \operatorname{St}(\mathcal{U}, x^*)$, так как не существует такого $u^* \in \mathcal{U}$, что $f(x^*, u^*) = 0$. Тем не менее при $\mathfrak{F}^{-1}(0) \neq \phi$ можно указать такое $\epsilon > 0$, что $\sigma_f \in \operatorname{St}^{\epsilon}(\mathcal{U}, x^*)$. Обозначим через $s(\mathfrak{F}^{-1}(0))$ подмножество $\mathfrak{F}^{-1}(0)$, в каждой точке которого система σ_f стабилизируема посредством $\mathcal{U}$. Пусть $\epsilon = \min\limits_{y \in S(\mathfrak{F}^{-1}(0))} \rho_M(y, x^*)$, где $\rho_M(\cdot, \cdot)$ – фиксированная метрика на M. Тогда $\sigma_f \in \operatorname{St}^{\epsilon}(\mathcal{U}, x^*)$.

Глобальная стабилизация. Существуют методы глобальной стабилизации, основанные на прямом методе Ляпунова [37]. Используемые при этом идеи полностью аналогичны тем, которые излагались в предыдущем пункте. Основная теорема 2.2 предыдущего пункта имеет глобальный аналог.

Теорема 2.3 [37]. *Пусть $\alpha(r), \beta(r) \in \mathcal{K}$ (функции Хана, строго монотонные непрерывные функции в нуле, равные нулю), $\lim\limits_{r \to \infty} \alpha(r) = \infty$, $V(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая неравенствам*

$$\alpha(|x - x^*|) \leqslant V(x) \leqslant \beta(|x - x^*|) \tag{6}$$

при всех $x \in \mathbf{R}^n$, где $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ и $x^* \in \mathfrak{F}^{-1}(0)$. Тогда если

$$\{x \in \mathbf{R}^n \setminus x^*;\ \mathfrak{F}(x) = 0\} \subset \{x \in \mathbf{R}^n \setminus x^*;\ \mathcal{F}(x) < 0\}, \tag{7}$$

то

$$\Sigma(f, b) \in \operatorname{St}(\mathcal{K}(\mathbf{R}^n \setminus x^*, \mathbf{R}), \mathbf{R}^n, x^*).$$

Доказательство этого утверждения почти дословно совпадает с доказательством теоремы 2.2. Проиллюстрируем применение теоремы 2.3 на примере анализа стабилизируемости нелинейных систем на $\mathbf{R}^n$, заданных однородными векторными полями $f(x)$, $b(x)$. Напомним, что векторное поле $f(x) \in C^l(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ $(l \geqslant 1)$ называется однородным, если для любого $x \in \mathbf{R}^n$ справедливо $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ при всех $\lambda \in \mathbf{R}$. Число p является степенью однородности $f(x)$ и обозначается $\deg f = p$. Достаточное условие стабилизируемости в нуле системы $\Sigma(f, b)$, заданной однородными векторными полями f, b, дает

Теорема 2.4. *Если $f(x)$, $b(x)$, $V(x)$ – однородные непрерывно-дифференцируемые функции,* $\deg f > \deg b$ *и для $x^* = 0$ имеет место теорема* 2.3, *то* $\Sigma(f, b) \in \mathrm{St}(\mathscr{K}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \mathbf{R}^n, 0)$ *и существует такое* $\gamma \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$, *что обратная связь*

$$u(x) = -\gamma \operatorname{sgn} \langle \operatorname{grad} V(x), b(x) \rangle \, |x|^{\deg f - \deg b} \tag{8}$$

стабилизирует систему $\Sigma(f, b)$ в нуле на $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Продифференцируем функцию Ляпунова $V(x)$ в силу системы $\Sigma(f, b)$, замкнутой обратной связью (8). Получим

$$\frac{dV}{dt} = \mathscr{F}(x) - \gamma \, |x|^{\deg f - \deg b} \, |\mathfrak{F}(x)|.$$

Для того чтобы $dV/dt < 0$ при всех $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, в силу однородности, достаточно подобрать такое $\gamma > 0$, что

$$\max_{S^{n-1}} \{ \mathscr{F}(x) - \gamma \, |\mathfrak{F}(x)| \} < 0, \tag{9}$$

где $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n;\ |x| = 1\}$.

Поскольку теорема 2.3 имеет место для $x^* = 0$, то

$$\{x \in S^{n-1};\ \mathfrak{F}(x) = 0\} \subset \{x \in S^{n-1};\ \mathscr{F}(x) < 0\}$$

и найдется такая окрестность $Q \subset S^{n-1}$ множества $\{x \in S^{n-1};\ \mathfrak{F}(x) = 0\}$, что неравенство (8) выполнено для любых $\gamma > 0$ и $\partial Q \cap \{x \in S^{n-1};\ \mathfrak{F}(x) = 0\} = \phi$

Выберем $\gamma > \max\limits_{S^{n-1} \setminus Q} \dfrac{\mathscr{F}(x)}{|\mathfrak{F}(x)|}$. Тогда справедливо неравенство (9) и, следовательно, $dV/dt < 0$ при всех $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$. Теорема 2.4 доказана.

Накладывая различные дополнительные условия на однородные векторные поля $f(x)$, $b(x)$ и функцию $V(x)$, получаем различные достаточные условия стабилизации в нуле.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4 *и, кроме того,* $\deg f > \deg V + 2\deg b - 1$. *Тогда* $\Sigma(f, b) \in \mathrm{St}(C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \mathbf{R}^n, 0)$ *и найдется такое* $\gamma \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$, *что обратная связь*

$$u(x) = -\gamma \langle \operatorname{grad} V(x), b(x) \rangle \, |x|^{\deg f - \deg V - 2\deg b + 1} \tag{10}$$

стабилизирует систему $\Sigma(f, b)$ в нуле на $\mathbf{R}^n$.

Это следствие доказывается точно так же, как теорема 2.4. Заметим, что при $f, b \in C^l(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $V \in C^k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}_+)$ неравенство $\deg f > \deg V + 2\deg b$ влечет $\Sigma(f, b) \in \mathrm{St}(C^r(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \mathbf{R}^n, 0)$, где $r = \min\{l, k - 1\}$. Это следует из вида обратной связи (10). Следующее утверждение дает достаточное условие стабилизации системы $\Sigma(f, b)$ в случае, когда $f(x)$ – однородное полиномиальное векторное поле нечетной степени, а b – постоянное векторное поле, т.е. $b \in \mathbf{R}^n$.

Следствие 2 [52]. *Если $f(x)$ – однородное полиномиальное векторное поле нечетной степени, $b(x) = b \in \mathbf{R}^n$ и существует такая положительно определенная квадратичная форма $\langle x, Qx\rangle$, что для функции $V(x) = \langle x, Qx\rangle$ выполнено включение* (7), *то $\Sigma(f, b) \in \mathrm{St}(C(\mathbf{R}^n \setminus 0, \mathbf{R}), \mathbf{R}^n, 0)$ и обратная связь*

$$u(x) = -\gamma\,|x|^{\deg f - 1}\langle Qx, b\rangle.$$

стабилизирует систему $\Sigma(f, b)$ в нуле на $\mathbf{R}^n$.

Теоремы 2.3, 2.4 и их следствия без труда обобщаются на случай многомерного управления. В работе [52] показано, что управляемость влечет стабилизируемость системы $\Sigma(f, b)$, заданной полиномиальным векторным полем $f(x)$ нечетной степени и постоянными векторными полями $\mathbf{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$. В общем случае эта импликация неверна. Достаточно рассмотреть систему на торе, заданную линейно независимыми постоянными векторными полями, каждое из которых эргодично, т.е. задает обмотку тора. В этом случае система уравляема, однако $\mathcal{P}^{-1}(0) = \phi$, и потому о стабилизации говорить не имеет смысла. В то же время, если статическая характеристика не пуста, то для двумерных нелинейных систем общего положения из управляемости следует стабилизируемость в любой точке статической характеристики на произвольном компакте $K \subset M$ ($\dim M = 2$) посредством кусочно-гладких обратных связей.

Теорема 2.5 [21]. *Пусть M – двумерное гладкое многообразие и для системы $\Sigma(f, b)$ выполнены требования: $K \subset M$ – компактное подмножество; M – односвязное гладкое многообразие, допустимое для слоения $\mathcal{B}$, задаваемого интегральными кривыми поля $b(x) \neq 0$ на M; $f, b \in C^l(M, TM)$; при всех $x \in \mathcal{P}^{-1}(0)\,\mathrm{rank}([f, b](x), b(x)) = 2$. Тогда если $\Sigma(f, b) \in \mathcal{Y}(\mathcal{K}, M)$, то для любой точки $x^* \in \mathcal{P}^{-1}(0) \cap K \neq \phi$ существует такая окрестность $\mathcal{O}(K)$ компакта K, что $\Sigma(f, b) \in \mathrm{St}(\mathcal{K}^{l-1}(M, \mathbf{R}), \mathcal{O}(K), x^*)$, причем найдется такая обратная связь W, реализующая это включение, что замыкание $\overline{\mathcal{O}(K)}$ правоинвариантно относительно системы $x = f(x) + Wb(x)$.*

Доказательство этой теоремы проводится построением обратной связи W с помощью топологической техники стэйбл покрытий, развитой в работе [21].

Перейдем к изучению глобальных методов релейной стабилизации системы $\Sigma(f, b)$ ($f, b \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$), т.е. посредством релейных обратных связей, которые могут принимать значения $\{-\gamma, 0, \gamma\}$, где γ – заданное положительное действительное число или строго положительная гладкая действительная функция. Если посредством таких релейных обратных связей система $\Sigma(f, b)$ стабилизируема на $\mathbf{R}^n$ в точке нуль, то пишем $\Sigma(f, b) \in \mathrm{St}_{p,\gamma}(\mathbf{R}^n, 0)$. В случае, когда точка $0 \in \mathbf{R}^n$ является устойчивым положением равновесия системы $\dot{x} = f(x)$ ($f(0) = 0$, для любого действительного числа $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $|x^0| < \delta$ имеем $|x^0 \circ e^{tf}| < \epsilon$ при всех $t \geqslant 0$), включение $e^{-tf} \circ \Sigma(f, b) \in \mathrm{St}(\mathcal{U}, U, 0)$ влечет $\Sigma(f, b) \in \mathrm{St}(\mathcal{U}, U, 0)$. Таким образом, задача стабилизации системы $\Sigma(f, b)$ сводится к исследованию стабилизируемости системы $e^{-tf} \circ \Sigma(f, b)$. Этот вопрос мы исследуем сначала в случае, когда характеристики Кронеккера $\{\beta_i\}$ пары векторных полей (f, b) являются постоянными действительными числами, $\beta_i \in \mathbf{R}$ ($0 \leqslant i \leqslant \nu(f, b)$). Важную роль при этом играют корни характеристического полинома

$$(-1)^{m+1}\lambda^{m+1} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \beta_i \lambda^i. \tag{11}$$

Докажем следующее ранговое условие релейной стабилизации в нуле.

Теорема 2.6. *Пусть нуль – устойчивое положение равновесия системы* $\dot{x} = f(x)$, $\nu(f, b) = m$ *и пара векторных полей имеет такие постоянные характеристики Кронеккера* $\beta_i \in \mathbf{R}$ $(0 \leqslant i \leqslant \nu(f, b))$, *что полином* (11) *устойчив. Тогда если* $\operatorname{rank}_x \{\operatorname{ad}_f^i b\}_{i=0}^{\infty} = n$ *при всех* $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, *то для любого* $\gamma > 0$ $\Sigma(f, b) \in \mathrm{St}_{p,\gamma}(\mathbf{R}^n, 0)$ *и стабилизирующая релейная обратная связь может быть выбрана в виде*

$$u(t, x) = -\gamma \operatorname{sgn} \langle x \circ e^{-tf}, x \circ e^{-tf} \circ e^{t \operatorname{ad} f} b \rangle. \tag{12}$$

Доказательство. Возьмем функцию Ляпунова $V(t, x) = \dfrac{1}{2} | x \circ e^{-tf} |^2$. Тогда производная $V(t, x)$ в силу системы $\Sigma(f, b)$, замкнутой обратной связью (12), имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma | \langle x \circ e^{-tf}, x \circ e^{-tf} \circ e^{t \operatorname{ad} f} b \rangle |,$$

т.е. $dV/dt \leqslant 0$ при всех $(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Если будет показано, что для любого $\delta > 0$ существует такое $T > 0$, что $V(T, x(T)) \leqslant \delta$, то из устойчивости положения равновесия системы $\dot{x} = f(x)$ будет следовать стабилизация в нуле системы $\Sigma(f, b)$, замкнутой обратной связью (12). Доказательство проведем от противного. Предположим, что $V(t, x(t))$ не меньше некоторого $\delta > 0$ при всех $t \geqslant 0$. Введем обозначение $y = x \circ e^{-tf}$. Тогда решение $y(t, x^0)$ системы

$$\dot{y} = -\gamma \operatorname{sgn} \langle y, y \circ e^{t \operatorname{ad} f} b \rangle y \circ e^{t \operatorname{ad} f} b,$$
$$y(0, x^0) = x^0,$$

находится в кольце $K = \left\{ y \in \mathbf{R}^n;\ V(0, x^0) \geqslant \dfrac{1}{2} | y | \geqslant \delta \right\}$, поэтому из

$$V(t, x(t)) = V(0, x^0) - \gamma \int_0^t | \langle y, y \circ e^{\tau \operatorname{ad} f} b \rangle | \, d\tau$$

и выполнения неравенства $0 < \delta \leqslant V(t, x(t))$ следует существование такой последовательности $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$ и

$$\lim_{i \to \infty} \langle y(t_i), y(t_i) \cdot e^{t_i \operatorname{ad} f} b \rangle = 0. \tag{13}$$

Из теоремы (1.2) следует справедливость разложения

$$\langle y, y \circ e^{t \operatorname{ad} f} b \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) \langle y, y \circ \operatorname{ad}_f^i b \rangle, \tag{14}$$

где $\{\alpha_i(t)\}_{i=0}^{n-1}$ – фундаментальная система решений уравнения

$$\alpha^{(m+1)} = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \alpha^{(i)}, \quad \alpha_i^{(j)}(0) = \delta_{ij}, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant m.$$

Поскольку при любом фиксированном y функция (14) является решением уравнения $\alpha^{(m+1)} = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \alpha^{(i)}$ и верно (13), то из устойчивости полинома (11) следует

$$\forall \tau \leqslant 0 \quad \langle y^*, y^* \circ e^{\tau \operatorname{ad} f} b \rangle = 0,$$

где y^* – предельная точка последовательности $\{y(t_i)\}$, которая существует в силу компактности K. Для любого $\rho \geqslant 0$ верно разложение $\mathrm{ad}_f^{m+\rho+1} b = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \mathrm{ad}_f^{i+\rho} b$, поэтому из теоремы (1.2) и соотношения

$$\langle y^*, y^* \circ e^{-\tau \mathrm{ad} f} b \rangle = 0, \quad \tau \geqslant 0,$$

получаем

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{m} \alpha_i(\tau) \langle y^*, \mathrm{ad}_f^i b \rangle = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 0, \\ \sum_{i=0}^{\rho-1} \frac{\tau^i}{i!} \langle y^*, y^* \circ \mathrm{ad}_f^i b \rangle + \sum_{i=\rho}^{m+\rho-1} \langle y^*, y^* \circ \mathrm{ad}_f^i b \rangle \times \\ \times \int_0^{\tau} \int_0^{\theta_1} \ldots \int_0^{\theta_{\rho-1}} \alpha_{i-\rho} \, d\theta_\rho \, d\theta_{\rho-1} \ldots d\theta_1 = 0 \quad \text{при} \quad \rho > 0,\end{gathered} \tag{15}$$

где $\{\alpha_i\}$ определены в (14). Поскольку соотношения (15) имеют место при любых $\rho \geqslant 0$, то

$$\langle y^*, y^* \circ \mathrm{ad}_f^i b \rangle = 0$$

для всех $i \geqslant 0$. Таким образом, из условия полноты ранга следует $y^* = 0$, что противоречит предположению $V(t, x(t)) \geqslant \delta$ при всех $t \geqslant 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Заметим, что в случае вещественно-аналитических векторных полей $f, b \in C^\omega(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ во время переходного процесса обратная связь (12) имеет не более счетного числа изолированных переключений, т.е. $u(t, x(t))$ как функция времени имеет не более чем счетное число изолированных разрывов первого рода.

При выполнении условий теоремы 2.6 имеет место стабилизация в нуле посредством гладких обратных связей.

Теорема 2.7. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.6. Тогда если* $\mathrm{rank}_x \{\mathrm{ad}_f^i b\}_{i=0}^{\infty} = n$ *при всех* $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, *то* $\Sigma(f, b) \in \mathrm{St}(C^\infty(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \mathbf{R}^n, 0)$ *и стабилизирующая обратная связь может быть выбрана в виде*

$$u(t, x) = -\langle x \circ e^{-tf}, x \circ e^{-tf} \circ e^{t \mathrm{ad} f} b \rangle.$$

Доказательство этого утверждения почти дословно совпадает с доказательством теоремы 2.6. Сформулированные теоремы тесно связаны с результатами Джарджевича, Квина.

Теорема 2.8 [97]. *Пусть* $f(x) = \mathbf{A}x$, *где* $\mathbf{A} = n \times n$-*матрица, спектр которой состоит из различных мнимых собственных значений. Тогда если для любого* $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$

$$\mathrm{rank}_x \{\mathrm{ad}_{\mathbf{A}x}^i b\}_{i \geqslant 0} = n,$$

то

$$\Sigma(\mathbf{A}x, b) \in \mathrm{St}(C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \mathbf{R}^n, 0).$$

Данное утверждение, как и два предыдущих, наиболее эффективно применимо в случае полиномиальных систем и, в особенности, для стабилизации билинейных систем.

Теорема 2.9. *Пусть для билинейной системы* $\Sigma(\mathbf{A}x + a, \mathbf{B}x)$ *имеют место следующие условия*:

1) $x^* \in \mathfrak{F}^{-1}(0)$, *т.е. существует такое* $u^* \in \mathbf{R}$, *что* $\mathbf{A}x^* + a + \mathbf{B}x^*u^* = 0$;

2) *положения равновесия систем* $\dot{z} = \bar{\mathbf{A}}z$, $\dot{x} = -\operatorname{ad}\bar{\mathbf{A}}(X)$ *устойчивы, где* $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + u^*\mathbf{B}$, $\operatorname{ad}\bar{\mathbf{A}}(X) = X\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}}X$, $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$.

Тогда если $\operatorname{rank}_x\{\operatorname{ad}^l_{\bar{\mathbf{A}}}\mathbf{B}x\}_{l=0}^{\infty} = n$ *для любого* $x \in \mathbf{R}^n \setminus x^*$, *то билинейная система* $\Sigma(\mathbf{A}x + a, \mathbf{B}x)$ *стабилизируема в точке* x^* *посредством как релейных, так и вещественно-аналитических обратных связей.*

Для доказательства достаточно сделать замену $z = x - x^*$, $v = u - u^*$ и затем к системе $\dot{z} = \bar{\mathbf{A}}z + \mathbf{B}zv$ применить теоремы 2.6, 2.7. Обобщим утверждение теоремы 2.6 на случай многомерного управления и непостоянных характеристик Кронеккера. Кроме того, будем считать, что сигнал управления на вход поступает с аддитивной гладкой помехой, т.е. стабилизируемая система $\Sigma(f + \mathbf{B}\omega, \mathbf{B})$ имеет вид

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{l} b_i(x)(u_i + \omega_i(t, x)),$$

где $\omega_i(t, x) \in C^\infty(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, $\mathbf{B} = \{b_1, \ldots, b_l\}$ и функция $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ известна с точностью до оценок

$$|\omega(t, x)| \leqslant \omega_+(t, x),$$

где отображение $\omega_+(t, x) \in C^\infty(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ точно определено. В этом случае имеет место следующий аналог теоремы 2.6.

Теорема 2.10. *Пусть нуль – устойчивое положение равновесия системы* $\dot{x} = f(x)$, $\nu(f, b_i) = m_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$ *и* $\{\beta_{ij}\}_{j=0}^{m_i} \subset C^\infty(\mathbf{R}^n)$ – *такие характеристики Кронеккера пары* $(f, b_i) \subset C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, *что нуль – устойчивое положение равновесия линейных дифференциальных уравнений*

$$(-1)^{m_i+1}\alpha^{(m_i+1)} = \sum_{j=0}^{m_i}(-1)^j e^{-tf} \circ \beta_{ij}\alpha^{(j)}, \tag{16}$$

где $1 \leqslant i \leqslant l$. *Тогда если* $\operatorname{rank}_x\{\operatorname{ad}^l_f\mathbf{B}\}_{i=0}^{\infty} = n$ *при всех* $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, *то для любого* $\gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^{l}$, $\gamma_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, $\Sigma(f + \mathbf{B}\omega, \mathbf{B}) \in \mathrm{St}_{p, \gamma + \omega_+}(\mathbf{R}^n; 0)$ *и стабилизирующая обратная связь может быть выбрана в виде*

$$u_i(t, x) = -(\gamma_i + \omega_+(t, x))\operatorname{sgn}\langle x \circ e^{-tf}, x \circ e^{-tf} \circ e^{t\operatorname{ad} f}b_i\rangle$$

$$(1 \leqslant i \leqslant l).$$

Более того, если $\omega = 0$, *то* $\Sigma(f, \mathbf{B}) \in \mathrm{St}(C^\infty(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^l), \mathbf{R}^n, 0)$ *и обратная связь*

$$u_i(t, x) = -\langle x \circ e^{-tf}, x \circ e^{-tf} \circ e^{t\operatorname{ad} f}b_i\rangle$$

$$1 \leqslant i \leqslant l,$$

стабилизирует $\Sigma(f, \mathbf{B})$ *на* $\mathbf{R}^n$ *в нуле.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 2.6. Программа исследования стабилизируемости заключается в выполнении следующих операций: вычисление характеристик Кронеккера пар $\{(f, b_i)\}_{i=1}^{l}$; исследование устойчивости нулевого решения дифференциальных уравнений (16) (заметим, что оно должно быть устойчиво при любом $x \in \mathbf{R}^n$, обозначение которого в (16) опущено); анализ условий типа полноты ранга, т.е. $\operatorname{rank}_x\{\operatorname{ad}_f^i \mathbf{B}\}_{i=0}^{\infty} = n$ при всех $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$ и из $\langle y, y \circ e^{-\tau f} b_i \rangle = 0$ следует $y = 0$ $(\tau \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant l)$. Предложенную процедуру анализа стабилизируемости после соответствующих модификаций можно использовать в случае систем с распределенными параметрами. В качестве примера изучим стабилизируемость нелинейной системы $\Sigma(f, b, \tau_1, \ldots, \tau_\rho)$ вида

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x) + ub(x, x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_\rho)), \\ &x(t) = \varphi(t) \in C^\infty([-\tau_{\max}, 0), \mathbf{R}^n), \quad \tau_{\max} = \max_i \{\tau_i\}, \\ &x(0) = x^\circ, \end{aligned} \tag{17}$$

где ρ – натуральное число и $\tau_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant \rho)$, $\Sigma(f, b, \tau_1, \ldots, \tau_\rho)$ принадлежит некоторому специальному подмножеству в классе систем с отклоняющимся аргументом. Мы не будем здесь цитировать результаты, связанные с вопросом существования и единственности решения системы (17), по этой теме имеется специальная литература [47, 75]. Займемся переформулировкой теоремы 2.10 для систем вида (17). Для этой цели введем обозначения

$$b(x, z) = b(x, z_1, \ldots, z_\rho), \quad [\operatorname{ad}_f b]_i = \frac{\partial b(x, z)}{\partial z_i} f(z_i) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} b(x, z),$$

соответственно, $[\operatorname{ad}_f^j b]_i = [\operatorname{ad}_f [\operatorname{ad}_f^{j-1} b]_i]_i$ и $[\operatorname{ad}_f^0 b]_i = b$ $0 \leqslant i \leqslant \rho$, причем $z_0 = x$.

Метод "вариации постоянной" без особых изменений распространяется на бесконечномерный случай, поэтому формула вариации хронологической экспоненты (теорема 1.1) справедлива и в этом случае. Только в каждой конкретной ситуации необходимо грамотно давать ее интерпретацию, учитывая бесконечномерность пространства состояний. Например, для системы (17)

$$(x, z) \circ e^{t \operatorname{ad} f} b = (de^{-tf})_{x \circ e^{tf}} b(x \circ e^{tf}, z_1 \circ e^{(t-\tau_1)f}, \ldots, z_\rho \circ e^{(t-\tau_\rho)f}), \tag{18}$$

здесь $(de^{-tf})_{x \circ e^{tf}}$ – производная в точке $x \circ e^{tf}$ отображения $e^{-tf}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

Определение 1.2 также необходимо модифицировать следующим образом. Положим $\mathcal{L} = \phi$. Тогда пара $f \in C^\infty(M, TM)$, $b \in C^\infty(\overbrace{M \times M \times \ldots \times M}^{\rho}, TM)$ обладает свойством Кронеккера и имеет индекс Кронеккера $\nu(f(x), b(x, z))$, равный наименьшему натуральному числу m, для которого найдутся такие действительные функции $\beta_j(x, z) \in C^\infty(M \times M^\rho)$ $(j = 0, \ldots, m)$, что

$$\{\sum_{i=0}^{\rho} [\operatorname{ad}_f(*)]_i\}^{m+1}(b) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \cdot \{\sum_{i=0}^{\rho} [\operatorname{ad}_f(*)]_i\}^j(b),$$

здесь $\{\sum_{i=0}^{\rho}[\mathrm{ad}_f(*)]_i\}(b)=\sum_{i=0}^{\rho}[\mathrm{ad}_f(b)]_i$ и, как обычно,

$$\{\sum_{i=0}^{\rho}[\mathrm{ad}_f(*)]_i\}^j=\{\sum_{i=0}^{\rho}[\mathrm{ad}_f(*)]_i\}(\{\sum_{i=0}^{\rho}[\mathrm{ad}_f(*)]_i\}^{j-1}).$$

Функции $\{\beta_j(x, z)\}$ будем называть характеристиками Кронеккера пары $(f(x), b(x, z))$. По аналогии с теоремой 1.2 доказывается, что если $\nu(f(x), b(x, z))=m$, то

$$e^{t\,\mathrm{ad}\,f}b=\sum_{j=0}^{m}\alpha_j(t)\{\sum_{i=0}^{\rho}[\mathrm{ad}_f(*)]_i\}^j(b),$$

где $e^{t\mathrm{ad}f}b$ определена в (18), при всех t $\alpha_i\in C^\infty(M\times M^\rho)$ $(i=0, 1, \ldots, m)$ и являются решениями задач Коши

$$\alpha_i^{(m+1)}|_{(x,z)}=\sum_{j=0}^{m}\beta_j(x\circ e^{tf}, z_1\circ e^{(t-\tau_1)f}, \ldots, z_\rho\circ e^{(t-\tau_\rho)f})\alpha_i^{(j)}|_{(x,z)}, \quad (19)$$

$$\alpha_i^{(j)}(0)=\delta_{ij}.$$

Используя введенные обозначения, сформулируем следующий аналог теоремы 2.10.

Теорема 2.11. *Пусть нуль – устойчивое положение равновесия системы* $\dot{x}=f(x)$, $\nu(f(x), b(x, z))=m$ и $\beta_j(x, z)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times\underbrace{\mathbf{R}^n\times\ldots\times\mathbf{R}^n}_{\rho})$ *такие, что нуль – устойчивое положение равновесия линейного дифференциального уравнения*

$$(-1)^{m+1}\alpha^{m+1}=$$

$$=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\beta_j(x\circ e^{-tf}, z_1\circ e^{-(t+\tau_1)f}, \ldots, z_\rho\circ e^{-(t+\tau_\rho)f})\alpha^{(j)}.$$

Тогда если $\mathrm{rank}_{(x,z)}\{\{\sum_{i=0}^{\rho}[\mathrm{ad}_f(*)]_i\}^j b\}_{j=0}^{\infty}=n$ *при всех* $|x|+|z|\neq 0$, *то для любого* $\gamma>0$ *обратная связь*

$$u=-\gamma\,\mathrm{sgn}\langle x\circ e^{-tf}, (x\circ e^{-tf}, \{z_i\circ e^{-(t-\tau_i)f}\}_{i=1}^{\rho})\circ e^{t\,\mathrm{ad}\,f}b\rangle, \quad (20)$$

где $z_i=x(t-\tau_i)$ $(1\leqslant i\leqslant\rho)$, *стабилизирует систему* $\Sigma(f, b, \tau_1, \ldots, \tau_\rho)$ *в нуле на* $C^\infty([-\tau_{\max}, 0), \mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^n$, *т.е. для любых* $\varphi(t)\in C^\infty([-\tau_{\max}, 0), \mathbf{R}^n)$, $x^0\in\mathbf{R}^n$ *решение системы* (17), *замкнутой обратной связью* (20), *стремится к нулю при* $t\to\infty$ *и нуль – устойчивое положение равновесия.*

Теорема 2.11 легко обобщается на случай многомерных управлений, а также при наличии аддитивной гладкой помехи $\omega(t, x)$ в канале управления. Теорема 2.11

наиболее эффективно применима в случае билинейных систем вида

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{\rho_i} \mathbf{B}_{ij} x(t - \tau_{ij}),$$

где $\tau_{ij} \geqslant 0$, $\tau_{ij} \in \mathbf{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant \rho_i)$. Справедлива соответствующая модификация теоремы 2.9.

Заключение

Объем статьи и избранные основными ее темы не позволили затронуть вопросы локальной управляемости, которые значительно глубже изучены, чем их глобальные аналоги. Это отображает большее число публикаций по этой теме (см. обзор [12] и работу [130]). За рамками данной работы остались также некоторые направления исследования глобальной управляемости, которые непосредственно не связаны с изложенными здесь методами. Прежде всего это относится к проблемам анализа управляемости различных конкретных типов систем.

В последнее время получен ряд глубоких результатов по управляемости билинейных систем [17, 18, 72, 79, 80, 127, 128], систем на классических группах Ли [72, 128], семейств (лево-) правоинвариантных векторных полей [80, 96, 127]. В работе [50] исследована гармоническая и полиномиальная управляемость линейных стационарных систем, показано, что полиномиальная управляемость линейных стационарных систем достигается в классе полиномов степени $2k - 1$, где k – индекс управляемости системы. Работа [62] посвящена изучению условий, при которых справедливы включения

$$\Sigma(\mathbf{A}x, \mathbf{B}) \subset \mathcal{Y}(\mathbf{R}^n, \mathcal{K}(V)),$$

$$\Sigma(\mathbf{A}x, \mathbf{B}) \in \mathcal{Y}_0(\mathbf{R}^n, \mathcal{K}(V)), \quad \Sigma(\mathbf{A}x, \mathbf{B}) \in \mathcal{Y}_\infty(\mathbf{R}^n, \mathcal{K}(V)),$$

где $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $V \subset \mathbf{R}^m$. Для каждого из включений описаны достаточные условия на $V \subset \mathbf{R}^m$, при которых это включение справедливо.

Результаты теории управляемости линейных стационарных систем обобщены на случай выпуклых дифференциальных включений [54]. Доказана дуальность управляемости и наблюдаемости в этом случае, т.е. выпуклое дифференциальное включение управляемо тогда и только тогда, когда сопряженное к нему дифференциальное включение наблюдаемо. Хорошо известен тот факт, что на любом связном паракомпактном C^k-многообразии $(2 \leqslant k \leqslant \infty$ или $k = \omega)$ существует глобально управляемая пара полных C^{k-1}-векторных полей [108]. В работе [51] предложена глобальная теория управляемости, основанная на результатах качественной теории дифференциальных уравнений и условиях локальной управляемости. Показано, что на компактном многообразии для любого векторного поля Морса – Смейла f, не имеющего периодических орбит, существует широкий класс таких полей b, что $\Sigma(f, b)$ глобально управляема посредством релейных управлений, принимающих лишь два значения, причем в качестве b можно выбрать векторное поле типа Морса – Смейла. Эти результаты справедливы и на некомпактном многообразии.

Во вторую часть данной статьи не вошли методы стабилизации минимально-фазовых систем [23, 28–34, 60, 61, 117, 126], которые основаны на предположении об асимптотической устойчивости динамики, отвечающей нулевому выходу

системы. Если это условие выполнено, то обратная связь выбирается таким образом, чтобы выход системы стремился к нулю, а затем либо с помощью теоремы о центральном многообразии [60, 61], либо специальным выбором обратной связи [23, 28–34] доказывается асимптотическая устойчивость системы. При стабилизации выхода системы используются различные условия типа полноты ранга дифференциалов выхода [86]. Кроме того, в работе [60] показано, в каких случаях выход минимально-фазовой системы можно трансформировать таким образом, чтобы первый дифференциал выхода имел полный ранг, т.е. имела полный ранг частная производная по управлению от первой производной выхода по времени. С помощью методов теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в работе [126] показано, как можно застабилизировать минимально-фазовую систему с заданной степенью инвариантности по возмущению, увеличивая коэффициент линейной обратной связи по выходу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В.* Экспоненциальные представления потоков и хронологическое исчисление // Мат. сборник – 1978. – 107, № 4. – С. 467–532.
2. *Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В.* Хронологические алгебры и нестационарные векторные поля // Проблемы геометрии. Т. II (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). – М., 1980. – С. 135–176.
3. *Аграчев А.А., Вахрамеев С.А., Гамкрелидзе Р.В.* Дифференциально-геометрические и теоретико-групповые методы в теории оптимального управления // Проблемы геометрии. Т. 14 (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). – М.: 1983. – С. 3–56.
4. *Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В.* Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстродействия // Мат. сборник. – 1976. – Т. 100 (142). – С. 610–643.
5. *Аграчев А.А.* Необходимые условия оптимальности второго порядка в общем нелинейном случае // Мат. сборник. – 1977. – Т. 102 (144). – С. 551–568.
6. *Аграчев А.А., Сырачев А.В.* О редукции гладкой линейной по управлению системы //Мат. сборник. Новая серия. – 1986. – Т. 130 (172), № 1 (5). – С. 18–34.
7. *Аграчев А.А., Вахрамеев С.А.* Нелинейные управляемые системы постоянного ранга и условия экстремальных управлений // ДАН СССР. – 1984. – Т. 279, № 2. – С. 265–269.
8. *Аграчев А.А., Вахрамеев С.А.* Линейные по управлению системы постоянного ранга и условия релейности экстремальных управлений // УМН. – 1986. – Т. 41, вып. 6 (252). – С. 163–164.
9. *Андреев Ю.Н.* Дифференциально-геометрические методы в теории управления // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 10. – С. 5–46.
10. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
11. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 223 с.
12. *Вахрамеев С.А., Сарычев А.В.* Геометрическая теория управления //Итоги науки и техники. Серия "Алгебра", "Топология", "Геометрия". – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 23. – С. 197–257.
13. *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 1979. – 335 с.
14. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. – М.: Наука, 1973.
15. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Никитин С.В.* Исследование управляемости методами теории аппроксимативных групп и систем на слоении // ДАН СССР. – 1988. – Т. 300, № 4. – С. 821–823.
16. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Никитин С.В.* Анализ управляемости нелинейных систем методами теории слоений и аппроксимативных групп // Тез. докл. респ. науч.-техн. конф. "Методологические проблемы автоматизированного проектирования и исследования систем". – Севастополь, 14–15 сентября 1987 г. – С. 6,7.
17. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Никитин С.В.* Двумерные, билинейные системы: классификация особенностей и критерии управляемости // Информатика, управление, вычислительная техника – М., 1987.– № 1. – С. 59–83.
18. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Никитин С.В.* Классификация особенностей и критерии управляемости билинейных систем на плоскости // ДАН СССР. – 1987. – Т. 295, № 1. – С. 42–46.

19. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Никитин С.В.* Использование теории слоений в анализе управляемости нелинейных систем. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, 26.03.87, № 2239–387.
20. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Никитин С.В.* Управляемость нелинейных систем и систем на слоении // ДАН СССР. – 1988. – Т. 299, № 3. – С. 573–576.
21. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Никитин С.В.* Управляемость нелинейных систем. Двумерные системы // Итоги науки и техники. Серия "Техн. кибернетика". – М.: ВИНИТИ. – 1987. – Т. 21. – С. 3–69.
22. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Никитин С.В.* Критерии управляемости двумерных нелинейных систем в области при ограничениях на управление // ДАН СССР. – 1987. – Т. 294, № 6.– С. 1310–1314.
23. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Никитин С.В.* Нелинейные системы. Управляемость, стабилизируемость, инвариантность // Итоги науки и техники. Серия "Техн. кибернетика". – М.: ВИНИТИ. – Т. 23. – С. 3–107.
24. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г., Никитин С.В.* Критерии управляемости нелинейных систем при фазовых ограничениях // ДАН СССР. – 1986. – Т. 290, № 1. – С. 18–22.
25. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г., Никитин С.В.* Критерии управляемости нелинейных динамических систем на плоскости при фазовых ограничениях // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1987. – № 6. – С. 108–114.
26. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г., Никитин С.В.* Критерии непрерывной и кусочно-непрерывной управляемости для n-мерных нелинейных динамических систем с $(n-1)$-мерным управлением при фазовых ограничениях. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, 16.12.85, № 8667–8.
27. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г., Никитин С.В.* Критерии управляемости нелинейных систем, у которых число управлений на единицу меньше числа состояний. // Тез. докл. X Всесоюзное совещание по проблемам управления. Кн. I, Алма-Ата, 1986. – М.: ИПУ, 1986. – С. 47–48.
28. *Емельянов С.В.* Системы автоматического регулирования с переменной структурой. – М.: Наука, 1967. – 336 с.
29. *Емельянов С.В.* Бинарные системы автоматического управления. – М.: ИПУ, 1984. – 323с.
30. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратных связей и их применение в замкнутых системах // Итоги науки и техники. Серия "Техн. кибернетика". – М.: ВИНИТИ, 1982. – Т. 15. – С. 145–216.
31. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Применение новых типов обратных связей в задачах управления нестационарными динамическими системами // Итоги науки и техники. Серия "Техн. кибернетика". М.: ВИНИТИ, 1983. – Т. 16. – С. 70–154.
32. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Применение принципа регулирования по отклонению для расширения множества типов обратных связей // ДАН СССР. – 1981. – Т. 258, № 5. – С. 1070–1074.
33. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Расширение множества типов обратных связей и их применение при построении замкнутых динамических систем//Изв. АН СССР. Серия "Техн. кибернетика". – 1981. – № 5. – С. 173–183.
34. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Принципы построения и основные свойства замкнутых динамических систем с различными типами обратных связей //Динамика неоднородных систем. Тр. семинара ВНИИ системных исследований. – М., 1982. – С. 5–27.
35. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением.– М.: Наука, 1958. – 475 с.
36. *Красовский Н.Н.* О стабилизации неустойчивых движений дополнительными связями при полной обратной связи // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, вып. 4.
37. *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
38. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
39. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
40. *Лионс Ж.-Л., Бенсусан А.* Импульсное управление и квази-вариационные неравенства. – М.: Наука, 1987. – 597 с.
41. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
42. *Попов Е.П.* Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1979. – 255 с.
43. *Руш Н., Абетс Г., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.

44. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. – М.: Наука. 1980. – 375 с.
45. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980.
46. *Федоров А.Ю.* Условия управляемости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. – 1984. – №4. – С. 60–71.
47. *Хейл Дж.* Теория функциональнодифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
48. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1988. – 319 с.
49. *Aeyels D.* Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control // Systems and Control Lett.– 1985. – Vol. 5. – P. 289–294.
50 *Aeyels D.* Controllability of linear time – invariant systems // Int. J.Control.– 1987. – Vol. 46, N 6. – P. 2027–2034.
51. *Aeyels D.* Global controllability for smooth nonlinear systems: a geometric approach // SIAM J. Control and Optimiz. – 1985. – Vol. 23, N 3. – P. 452–465.
52. *Andreini A. , Baccietti A., Stefani G.* Global stabilizability of homogeneous vector fields of odd degree // Systems and Conttol Lett. – 1988. – Vol. 10. – P. 251–256.
53. *Aronson D.G., Grandall M. and Pelletier L.A.* Stabilization of solution of a degenerate nonlinear diffusion problem // Nonlinear Anal. – 1982. – Vol. TMA. – P. 1001–1022.
54. *Aubin J.P., Frankowska H., Olech C.* Controllability of convex processes // SIAM J. Control and Optim. – 1986. – Vol. 24, N 6. – P. 1192–1211.
55. *Banks H.T., Crowley J.M., Kunisch K.* Cubic spline approximation techniques for parameter estimation in distributed systems // IEEE Trans. Aut. Control. – 1983. – Vol. AC– 28. – P. 773–786.
56. *Banks H.T., Daniel Lamm P.K.* Estimation of delays and other parameters in nonlinear functional differential equations // SIAM J. Contr. and Optim. – 1983. Vol. 21. – P. 895–915.
57. *Banks H.T., Murphu K.A.* Estimation of parameters in nonlinear distributed systems // in Proc. of 23 Conference on Decision and Control, Las Vegas, N.Y. – 1984. – P. 257–261.
58. *Baceiotti A., Stefan G.* On the relationship between global and local controllability // Math. Systems Theory. – 1983. – Vol. 16. – P. 79–91.
59. *Basto Gonsalves S.* Controllability in codimension one // J. of Differ. Equat. – 1987. – Vol. 68, N 1.– P.1–9.
60. *Byrnes C.I., Isidori A.* Local stabilization of minimum–phase nonlinear systems // Syst. and Control Lett. – 1988. – Vol.11. N 1. – P. 9–17.
61. *Byrnes C.I., Isidori A.* A frequency domain philosophy for nonlinear systems with applications to stabilization and adaptive control // 23rd IEEE Conf. Decision and Control. – 1984. – P. 1569–1573.
62. *Bianchini Rosa Maria,* Constraind controllability of linear systems // Scientific Papers of the Institute of Technical of the Technical University of Wroclav N 70, Conferences 29. – P. 177–185.
63. *Brockett R.W.* Differential -geometric methods in systems theory // IEEE Conf. Decis. and Contr. (Incl. 10th Symp. Adapt. Process), Miami Beach, Fla. – N.Y. – 1971. – P. 176–180.
64. *Brockett R.W.* Lie algebras and Lie groups in control theory // Geometr. Meth.Syst.Theory.–Dordrecht–Boston, 1973. – P. 43–82.
65. *Brockett R.W.* Asymptotic stability and fudback stabilizability // Differential Geometric Control Theory/Eds. R.W. Brochett R.S. Millman, H.J. Sussman. – Birkhauser, Basel–Boston, 1983. – P.181–191.
66. *Brunovsky P.* A classification of linear controllable systems // Kybernetika Cislo. – 1970. – Vol. 3, N 6. – P. 173–186.
67. *Brunovsky P., Lobry C.* Controllabilite bang-bang controllabilite differentiable et perturbation des systemes non lineaires // Ann. mat. pura ed. appl. – 1975. – Vol. 105. – P. 93–119.
68. *Casti J.L.* Recent developments and future perspectives in nonlinear system theory // SIAM Rev. 1982. – Vol. 24, N 2. – P. 301–331.
69. *Campbell S.L.* Singular systems of differential equations I. – London: Pitman, 1980.
70. *Campbell S.L.* Singular systems of differential equations II. London: Pitman, 1982.
71. *Campbell S.L.* Automatica. – 1984. – Vol. 20. P. 365.
72. *Grouch P.E., Silva Leite F.* On the uniform finite generation of SO (n, R) // Systems Contr. Lett.– 1983. – Vol. 2. – P. 341–347.
73. *Davis J.H., Hirschorn R.M.* Tracking Control of a Flexible Robot link // IEEE Trans. on Aut. Contr.– 1988. – Vol. 33, P. 238–248.
74. *Dzielski J.E., Nagurka M.L.* Optimal control for a class of reaction-diffusion equation // Int. J. Contr. – 1988. – Vol. 47, N 6. – P. 1947–1960.
75. *Driver R.D.* Existence theory for a delay differential system // Contributions to Differential Equations. – 1961. – Vol. 1. – P. 317–336.
76. *Freund E., Syrbe M.* Control of industrial robots by means of microprocessors // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – N.Y.: Springer-Verlag. – 1977. – P. 167–185.

77. *Gamkrelidze R.* Exponential representation of solutions of ordinary differential equation // Proc. Equa diff. V. Conf. Prague, 1977. – Springer-Verlag. 1978.
78. *Gauthier J.P.* Structure des systemes nonlineaires. – Paris: CNRS, 1984. – P. 307.
79. *Gauthier J.P., Bornard G.* Controllabilite des systems bilineares // SIAM J. Control Optim. – 1982.– Vol. 20. – P. 377–384.
80. *Gauthier J.P., Kupka I., Sallet G.* Controllability of right invariant systems on real simple Lee groups. // Systems Contr. Lett.– 1984. – Vol. 5. – P. 187–190.
81. *Gautmacher F.R.* The theory of matrices. Vol. II. – New York: Chelsea, 1960.
82. *Gerbier Y.* Classification de certain systeme, dynamiques controles du plan // Comptes Renduces Academie des Sciences de Paris; – 1975. – Tome 280 A; – P. 109–112.
83. *Grasse K.A.* On Accessibility and Normal Accessibility: the opens of controllability in the fine C^0-topology // J. Differ. Equat. – 1984. – Vol. 53, N 3. – P. 387–441.
84. *Grasse K.A.* Perturbation of nonlinear controllable systems // SIAM J. Contr. and Optim. – 1981.– Vol. 19, N 2. – P. 203–220.
85. *Grasse K.A.* Nonlinear perturbation of control-semilinear control systems // SIAM J. Contr. and Optim. – 1982. – Vol. 20, N 3. – P. 311–327.
86. *Grizzle J.W. Di Benedetto M.D., Moog C.H.* Computing the differential output rank of a nonlinear system // Proc. 26th IEEE Decis. and Contr. Los Angles, Calit., Dec. 9–11, 1987. – N.Y. Vol. 1.– P. 142–145.
87. *Hermes H.* On local and global controllability // SIAM J. Control.– 1974. – Vol. 12, N 2. – P. 252–261.
88. *Hermes H.* Local controllability and sufficient conditions in singular problems. I, II // J. Diff. Eq. – 1976. – Vol. 20, N 1. – P. 213–232; SIAM J. Control. – 1976.– Vol. 14, N 6. – P. 1049–1062.
89. *Hermes H.* High order conditions for local controllability and controlled stability // Proc. IEEE Cont. Decis and Contr. and 15th Symp. Adapt. Process, Cleawater, Fla., 1976. – N.Y., 1976.– P. 836–840.
90. *Hirschorn R.M.* Global controllability of nonlinear systems // SIAM J. Contr. – 1976. – Vol. 14, N 4. – P. 700–711.
91. *Hunt R.* Global controllability of nonlinear systems in two dimensions // Math. Systems Theory. – 1980. – Vol. 13. – P. 361–376.
92. *Hunt R.* n-dimensional controllability with (n–1) controls // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1982.– Vol. AC-27, N 1. – P. 113–117.
93. *Isidori A.* Nonlinear control systems: an introduction // Lecture Notes in Control and Information sciences. Springer-Verlag. 1985. – Vol. 72. – P. 297.
94. *Isidori A.* The geometric approach to nonlinear feedbach control. A survey // Lect. Notes Contr. and Inf. Sci. – 1982. – Vol. 44. – P. 517–531.
95. *Jurdjevic V.* Polynomial control systems // Proc. 22nd IEEE Conf. Decis. and Contr. , San Antonio, Tex. 14–16 Dec. – N.Y. 1983. – Vol. 2. – P. 904–906.
96. *Jurdjevic V.* Certain controllability properties of analytic control systems // SIAM J. Control. – 1972. – Vol. 10, N 2. – P. 354–360.
97. *Jurdjevic V., Quin J.* Controllability and stabilizability // J. Differ. Equat. – 1978. – Vol. 28, N 3.– P. 381–389.
98. *Kalman R.E.* Kronecker invariant and feedback // Proc; Conference on Ordinary Differential Equations (Mathematics Research Center, Madison, Wis., 1971), Naval Research Laboratory. – Washington D.C. 1971.
99. *Kalman R.E.* Mathematical decription of linear dynamical systems // SIAM J. Contr. – 1963. – Vol. 1. – P. 152–192.
100. *Kelly H.J., Kopp R.E., Moger H.G.* Singular extremals // Topics in Optimization. – Acad. Press, 1967.
101. *Knobloch H.W.* High order necessary condition and local controllability // Math. Inst. der Univ.-Wurzburg, 1978.
102. *Knobloch H.W.* Higher order necessary enditions in optimal control theory // Lect. Notes Contr. and Inf. Sci. – 1981. – Vol. 34. – P. 173.
103. *Kokotovic P.* Applications of singular perturbation techniques to control problems // SIAM Rev;– 1984. – Vol. 26. – P. 501–550.
104. *Kokotovic P., O'Malley R.E.* Singular perturbations and order reduction in control theory. An overview // Automatica. – 1966. – Vol. 12.
105. *Kokotovic P., Yackel R.A.* Singular perturbation of linear regulators:basic theorems// IEEE Trans. Automat. Contr. – 1979., Feb. – Vol. AC-17.
106. *Krener A.J.* The high order maximal principle and its application to singular extremals // SIAM J. Control. – 1977. – Vol. 15, N 2. – P. 256–293.

107. *Kunita H.* On the controllability of nonlinear systems with applications to polynomial systems // Appl. Math. and Optim. 1979. – Vol. 5, N 2. – P. 89–99.
108. *Levitt N., Sussmann H.J.* On controllability by means of two vector fields // SIAM J. Contr.– 1975. – Vol. 13, N 6. – P. 1271–1281.
109. *Lee K.K., Arapostatlus A.* Affine-feedback stabilization of piecewise-linear hypersurface systems // Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control. – Los Angeles, CA, December 1987.– P. 136–141.
110. *Lee K.K., Arapostatlus A.* On the controllability of piece-wise-linear hypersurface systems // Systems and Control Letters.– 1987. – Vol. 9. – P. 89–96.
111. *Lobry C.* Dynamical polysystems and control theory // Geom. Meth. Syst. Theory. – Dordrecht–Boston, 1973. – P. 1–42.
112. *Lobry C.* Controllability des systems non lineaires // Qutils et modeles math. autom. anal. syst. et trait. signal. – Paris, 1981.– Vol. 1. – P. 187–214.
113. *Lobry C.* Controllability of nonlinear systems on compact manifolds // SIAM J.Contr. – 1974. – Vol. 12, N 1. – P. 1–4.
114. *Lobry C.* Controllabilite des systemes nonlineaires // SIAM J. Contr. – 1970. – Vol. 8, N 4. – P. 573–605.
115. *Lokatelli A.* State observation and output feedback stabilization of linear singularly perturbate systems // In Proc. IFAC Symp. on large-scale systems-theory and applications, Udine, Italy Milano, June 16-20, 1976.
116. *Mohler R.R.* Bilinear control processes. – N.Y. – London: Acad. Press.– 1973. – P. 224.
117. *Monaco S.* Normal-Cyrot D. Minimum-phase nonlinear discrete time systems and feedback stabilisation // Proc; 26th IEEE Conf. Decise and Contr. Los Angeles, Calif. N.Y.: Dec. 9–11, 1987. – Vol. 2. – P. 979–986.
118. *Petrov N.N.* Local Controllability // Differential Equations.– 1976. – Vol. 12, N 12. – P. 1545–1550.
119. *Popov V.M.* The invariants of the multivariable control systems // Rep. Power Institute of the Academy of the Socialist Republic of Romania. – Bucharest, 1968.
120. *Popov V.M.* Invariant description of linear, time-invariant controllable systems // SIAM J. Control.– 1972. – Vol. 10, N 2. – P. 252–264.
121. *Porter B.* Singular perturbation methods in the design of stability feedback controllers for multivariable linear systems // Int. J. Contr. – 1974. – Vol. 20, N 4. –
122. *Rosenbrock H.H.* State-space and multivariable theory // John Wiley-Interscience. N.Y. – 1970.
123. *Russel D.L.* Controllability and stability theory of linear partial diff. equation: recent progress and open questions // SIAM Rev. – 1978. – Vol. 20. – P. 639–739.
124. *Russel D.L.* Mathematical models for the leastic beam and their control-theoretic implications // Semigroups, theory and application. – London: Longmans, 1986. – Vol. 11.
125. *Russel D.L.* // J. Math. Analys. Applic. – 1978. – P. 62–186.
126. *Saberi A., Sannut P.* Global stabilization with almost disturbance decoupling of a class uncertain non-linear systems // Int. J. Contr. – 1988. – Vol. 47, N 3. – P. 717–727.
127. *Silva Leite F.* Uniform controllable sets of left invariant vector fields on compact Lie groups // Systems Control Lett. – 1986. – Vol. 6. – P. 329–335.
128. *Silva Leite F., Grouch P.E.* Controllability on classical Lie groups // Math. Control Signals Systems.– 1988. – Vol. 1, N 1. – P. 31–42.
129. *Sussmann H.J.* Some Properties of vector fields which are not altered by small perturbation // J. Differ. Equat. – 1976. – Vol. 20, N 2. – P. 292–315.
130. *Sussmann H.J.* A general theorem of local controllability // Mathematics Department Rutgerr University, New Brunswick. – 1985. – P. 1–94.
131. *Sussmann H.J.* Lie brachets, real analyticity and geometric control // Differ. Geom. Contr. theory Proc. Cont. Mech. Technol. Univ. June 28–July 2, 1982. – P. 1–116.
132. *Sussmann H.J., Jurdjervic V.* Controllability of nonlinear systems // J. Differ. Equat. – 1972. – Vol. 12, N 1. – P. 95–116.
133. *Sussmann H.J.* Orbits of families of vector fields and integrability of distributions // Trans. Amer. Math. Soc. 1973, Yune. – Vol. 180. – P. 171–188.
134. *Stefan P.* Accessibility and foliation with singularities // Bull. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 80, N 6. – P. 1142–1145.
135. *Stefan P.* Integrability of systems of vector fields // J. London Math. Soc. – 1980. – Vol. 21, N 3,5.
136. *Tarn T.J., Bejezy A.K., Isidori A., Chen Y.* Nonlinear feedback in robot arm control // Proc. of 29-rd Conference on Decision and Control, Las Vegas.– N.Y., 1984. – P. 736–751.

Поступила в редакцию 14.10.88