УДК 514.772.32

ПРОБЛЕМЫ ВЛОЖЕНИЙ: ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Ю. А. Аминов

Проблемы погружений и вложений многообразий в евклидовы и другие пространства являются одними из центральных проблем как в дифференциальной геометрии, так и в топологии, и изучаются в этих дисциплинах с самых разных точек зрения. Ознакомление с установленными в них результатами, методами их получения и возникающими проблемами может оказаться полезным для дальнейшего развития. Наш обзор посвящен в основном трем вопросам: изометрическим погружениям римановых пространств, гладким топологическим погружениям и вложениям дифференцируемых многообразий и погружениям с минимальной полной абсолютной кривизной. Связь геометрических и топологических вопросов особенно сильно проявляется в третьем вопросе.

§ 1. ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОГРУЖЕНИЯ

Изометрическое погружение риманового пространства в евклидово пространство или в другое риманово пространство является одним из способов построения подмногообразий этих пространств, обладающих новыми интересными геометрическими свойствами. Теория изометрических погружений связана с трудными вопросами разрешимости нелинейных систем дифференциальных уравнений в малом и особенно трудными при рассмотрении в целом, а также с топологическими вопросами и в ней, наряду с привлечением широкого арсенала математических средств, используются и наглядные геометрические идеи. Этой теории посвящено много работ, обзор которых до 1976 г. дан в [29], [41]—[42]. Мы осветим работы последнего времени.

1. Изометрические погружения многообразий неположительной кривизны. По известной теореме Гильберта плоскость Лобачевского не погружается регулярно и изометрично в трехмерное евклидово пространство E^3. В работе [25] Н. В. Ефимов усилил эту теорему, доказав непогружаемость класса C^4 в E^3

полуплоскости Лобачевского, т. е. бесконечной области на плоскости Лобачевского, ограниченной полной геодезической. Таким образом, свойство непогружаемости может иметь место не только для полных многообразий, но и для многообразий с границей, даже если кривизна не меняет знака. Невозможность изометрического погружения полуплоскости Лобачевского в классе C^2 доказана в работе [18].

Так как в [24] Н. В. Ефимовым доказана известная общая теорема о невозможности изометрического погружения класса C^4 в E^3 полного двумерного многообразия с гауссовой кривизной $K \leqslant -a^2 < 0$, где $a = \text{const}$, то возникло предположение, что и полуплоскость, т. е. область, ограниченная полной геодезической, на многообразии с переменной кривизной $K \leqslant -a^2 < 0$ тоже не погружается в E^3. В работе [19] этот вопрос решается с дополнительным условием, что нормальная кривизна вдоль геодезического края не меняет знака. Условие на край здесь не является внутренним, поэтому можно высказать несколько более слабое, но формулируемое во внутренних терминах предположение о непогружаемости плоскости с метрикой кривизны $K \leqslant -a^2 < 0$, из которой удалена некоторая область, например, геодезический круг определенного радиуса. Доказательство Н. В. Ефимова непогружаемости полуплоскости Лобачевского основано на следующих двух утверждениях: 1) площадь любого многоугольника на погруженной области, сторонами которого являются отрезки геодезических или асимптотических линий, ограничена числом, зависящим лишь от числа сторон, 2) в E^3 не существует ε-полоса полной асимптотической линии с метрикой постоянной отрицательной кривизны при любом $\varepsilon > 0$. Второе утверждение доказано в работе Н. В. Ефимова [26]. В случае переменной кривизны аналогичные утверждения не доказны. В связи с указанной теоремой Н. В. Ефимова возникает естественный вопрос об описании тех областей плоскости Лобачевского, которые можно изометрически погрузить в E^3. В работе Э. Г. Позняка [40] рассмотрены изометрические погружения бесконечных многоугольников с конечным или бесконечным числом сторон, не содержащие полуплоскость. Бесконечным многоугольником называется пересечение замкнутых полуплоскостей, границы которых — прямые линии на L^2, не имеющие общих точек. Рассматривается множество многоугольников, не содержащих полуплоскость и в которых каждая сторона имеет параллельную сторону, называемую соседней. Вводятся два класса таких многоугольников M_1 и M_2. Первый класс M_1 состоит из всех тех многоугольников, для которых существует орицикл O в плоскости, такой что нижняя грань длин ортогональных проекций сторон на этот орицикл положительна. Второй класс M_2 состоит из всех тех бесконечных многоугольников, для которых нижняя грань длин ортогональных проекций сторон на одну из сторон положительна. В работе [40] доказана

Теорема: любой многоугольник, принадлежащий классу M_1 или M_2, изометрически погружается в E^3.

Доказательство этой теоремы основано на следующей геометрической идее. Поясним ее для многоугольников первого класса. Находится орицикл O_α, эквидистантный с орициклом O, отсекающий все вершины многоугольника. Как известно, универсальное накрытие псевдосферы, вернее ее половины, дает изометрическое погружение некоторого орикруга, в качестве которого можно взять O_α. Поэтому на части многоугольника, заключенной внутри O_α, возникает регулярная чебышевская сеть. Остается продолжить ее на части, расположенные вне O_α. Соединим вершины многоугольника с бесконечно удаленной точкой Q орикруга O_α геодезическими линиями a_i и построим бесконечную эквидистантную полосу вдоль a_i ширины $2h$. При некоторой ширине $2h$ часть многоугольника, оставшаяся вне орикруга O_α, попадет в эту полосу. В этой полосе вводится полугеодезическая система координат и в ней записывается система уравнений погружения. Начальные данные для решения этой системы задаются на a_i так, что на части a_i, лежащей вне O_α, они продолжают значения искомых функций на части a_i внутри O_α, соответствующих псевдосфере (см. рис. 1).

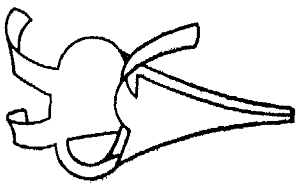

Рис. 1

Далее используется теорема существования и единственности решения системы погружения в полосе, доказанная Э. Г. Позняком [36]. Таким образом, можно получить погружения многоугольников класса C^∞.

Как известно, вопрос о погружении плоскости Лобачевского L^2 в E^3 сводится к нахождению решения уравнения для угла ω между асимптотическими линиями

$$\omega_{uv} = \operatorname{Sin} \omega. \qquad (1)$$

На регулярной поверхности должны удовлетворяться неравенства $0 < \omega < \pi$. Если на линиях $u=0$ и $v=0$ заданы начальные данные $\omega(0, v)$ и $\omega(u, 0)$, принадлежащие классу C^k или C^∞, то на всей плоскости (u, v) существует решение уравнения (1), обращающееся в заданные функции на координатных линиях и принадлежащие тому же классу регулярности.

В работе Э. Г. Позняка [37] доказывается, что любому такому решению $\omega(u, v)$ соответствует заданная на плоскости u, v векторная функция $r = r(u, v) \in C^3$ такая, что график этой функции в области, где $\omega \neq k\pi$, представляет собой поверхность постоянной отрицательной кривизны $K=-1$. При этом координатные линии u и v на указанной поверхности образуют асимптотическую сеть с сетевым углом $\omega(u, v)$.

Е. В. Шикиным [59] доказывается, что любой геодезический круг с метрикой отрицательной кривизны K, в окрестности каждой точки являющийся функцией класса C^1 в некоторой полугеодезической системе координат, погружается изометрически в виде поверхности класса C^2. Ранее возможность погружения при условии, что функция K принадлежит классу $C^{2,\alpha}$, была доказана Э. Г. Позняком [36], а в случае C^2 — Е. В. Шикиным [61].

Э. Р. Розендорн [43] определяет геликоидальную поверхность четырехмерного евклидова пространства, как поверхность, метрика которого является метрикой вращения $ds^2=du^2+B^2(u)dv^2$ и после приведения ее к этому виду коэффициенты кручения и вторых квадратичных форм не зависят от координаты v. Доказывается, что плоскость Лобачевского не допускает изометрического погружения в E^4 в виде регулярной геликоидальной поверхности. С. Б. Кадомцев [27] доказывает невозможность изометрического погружения L^2 в E^n, при котором любые две точки имеют конгруэнтные окрестности, совмещающиеся друг с другом движением по геодезической, соединяющей эти точки. Рассмотрены также погружения с полюсом.

Дж. Мур [150] рассматривает изометрические погружения пространственных форм в пространственные формы. Излагается доказательство теоремы Картана о том, что при локальном погружении n-мерного пространства Лобачевского в E^{2n-1} существует n главных направлений. Направление на подмногообразии называется главным, если оно главное для второй формы, определяемой любым нормальным вектором. В [150] доказано существование 2^n асимптотических направлений, т. е. таких направлений, для которых все вторые квадратичные формы одновременно равны нулю. Доказано, что если M^n-полное односвязное риманово многообразие постоянной кривизны k изометрично погружено в $(2n-1)$-мерное риманово многообразие постоянной кривизны $K>k$, тогда любые n линейно независимых асимптотических векторных поля $Z_1, \ldots, Z_n$ определяют глобальную координатную систему с координатными векторами Z_i.

В работах Ю. А. Аминова [2], [3] изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского L^n в E^{2n-1} изучаются более детально. Параллельно рассматриваются подмногообразия и с переменной кривизной. Доказано следующее общее утверждение: если на подмногообразии M^n отрицательной кривизны в евклидовом пространстве E^N существует n главных направлений, то они голономны, т. е. в окрестности каждой точки M^n существуют координаты такие, что координатные линии касаются главных направлений. Метрику L^n в этих координатах можно записать в виде $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sin}^2\sigma_i du_i^2$, причем $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sin}^2\sigma_i = 1$. Заметим, что системы ортогональных координат в n-мерном евклидовом пространстве с условием постоянства суммы метрических коэффициентов рассматривались первоначально Гишаром, затем Дарбу и Бианки. В [2] доказано, что уравнения Кодацци—Риччи имеют своим условием интегрируемости уравнения Гаусса. Поэтому вся система уравнений погружения L^n в E^{2n-1} сводится к системе:

$$R_{ijlj} = \mathrm{Sin}^2\sigma_i \, \mathrm{Sin}^2\sigma_j, \quad R_{ijkj} = 0, \quad i \neq k, \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sin}^2\sigma_i = 1. \tag{2}$$

Доказано, что для построения произвольного локального погружения L^n в E^{2n-1} необходимо и достаточно указать способ построения в L^n системы ортогональных координат с условием $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sin}^2\sigma_i = 1$, что приводит к системе (2). Установлено, что произвол в задании начальных данных для решения этой системы состоит из $n(n-1)$ функций одного аргумента. Система (2) является многомерным аналогом уравнения «синус Гордона» $\omega_{xx} - \omega_{yy} = \mathrm{Sin}\,\omega$ или в другой записи (1). Уравнение «синус Гордона» изучается и в теоретической физике при описании различных физических явлений. В монографии [28] приводится трехмерный «синус Гордона»

$$\omega_{zz} - \omega_{xx} - \omega_{yy} = \mathrm{Sin}\,\omega. \tag{3}$$

Некоторая комбинация уравнений (2) приводит к уравнению, отличающемуся от (3) лишь некоторым добавочным слагаемым в правой части, см. [3], (35). Можно ожидать, что вся система (2) представит интерес с физической точки зрения.

В работе [3] рассмотрены также свойства грассманова образа произвольного подмногообразия в евклидовом пространстве, в том числе $L^n \subset E^{2n-1}$. Оказывается, что грассманов образ L^n в E^{2n-1} является регулярным подмногообразием Γ^n в грассмановом многообразии $G_{n-1,2n-1}$ и если $G_{n-1,2n-1}$ снабжено стандартной метрикой, то метрика Γ^n имеет вид $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cos}^2\sigma_i (du^i)^2$. Внутренняя кривизна грассманова образа может быть любого знака, но оказывается, что кривизна $\bar{K}$ многообразия $G_{n-1,2n-1}$ для площадок, касательных к Γ^n, не произвольна. Вонгом [200] было доказано, что кривизна грассманова многообразия $G_{n,m}$ при $\min(n, m) > 1$ лежит в интервале [0, 2]. В [3] доказывается, что кривизна $\bar{\bar{K}}$ для площадок, касательных к Γ^n, лежит в открытом интервале $(0, 1)$. Здесь же установлено, что $\bar{K}$ для площадки, касательной к грассманову образу произвольного подмногообразия V^n в евклидовом пространстве E^N, выражается через вторые квадратичные формы подмногообразия V^n. Если V^n имеет n главных направлений, то кривизна $\bar{K} \in [0, 1]$. Можно классифицировать подмногообразия евклидова пространства по типу грассманова образа: если для любой касательной к Γ^n площадки кривизна $\bar{K} < 1$, то тип гиперболический, если $\bar{K} = 1$, то тип параболический и при $\bar{K} > 1$ — тип эллиптический. Если же есть площадки с кривизной, большей и меньшей единицы, то тип можно назвать смешанным.

Изучены два класса решений системы (2) при $n=3$: 1) линии кривизны одного семейства являются геодезическими и в этом случае система (2) сводится к двум уравнениям: обыкновенному дифференциальному уравнению и уравнению «синус Гордона». Оба эти уравнения связаны между собой через постоянные, 2) функционально вырожденные погружения, т. е. такие погружения, при которых $\operatorname{Sin} \sigma_i$ зависят от одного аргумента $t(u_1, u_2, u_3)$ (в механике такого сорта решения называют автомодельными). Заметим, что функционально вырожденные погружения можно рассматривать и для других многообразий, требуя чтобы вторые квадратичные формы и коэффициенты кручения зависели от меньшего числа аргументов, чем размерность многообразия.

В работе [9] доказывается, что многомерный аналог преобразования Бианки n-мерное подмногообразие постоянной отрицательной кривизны в E^{2n-1} переводит в подмногообразие той же постоянной отрицательной кривизны.

Система (2) рассматривается также в работах [184—185] Тененблат и Тернг, но без доказательства того факта, что вся система уравнений погружения L^n в E^{2n-1} сводится к этой системе. Строится многомерное преобразование Бэклунда, переводящее одно погружение области L^n в другое. Преобразование Беклунда для подмногообразий в пространственных формах строится в работе Тененблат [182]. В работе [183] рассматриваются асимптотические подмногообразия в погруженном многообразии $M^n \subset E^N$. Оно определяется следующим образом. Пусть s — вторая фундаментальная форма многообразия M^n. Тогда q-мерное, $0 < q < n$, линейное подпространство L из касательного пространства T_xM называется асимптотическим, если существует вектор ξ, ортогональный к T_xM, такой что $\langle s(X, Y), \xi \rangle = 0$ для всех векторов X и $Y \in L$. Подмногообразие $V^q \subset M$ называется асимптотическим, если в каждой точке его касательное пространство есть асимптотическое подпространство в T_xM. Доказывается, что если M^n несингулярно изометрически погружено в E^N, то $(n-1)$-мерное подмногообразие в M^n является характеристическим для системы погружения (в смысле Картана) в том и только том случае, когда это подмногообразие асимптотическое.

С. З. Шефель дал несколько обобщений понятия седловой поверхности на многомерные подмногообразия евклидова пространства. Одно из них имеет следующий вид: полная m-мерная ($m \geqslant 2$) поверхность S в E^{m+p} называется седловой, если на любой замкнутый контур L, принадлежащий пересечению S с произвольной плоскостью E^r $(2 \leqslant r < p+m)$ в E^{m+p} и деформируемый по поверхности S в точку, можно натянуть двумерную односвязную поверхность, содержащуюся в $S \cap E^r$. В. В. Глазыриным [20] доказано, что риманова кривизна такой поверхности в некотором двумерном направлении равна нулю. Второе обобщение С. З. Шефеля седловой поверхности в терминах групп гомологий. В. В. Глазырин приводит формулировку этого обобщения в [21]: полная n-мерная поверхность $F^n \subset E^{n+m}$ называется k-седловой, если для любой r-мерной плоскости E^r $(2<r<n+m)$ $(k+1)$-мерная группа относительных гомологий Виетореса $H_{k+1}(F, F \cap E^r)=0$. В работе доказывается эквивалентность этого определения условию: для каждой нормали вторая квадратичная форма имеет не более k собственных значений одного знака. Доказывается также одно обобщение теоремы Черна—Кейпера.

Ю. Е. Боровским и С. З. Шефелем [15] дана геометрическая интерпретация леммы Оцуки, использующаяся при доказательстве теоремы Черна—Кейпера о непогружаемости в E^{2n-1} n-мерного компактного риманова многообразия неположительной кривизны. Эта интерпретация следующая: n n-мерных эллипсоидов в E^{n+1} с общим центром O можно пересечь двумерной плоскостью E^2, проходящей через точку O, так что полученные в сечении эллипсы будут подобны. Лемма Оцуки обобщается в работе А. А. Борисенко [12] на k-мерные секционные кривизны и с помощью этого обобщения доказывается, что l-мерное риманово многообразие строго отрицательной k-мерной кривизны локально не погружается в E^{l+p} при $p \leqslant \frac{l-1}{k-1}-1$. Доказано следующее обобщение теоремы Черна—Кейпера: компактное l-мерное риманово многообразие M^l неположительной k-мерной кривизны не погружается изометрически в евклидово пространство размерности $l+p$ при $p \leqslant \frac{l-1}{k-1}$. Оценен порядок роста объема полных некомпактных поверхностей неположительной k-мерной кривизны в евклидовом пространстве и показано, например, что многообразие неположительной 2-мерной секционной кривизны с конечным объемом не погружается изометрически в евклидово пространство размерности $\frac{3}{2}l-1$. В этой же работе обобщается теорема Альмгрена о минимальных поверхностях, гомеоморфных сфере в сферическом пространстве S^3. А. А. Борисенко доказывает, что аналитическая поверхность F^2, гомеоморфная сфере в сферическом пространстве S^3 кривизны 1 с гауссовой кривизной $K\leqslant 1$, является большой сферой. В [10] получены некоторые теоремы о непогружаемости компактных многообразий в римановы многообразия с неположительной внешней кривизной. Погружения полных связных псевдоримановых многообразий постоянной отрицательной кривизны в псевдоевклидовы пространства изучаются в [11]. Если $R^k_{p,q}$ — псевдориманово пространство, матрица метрического тензора которого имеет p положительных и q отрицательных собственных значений, то в [11] доказано, что полное связное псевдориманово многообразие $V^l_{p,q}$ постоянной отрицательной кривизны с $q\neq 0, 1, 3, 7$ не погружается изометрически в псевдоевклидово пространство $E^{2l-1}_{p',q}$, где $p'=2l-1-q$.

Отметим также, что изометрические погружения псевдоримановых пространств рассматриваются так же в работах Гревса [102] и Гревса и Номидзу [103].

Интересным является вопрос об оценках внешнего диаметра погруженного многообразия, который рассматривался во многих работах. В недавно вышедшей монографии Ю. Д. Бураго и В. А. Залгаллера [16] приведены многочисленные результаты различных авторов о геометрических неравенствах, в том числе оценки внешнего диаметра подмногообразия. Здесь приводится более простое доказательство оценки снизу, полученной ранее Ю. Д. Бураго, для радиуса R шара, содержащего поверхность в E^3 через длину L границы, площадь S и положительную часть интегральной кривизны $\omega^+: S\leqslant C(\omega^+R^2+LR)$, если эйлерова характеристика $\chi(M)=1$ и $S\leqslant C[\omega^+R^2-2\pi\chi R^2+LR]$ при $\chi\leqslant 0$, C — некоторая постоянная. Очень краткий интегральный метод получения оценок внешнего диаметра гиперповерхности в евклидовом пространстве, основанный на уравнении Дарбу для квадрата длины радиус-вектора, дан в работах Ю. А. Аминова [5], [6]. Этим методом удается получить оценки либо для замкнутых гиперповерхностей, либо для областей, в которых существует регулярное семейство геодезических сфер. Для геодезического круга радиуса r на поверхности $F^2\subset E^3$ неположительной гауссовой кривизны, ограниченной снизу числом $-a^2$, оценка имеет вид $R\geqslant r/\sqrt{b^2+\frac{3}{2}a^2r^2}$. Поверхность $F^2\subset E^3$, неограниченная во внутреннем смысле, гауссова кривизна которой $K(P)$ стремится к нулю, когда точка P уходит на бесконечность во внутреннем смысле, не ограничена в пространстве. В этой теореме гауссова кривизна может менять знак, а F^2 иметь границу. В [44] Э. Р. Розендорн построил пример полной во внутреннем смысле поверхности с $K \leqslant 0$, которая лежит в шаре конечного радиуса. В этом примере имеется счетное число особых точек, в которых поверхность принадлежит классу C^1, а в остальных классу C^2. Наличие этих особых точек, по-видимому, не существенно. Так как в этом примере $\inf K = -\infty$, то в [5] ставился вопрос о существовании полной ограниченной в пространстве седловой поверхности с ограниченной снизу кривизной K. Ответ на этот вопрос был недавно дан на основании интересной работы Омори [161] в статье Байкозиса и Куфогиоргаса [66]. Доказано, что полное двумерное риманово многообразие, погруженное изометрически в евклидово трехмерное пространство с гауссовой кривизной K, удовлетворяющей неравенству $-\infty < -a^2 \leqslant K \leqslant 0$, внешне не ограничено. В работе Ю. А. Аминова [4] была получена оценка для внешнего диаметра области произвольного подмногообразия F^n в евклидовом пространстве E^N. Предельный переход в этой оценке для полного подмногообразия с кривизной Риччи $\mathrm{Ric} \geqslant -a^2$ и ограниченным по модулю вектором средней кривизны $|H| \leqslant H_0$ дает оценку для радиуса шара, содержащего поверхность $R \geqslant 1/(H_0 + a^2(n-2))$. Отсюда, для двумерной поверхности $R \geqslant 1/H_0$, и полная минимальная поверхность с ограниченной снизу кривизной неограничена в пространстве. Этим дается частичный ответ на вопрос С. Черна. Приведенная оценка $R \geqslant 1/H_0$ была затем доказана и при $n > 2$ для подмногообразий с ограниченной снизу кривизной Риччи в работе Хасаниса и Кутруфиотиса [112] на основании теоремы Омори. Впервые возможность применения этой теоремы к получению оценки диаметра была замечена в работе Хасаниса [111]. Омори в [161] доказал, что для гладкой ограниченной сверху функции f на полном римановом многообразии M с ограниченной снизу кривизной K по любому $\varepsilon > 0$ найдется точка $p \in M$, такая что $|\mathrm{grad}\, f| < \varepsilon$ и $\max\limits_X \{X^i X^j \nabla_i \nabla_j f(p)\} < \varepsilon$, $|X| = 1$. Условие ограниченности снизу кривизны K, как показывают примеры, существенно. С помощью этой теоремы Омори показывает, что если $\varphi: M \to E^N$ — изометрическое погружение полного риманова многообразия с ограниченной снизу секционной кривизной в E^N и если существует единичный вектор n такой, что $\dfrac{\langle \varphi(p), n \rangle}{|\varphi(p)|} \geqslant \delta > 0$ для всех $p \in M$, то существует точка p_0 и единичный нормальный к M вектор ξ в p_0, для которого вторая фундаментальная форма положительно определена. Метод доказательства этих теорем существенно использует полноту многообразия. Для замкнутого риманова многообразия $M^n \subset E^{2n-1}$ с кривизной $K \leqslant K_0$ Якубович установил оценку радиуса, содержащего M^n шара $R \geqslant 1/\sqrt{K_0}$. С помощью этого результата в работе Ю. А. Аминова [6] установлена оценка R для риманова многообразия $M^n \subset E^{2n-3}$ с границей, выраженная через внутренние величины. Заметим, что если размерность объемлющего пространства равна $2n$, то подобную оценку получить нельзя.

В работе Бликкера [78] доказано, что если C^4-регулярная полная поверхность в E^3 не имеет омбилических точек, ее гауссова кривизна K вне некоторого компактного множества постоянна и сумма квадратов главных кривизн отделена от нуля, то ее интегральная кривизна равна нулю. Это утверждение связано с гипотезой Дж. Милнора.

2. Изометрические погружения пространств положительной кривизны. В работе А. В. Погорелова [35] исследуется вопрос о том, в какой мере регулярность метрики выпуклой гиперповерхности евклидова пространства влечет за собой регулярность гиперповерхности. Доказывается, что гладкая выпуклая гиперповерхность с регулярной метрикой и положительной секционной кривизной регулярна. Именно, если метрика k раз дифференцируема, $k \geqslant 2$, то и гиперповерхность k раз дифференцируема. Если метрика гиперповерхности аналитическая, то гиперповерхность аналитическая. В работе А. Д. Милки [31] с помощью найденного нового свойства кратчайших на выпуклых гиперповерхностях это утверждение доказывается без требования гладкости гиперповерхности. Именно, выпуклая гиперповерхность в евклидовом пространстве, сферическом или в пространстве Лобачевского R с C^2-регулярной метрикой и с 2-секционной кривизной, большей кривизны пространства, C^2-регулярна. Доказывается также обобщение теоремы А. Д. Александрова: выпуклая гиперповерхность в R с двухсторонне ограниченной кривизной, большей кривизны пространства, строго выпуклая и гладкая.

По известной теореме А. В. Погорелова [34] о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой и теореме А. Д. Александрова [1] о реализуемости в трехмерном евклидовом пространстве E^3 выпуклых метрик метрика класса C^k и положительной кривизны погружается в E^3 в виде выпуклой регулярной класса $C^{k-1, \beta}$ поверхности. В работе И. Х. Сабитова [48] теорема о регулярности поверхности уточняется. Доказывается: если выпуклая поверхность S изометрична некоторому двумерному риманову многообразию M класса $C^{k,\alpha}$, $k \geqslant 2$, $0<\alpha<1$, метрика которого имеет гауссову кривизну $K>0$, то изометрия между M^2 и S принадлежит классу $C^{k,\alpha}$. Поверхность S регулярна класса $C^{k,\alpha}$. В работе И. Х. Сабитова и С. З. Шефеля [49] рассматривается обратная постановка вопроса: о регулярности метрики, если известна регулярность поверхности. Гладкость метрики поверхности, вообще говоря, ниже гладкости поверхности. Тем не менее, в [49] доказывается, что если метрика ds^2 является метрикой некоторой поверхности, то можно выбрать некоторую специальную систему координат, в которых ds^2 имеет такую же или «почти» такую же гладкость, что и сама поверхность. Более точно, всякая $C^{m,\alpha}$-гладкая ($m\geqslant 2$, $0<\alpha<1$), k-мерная поверхность S^k ($2\leqslant k\leqslant n-1$) в n-мерном римановом пространстве $R^n(m, \alpha)$ является $C^{m,\alpha}$-гладким изометрическим погружением некоторого $C^{m,\alpha}$-гладкого риманового многообразия. Такими специальными координатами, в которых метрика приобретает наиболее гладкий вид, являются гармонические координаты. В работе И. Х. Сабитова [47] изучаются погружения двумерных метрик класса $C^{n,\alpha}$ ($n\geqslant 2$, $0<\alpha<1$), заданной в области G, гомеоморфной кругу в E^3. Доказано, например, что каждая точка $C^{n,\alpha}$-гладкого многообразия положительной кривизны имеет окрестность, погружаемую в E^3 как $C^{n,\alpha}$-гладкая выпуклая поверхность с краем на сфере заранее заданного радиуса. Доказана также возможность погружения с круговым краем.

С. З. Шефелем [56] изучается связь класса регулярности поверхности с преобразованием инверсии. Доказано, что поверхность F в E^n с $C^{l,\alpha}$-гладкой метрикой ($l\geqslant 2$, $0<\alpha<1$), сохраняющая этот класс гладкости метрики при $(n+1)$ инверсиях в E^n, с центрами в вершинах невырожденного симплекса, является $C^{l,\alpha}$-гладкой.

В работе Ю. Ф. Борисова [14] вводятся классы погружений, связанные с показателями Гёльдера. Множество всех $C^{l,\alpha}$-изометрических погружений, таких что ни в одной точке они не являются изометрическими погружениями с $\alpha'>\alpha$, называется классом погружений $C^{l,\alpha}$. Класс погружений называется универсальным для пространств размерности n, если всякое пространство V^n допускает локальное погружение данного класса в E^{n+1}. Имеет место

Теорема: при любом $\alpha<1/(n^2+n+1)$ класс погружений $C^{1,\alpha}$ является универсальным для пространств V^n. Развивая идеи Дж. Нэша и Кейпера, изучение погружений подмногообразий с малой регулярностью продолжал Якубович [124].

Каллен в [125] установил теорему о погружении метрик с малой регулярностью, а именно, принадлежащих гёльдеровым классам H^β.

Теорема: Если метрика G компактного n-мерного многообразия принадлежит классу H^β, $0<\beta\leqslant 2$, тогда при достаточно большом N уравнение

$$(dU, dU)=G$$

имеет решение $U\in H^\alpha$, $\alpha<1+\frac{\beta}{2}$, где U — N-мерный вектор. С другой стороны, если $0\leqslant\beta<2$, то множество всех метрик $G\subset H^\beta$, для которых это уравнение имеет решение $U\in H^\alpha$ с $\alpha>1+\frac{\beta}{2}$, есть первой категории.

В работе [162] О'Нейл изучает существование омбилических точек на подмногообразиях постоянной кривизны коразмерности 2. Омбилической точкой изометрического погружения $\psi: M^d \to \bar{M}^{d+k}$ называется точка $m \in M$, в которой все векторы нормальной кривизны равно. Доказано, что если M^d — полное риманово многообразие постоянной кривизны $c>0$ и размерности $d \geqslant 4$, то каждое изометрическое погружение $\psi: M^d \to \bar{M}^{d+k}$ в многообразие постоянной кривизны $\bar{c}<c$ имеет омбилическую точку. Примеры показывают, что утверждение теоремы не имеет места при $c \leqslant 0$ или при $k>2$. Для изометрического погружения $\psi: M^d \to \bar{M}^{d+k}$ при $k \leqslant d-2$ и $\bar{c}<c$ доказано, что каждое касательное пространство M_m содержит омбилическое подпространство U размерности $r \geqslant d-k-1$ (т. е. все направления в U имеют одну и ту же длину вектора нормальной кривизны). В «регулярных» точках M относительно ψ (т. е. в тех точках, где поле нормального вектора Z и поле U омбилических подпространств ψ дифференцируемо) эти омбилические подпространства можно проинтегрировать и получить омбилическое подмногообразие в M и в $\bar{M}$. Исследования в этом направлении были продолжены в работах Оцуки, Рекцигел [170] — [171].

В [163] доказано, что если M^d-полное риманово многообразие имеет постоянную кривизну $c>0$, то M^d может быть погружено в сферу $S^{d+1}(c)$ кривизны c тогда и только тогда, когда M^d изометрично $S^d(c)$. Любое такое погружение есть вложение в большую d-сферу. Если же M^d с постоянной отрицательной кривизной c изометрически погружено в гиперболическое пространство той же кривизны c, то группы когомологий $H^i(M^d)=0$ для $i \geqslant 2$.

В работах Хенке [114]—[115] и Эрбахер [93] изучены изометрические погружения m-мерной сферы в евклидово пространство E^{m+2}. Легко построить такие погружения, если рассмотреть погружение E^{m+1} (или пространственной окрестности S^m) в E^{m+2} (например, наматывая на цилиндр или на конус) и это отображение ограничить на S^m. Ставится вопрос, насколько наоборот произвольное заданное изометрическое C^∞-погружение $f: S^m \to E^{m+2}$ может рассматриваться как ограничение изометрического C^∞-погружения E^{m+1} в E^{m+2}. Если отображение f есть ограничение на S^m некоторого изометрического отображения окрестности S^m $F: E^{m+1}$ в E^{m+2}, то f называется продолжимым, а отображение F называется изометрическим продолжением f. Оказывается существование такого продолжения в некоторую окрестность точки $x \in S^m$ зависит от того, будет ли точка x граничной точкой множества омбилических точек погружения f или нет. (Если $f: M \to \bar{M}$ — изометрическое C^∞-погружение, то точка $p \in M$ называется омбилической, если для каждого нормального вектора $\eta \in (f_* T_p M)^\perp$ существует действительное число λ такое, что второй фундаментальный тензор A_η в этой точке имеет вид $A_\eta=\lambda\mathrm{id}_{T_pM}$). В работе [93] Эрбахер доказано существование изометрического продолжения F отображения $f:S^m\to E^{m+2}$, $m\geqslant 4$, в окрестности неомбилической точки $x\in S^m$. В [114] Хенке доказывается единственность такого продолжения, если x является неомбилической точкой, т. е. для этих точек имеет место некоторый вид «жесткости». Если точка x является внутренней точкой множества омбилических точек, то локальное изометрическое продолжение f в окрестности x также существует, но не единственно; напротив, существуют два определенных в окрестности p локальных изометрических продолжения f, которые ни в одной окрестности не совпадают. Из этих утверждений следует, что, в случае $m\geqslant 4$, локальное изометрическое погружение $f:S^m\to E^{m+2}$ имеет продолжение во всех точках S^m, за исключением граничного множества всех омбилических точек. В работе [114] построен пример такого изометрического C^∞-погружения $f:S^m\to E^{m+2}$, что существует точка $p\in S^m$, в окрестности которой f не является локально изометрически продолжимым. Изучено также геометрическое строение множества неомбилических точек Z. Существуют две аффинные гиперплоскости H_1 и $H_2\subset E^{m+1}$ с $H_1\cap S^m\neq\varnothing$, $H_2\cap S^m\neq\neq\varnothing$ и $H_1\cap H_2\cap S^m=\varnothing$, такие что открытые полупространства H_1^+ и H_2^+ в пересечении с S^m дают Z, т. е. $Z=H_1^+\cap H_2^+\cap S^m$.

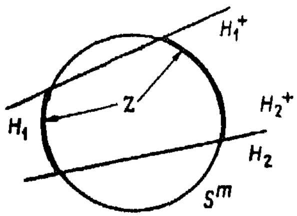

Рис. 2

В работе Хенке [113] исследованы вопросы изометрического погружения m-мерных сферических пространственных форм коразмерности 2 в евклидово пространство E^{m+2}, сферическое пространство S^{m+2} и действительное проективное пространство P_D^{m+2} кривизны D и гиперболическое пространство H_D^{m+2} кривизны $D<0$.

Основной результат: Пусть M — m-мерная пространственная форма кривизны $c>0$, $(m\geqslant 4)$ и $\bar{M}$ — $(m+2)$-мерное стандартное пространство кривизны $\bar{c}<c$. Если существует изометрическое действительно-аналитическое погружение $M\to\bar{M}$, то M односвязно, т. е. изометрично S_C^m.

Следствие. Не существует ни одного изометрического действительно-аналитического погружения m-мерной неодносвязной сферической пространственной формы ($m \geqslant 4$) в некоторую ($m+2$)-мерную односвязную пространственную форму.

В случае погружений класса C^∞ доказано следующее предложение.

Если существует такое изометрическое C^∞-погружение g: $M \to \bar{M}$, что открытое множество всех не омбилических точек g состоит самое большее из конечного числа односвязных компонент, то M односвязно.

В работах О'Нейла и Дж. Мура проводилось дальнейшее изучение изометрических погружений пространств постоянной кривизны с большой коразмерностью.

Если M^n — риманово пространство постоянной кривизны k погружено в евклидово пространство E^N и $\alpha(X, Y)$ — вторая фундаментальная форма погружения, которая рассматривается как симметричное билинейное отображение $\alpha : T_pM \times T_pM \to N_pM$, определенное по формуле $\alpha(X, Y)$ = нормальная компонента $\nabla_x Y$, где ∇ — ковариантная производная в E^N, то в [152] доказана следующая

Теорема. Предположим, что $K > 0$ и $N \leqslant 2n-1$. Если существует единичный вектор $u \in T_pM$ такой, что $\langle \alpha(u, u), \alpha(u, u) \rangle < K$, тогда $N = 2n-1$ и α — диагонализируемая форма, т. е. существует базис $e_1, \ldots, e_n$ в T_pM такой, что $\alpha(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. Более того, главные векторы кривизны $\alpha(e_i, e_i)$ порождают N_pM и только один вектор, например, e_1, удовлетворяет неравенству $\langle \alpha(e_1, e_1) \alpha(e_1, e_1) \rangle < K$.

Следующее предложение при $N \leqslant 2n-2$ доказано в [163] и при $N \leqslant 2n-1$ в [152].

Если для всех единичных касательных векторов $\langle \alpha(u, u), \alpha(u, u) \rangle \geqslant K$, тогда существует вектор единичной длины $e \in N_pM$ такой, что

$$\langle \alpha(x, y) e \rangle = \sqrt{K} \langle xy \rangle$$

для всех x, $y \in T_pM$. Более того, вектор e однозначно определен тем условием, что он удовлетворяет этому соотношению.

Эти предложения приводят к новым понятиям омбиличности. Точка $p \in M^n$ называется строго омбилической, если существует вектор e единичной длины $\in N_pM$ такой, что вторая фундаментальная форма записывается в виде

$$\alpha(x, y) = \sqrt{K} \langle xy \rangle e, \text{ для } x, y \in T_pM.$$

Поверхность M^n из строго омбилических точек является частью стандартной сферы радиуса $1/\sqrt{K}$ в E^{n+1}. Точка $p \in M^n$ называется слабоомбилической, если существует единичный вектор $e \in N_pM$ такой, что

$$\langle \alpha(x, y), e \rangle = \sqrt{K} \langle x, y \rangle .$$

Ставится вопрос о виде многообразия M^n, каждая точка которого является слабо омбилической.

В работе [152] Дж. Мур доказал теорему.

Теорема. Пусть M^n — компактное риманово многообразие постоянной кривизны 1. Если M^n обладает изометрическим погружением в E^N и $N \leqslant \frac{3}{2} n$, тогда M^n — односвязно и, следовательно, изометрично S^n.

Если же M^n имеет переменную, но положительную кривизну и изометрически погружено в E^{n+2}, то многообразие M^n является гомотопической сферой [153].

В работах Калаби, до Кармо и Валлаха изучены изометрические минимальные погружения n-мерной сферы S^n_K постоянной секционной кривизны K в единичную сферу S^l_1 в евклидовом пространстве E^{l+1}. Калаби доказал, что для каждого положительного целого числа s существует изометрическое минимальное погружение $\psi_{2,s}: S^2_{K(s)} \to S^{2s}_1$, где $K(s) = 2/s(s+1)$. Если $\varphi: S^2_K \to S_1{}^l$ — произвольное изометрическое минимальное погружение такое, что $\varphi(S^2_K)$ не содержится в гиперплоскости пространства E^{l+1}, то с точностью до движения $\varphi = \psi_{2,s}$ для некоторого s, в частности $K = K(s)$, $l = 2s$. В [191] строится изометрическое минимальное погружение $\psi_{n,s}$ многомерных сфер $S^n_{K(s)}$ в $S^{m(s)}_1$, где $K(s) = n/s(s+n-1)$ и

$$m(s) = (2s+n-1)\frac{(s+n-2)!}{s!\,(n-1)!} - 1.$$

Эти погружения строятся с помощью сферических гармоник порядка s, т. е. ограничения на $S_1{}^n$ однородных полиномов $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ степени s в E^{n+1}, удовлетворяющих уравнению $\sum\limits_i \partial^2 P/\partial x_i{}^2 = 0$, $i = 0, \ldots, n$. Размерность пространства сферических гармоник порядка s равна $m(s)+1$ и если $f_0, \ldots, f_m$ — ортонормальный базис этого пространства, то искомое изометрическое погружение $M \to E^{m+1}$ имеет вид

$$\psi(p) = (f_0(p), \ldots, f_m(p)).$$

Аналогично строится изометрическое погружение комплексных проективных пространств $P^d(C)$ постоянной голоморфной кривизны 1 в единичную сферу S^m_1. В этом случае используются однородные полиномы степени k $P(z_0, \ldots, z_d, \bar{z}_0, \ldots, \bar{z}_d)$, удовлетворяющие уравнению $\sum\limits_i \partial^2 P/\partial z_i \partial \bar{z}_i = 0$. Эти погружения являются минимальными, при $d = 1$ являются вложениями и они включают многообразия Сэгре (Картан).

В работе [164] О'Нейл определил изотропные изометрические погружения, как такие погружения, для которых длина каждого вектора нормальной кривизны одна и та же в каждой точке, т. е. длина может зависеть только от точки. Этим свойством обладают построенные им изометрические минимальные вложения проективных пространств $P^n(\sigma_n)$ кривизны $\sigma_n=n/2(n+1)$ в единичную сферу размерности $(n(n+3)/2)-1$. Эти вложения являются обобщениями поверхности Веронезе.

Подробно изотропные погружения изучались в [118]—[119]. Доказано, что при определенных условиях n-мерная компактная ориентируемая пространственная форма $M^n(c)$, изотропно погруженная в другую пространственную форму $M^{n+p}(c)$, является многообразием Веронезе в некоторой омбилической гиперповерхности $M^{n+p}(\bar{c})$.

В [148] Дж. Милсоном получены формулы для конформного инварианта Черна—Саймонса и с их помощью показано, например, что 15-мерная линза конформно не погружается в E^{22}, хотя гладко погружается в E^{16}. Дж. Мур и Морван [154] изучают конформно плоские подмногообразия коразмерности 4. Показано, что если $M^n\subset E^{n+p}$ и $n\geqslant 4$, $p\leqslant 4$ и $p\leqslant n-3$, то M^n является квазиомбилическим тогда и только тогда, когда M^n конформно плоское. Характеристические классы и конформные инварианты рассматриваются в работе Дж. Мура и Дж. Вайта [155].

Обращение в ноль некоторых характеристических классов Понтрягина подмногообразия в сферическом пространстве доказывается в [13] А. А. Борисенко. Здесь же доказывается, что эйлерова характеристика компактной строго выпуклой поверхности $F^{2l}\subset E^{2l+p}$ положительна. При этом поверхность называется строго выпуклой, если в каждой точке существует ортогональный базис нормалей $n_1, \ldots, n_p$, по отношению к которым вторые квадратичные формы знакоопределены и одна из форм положительно определена.

§ 2. ПОГРУЖЕНИЯ И ВЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Погружение дифференцируемого многообразия M^k во второе V^n, $n>k$, есть отображение f класса C^1 с якобианом ранга k многообразия M^k в V^n. Если для разных точек p и $q\in M^k$ их образы различны, то говорят о вложении M^k в V^n. В известной работе Уитни [195] доказано, что любое k-мерное многообразие может быть погружено в E^{2k-1} и вложено в E^{2k}.

В работах С. Смейла и Хирша было продолжено изучение погружений и их классификация по отношению к регулярной гомотопии. Гомотопия $f_t : M^k\rightarrow V^n$ называется регулярной, если на каждом этапе она является регулярным погружением и индуцирует непрерывную гомотопию касательных пучков. Смейл [176] рассмотрел погружения сфер S^k в n-мерное евклидово пространство E^n. Полученный им результат можно сформулировать так. Выберем на сфере S^k точку и k-репер в этой точке и выберем в E^n точку и k-репер в этой точке. Назовем погружение $f: S^k \to E^n$ базовым, если оно переводит выбранные точку и k-репер на сфере S^k в выбранные точку и k-репер в E^n. Рассматриваются базовые регулярные гомотопии, которые при каждом t являются базовыми погружениями. Пусть $V_{n,k}$ — штифелево многообразие всех k-реперов E^n (не обязательно ортогональных). Показано, что существует взаимно однозначное соответствие между элементами $\pi_k(V_{n,k})$ и базовыми регулярными гомотопическими классами погружений S^k в E^n. Для любых двух базовых погружений f и g существует инвариант $\Omega(f, g) \in \pi_k(V_{n,k})$ такой, что f и g будут базово регулярно гомотопными тогда и только тогда, когда $\Omega(f, g)=0$.

Инвариант $\Omega(f, g)$ определяется так. Если заданы базовые погружения f и g, то небольшой регулярной гомотопией g их можно сделать совпадающими в некоторой окрестности U выбранной точки на сфере S^k. Можем считать, что дополнение этой окрестности гомеоморфно диску D^k. Выберем на нем фиксированное поле k-реперов. На $f(D^k)$ и $g(D^k)$ возникает поле k-реперов, т. е. f и g индуцируют отображения f_* и g_* диска D^k в штифелево многообразие $V_{n,k}$, причем на границе D^k эти отображения совпадают. Рассматривая S^k как два экземпляра D^k, склеенных по границе с отображениями f_* и g_* на каждом экземпляре, получаем отображение S^k в $V_{n,k}$. Гомотопический класс этого отображения и есть $\Omega(f, g) \in \pi_k(V_{n,k})$. Многие из групп $\pi_k(V_{n,k})$ вычислены. Если $n > k+1$, то инвариант $\Omega(f, g)$ может быть определен и для небазовых погружений. Утверждения будут справедливы в этом случае и для небазовых гомотопических классов. Так как $\pi_k(V_{n,k})=0$ для $n \geqslant 2k+1$, то два C^∞ погружения S^k в E^n при $n \geqslant 2k+1$ регулярно гомотопны. В случае $n=2k$ регулярные гомотопические классы характеризуются числом самопересечения I_f.

Уитни определил I_f как алгебраическое число самопересечений $f: M^k$ в E^{2k} в предположении, что $f(M^k)$ пересекает себя лишь в изолированных точках. Смейлом доказано, что два C^∞-погружения S^k в E^{2k}, $k > 1$, регулярно гомотопны в том и только в том случае, когда они имеют одно и тоже число I_f. Для k-четного, Лашоф и Смейл показали, что k-ый нормальный класс Штифеля—Уитни $\overline{w}_k(f)=2I_f$, т. е. в этом случае $\overline{w}_k(f)$ характеризует регулярный гомотопический класс f. Штифель ввел свои классы, исследуя вопрос существования на n-мерном многообразии системы из m непрерывных векторных полей (m-поле), которые линейно независимы в каждой точке. Он доказал, что на каждом многообразии M^n и для каждого заданного числа m ($1 \leqslant m \leqslant n$) можно построить m-поле, сингулярности которого составляют самое большее некоторый $(m-1)$-мерный комплекс. Сингулярности образуют некоторый цикл и его класс гомологий, принадлежащий

(m—1)-мерной группе Бетти M^n, не зависит от специального выбора m-поля. Этот класс Штифель назвал m-ым характеристическим классом. Он доказал, что для существования регулярного m-поля на M^n необходимо обращение в ноль всех характеристических классов от первого до m-го. Штифель также показал, что каждое трехмерное замкнутое и ориентируемое многообразие параллелизуемо. Уитни ввел более общие классы, рассматривая пространство сфер $S(K)$, которое получается, если каждой точке p комплекса K сопоставить некоторую ν-мерную сферу $S(p)$. Характеристические классы Уитни возникают при рассмотрении возможности построения k ортогональных точек в каждом $S(p)$, изменяющихся непрерывно при непрерывном изменении p на всем K. Хирцебрух предложил аксиоматическое определение классов Штифеля—Уитни (см. [32]).

Смейл рассмотрел также вопрос о возможности распространения погружения $f: S^{k-1} \to E^n$ до погружения диска D^k и показал, что это возможно сделать тогда и только тогда, когда $\Omega(f, e) = 0$, где e — стандартное погружение S^{k-1} в E^k.

Хирш получил теоремы о погружениях произвольных дифференцируемых многообразий в евклидово пространство. В работе [118] показано, что параллелизуемое многообразие может быть погружено в евклидово пространство в виде гиперповерхности с нормальной степенью 0. Каждое замкнутое трехмерное многообразие погружается в E^4. Если M^k имеет размерность $k \equiv 1 \pmod 4$, то M^k погружается в E^{2k-2} в том и только в том случае, когда $\bar{w}_{k-1}(M) = 0$. Отсюда следует, что каждое компактное 5-мерное многообразие погружается в E^8.

Если M^k погружается в E^{n+r} с трансверсальным r-полем реперов, то M^k погружается в E^n. Если M^k погружается в E^n с тривиальным нормальным пучком, то M^k погружается в E^{k+1}. Наилучший возможный результат получен для проективных пространств размерности $\leqslant 8$. Возможны следующие погружения действительных проективных пространств: P^2 и P^3 в E^4 (Милнор), P^5 в E^7, P^6 в E^7, P^7 в E^8. Если же $n > 7$, то P^n нельзя дифференцируемо погрузить в E^{n+2} (Левин [136]). В этой же работе доказано, что P^9 погружается в E^{15} и не погружается в E^{14}. Если проективное пространство P_{2^r} погружается в E_{2^r+k}, то $k \geqslant 2^r - 1$, (См. Дж. Милнор, Дж. Сташеф «Характеристические классы»). Поэтому P^8 погружается в E^{15} и не погружается в E^{14}.

В работе Маховальда [142] доказано, что если M^n — компактное ориентируемое многообразие, $n > 4$ и n — нечетное, то M^n погружается в E^{2n-2}. Если же n — четное, то M^n погружается в E^{2n-2} в том и только том случае, когда $\bar{w}_2 \bar{w}_{n-2} = 0$. Достаточность этого условия доказна в работе Масси [144], необходимость — в [142]. В цитированной работе Хирша получены также некоторые достаточные условия, чтобы два погружения были регулярно гомотопны. Введено два инварианта Ω и τ. Для заданного погружения $f\colon S^{k-1}\to E^n$, $k<n$, и поля f' векторов, трансверсальных $f(S^{k-1})$, определяется инвариант $\tau(f, f')$ как элемент некоторой гомотопической группы, обладающий следующими свойствами:

1) $\tau(f, f')=0$ в том и только том случае, когда f может быть расширено до погружения g k-мерного диска D^k, такого что его нормальная производная на S^{k-1} есть f', 2) $\tau(f, f')=$ $=\tau(g, g')$. Инвариант $\Omega(f, g)$ есть элемент некоторой гомотопической группы такой, что $\Omega(f, g)=0$ в том и только том случае, когда f и g регулярно гомотопны относительно гомотопии, совпадающей с f и g на S^{k-1}. Здесь f и $g: D^k\to E^n$.

Известна следующая гипотеза о погружениях проективных пространств. Если $\alpha(n)$ — число единиц в двоичном разложении n, то предполагалось, что RP^n погружается в E^{2n-k+1} и не погружается в E^{2n-k}, где $k=2\alpha(n)$, если $\alpha(n)\equiv 1,2 \pmod 4$, $k=$ $=2\alpha(n)+1$, если $\alpha(n)\equiv 0 \pmod 4$, и $k=2\alpha(n)+2$, если $\alpha(n)\equiv$ $\equiv 3 \pmod 4$. Эта гипотеза опровергнута в работе Девиса и Маховальда [85], где доказано, что если $n\equiv 7 \pmod 8$ и $\alpha(n)=$ $=6$, $n\neq 63$, то RP^n погружается в E^{2n-14} и не погружается в E^{2n-13}. Погружения таких многообразий рассматриваются в [76].

Федером и Сегалом [94] доказывается, что для всех n комплексное проективное пространство CP^n не погружается в $E^{4n-2\alpha(n)-1}$ и кватернионное проективное пространство QP^n не погружается в $E^{8n-2\alpha(n)-3}$, где $\alpha(n)$ — число единиц в двоичном разложении n. Здесь же получены результаты о невкладываемости: CP^n не вкладывается в $E^{4n-2\alpha(n)}$ и QP^n не вкладывается в $E^{8n-2\alpha(n)-2}$.

Вопрос о погружении CP^n в $E^{4n-2\alpha(n)}$ рассматривается в работе Сигрист и Сэтер [175]. Получен численный признак, необходимый для существования такого погружения. Погружения комплексных проективных пространств рассматриваются в работе Дэвиса и Маховальда [86].

Альбертом [62] определяются и изучаются характеристические классы погружения гладкого многообразия в другое многообразие с римановой метрикой постоянной кривизны. Характеристические классы, в связи с погружениями и вложениями изучаются в работах Папаставридиса [168]—[167]. В работах Голбус [101] изучаются препятствия к погружениям одного гладкого многообразия M^m в другое N^n. Указаны достаточные условия для погружаемости M^m в CP^{2k}, выраженные в терминах классов Штифеля $\bar{w}(M)$.

Винтген изучает погружения гладких многообразий $N_n\to$ $\to M^{n+k}$ с невырождающимися дифференциалами высших порядков [198]. В работах Морин [156], Морин и Петит [157]—[158] дается описание выворачивания сферы в E^3. Согласно общей теореме Смейла, существует непрерывное семейство регулярных погружений $S^2 \to E^3$, с помощью которых внутренняя сторона сферы может быть сделана внешней, но Смейл не указал идеи, как это можно осуществить. А. Шапиро предложил один процесс выворачивания с использованием двухкратного накрытия поверхности Боя. На эту тему были опубликованы работы Кейпера, Филипса и других, в которых тоже использовалась поверхность Боя. В [156]—[158] описание процесса выворачивания сферы дается с помощью рисунков и с помощью аналитических выражений.

Характеристические классы погруженных многообразий изучаются в работах Бендерски [74] и Лея [131].

Рассмотрим теперь вопрос о гладких вложениях гладких многообразий. Согласно теореме Уитни, каждое n-мерное многообразие вкладывается в E^{2n}. Он же показал, что действительное проективное пространство RP^n при $n=2^i$ не может быть вложено в E^{2n-1}. Но случай, когда размерность n есть степень двойки, является исключением. Как правило, многообразие размерности n вкладывается в E^{2n-1}. Именно, Хирш и Хэфлигер [108], Ву [201] доказали это для всякого ориентируемого замкнутого многообразия размерности $n \geqslant 5$, и если многообразие неориентируемо, $n \geqslant 5$, и не является степенью двойки, то возможность вложения доказана в [108]. Всякое трехмерное многообразие можно вложить в E^5. Для ориентируемых замкнутых многообразий это доказано Хиршем [116], а для неориентируемых замкнутых многообразий В. А. Рохлиным [45]. Всякое связное незамкнутое многообразие M^n вкладывается в E^{2n-1}.

В последние годы во многих работах изучалась проблема вложений проективных пространств. Левин в [136] доказал, что если $(n-1)$ есть степень 2, то P^n не может быть вложено в E^{2n-2}. Согласно Маховальду [140] и Ханделу [110], RP^n вкладывается в E^{2n-2} в том и только том случае, когда $n=2^r+s$, где $2 \leqslant s < 2^r$. В работе [121] Хопф и Джеймс построили вложение P^{2^k+1} в $(2^{k+1}+1)$-мерное евклидово пространство. В [141] Маховальдом показано, что эти вложения RP^n наилучшие из возможных. Именно, доказано, что если $2^{k-1} < n < 2^k$, то P^n нельзя дифференцируемым способом вложить в E^{2k}. Например, P^3 вкладывается в E^5, P^5 в E^9, P^9 в E^{17} и эти пространства не вкладываются в евклидовы пространства меньшей размерности.

Используя классы Понтрягина, С. Черн доказал, что комплексное проективное пространство CP^m комплексной размерности m не может быть дифференцируемо вложено в евклидово пространство размерности $3m-1$ или $3m-2$, если m — четно или нечетно, соответственно. Отметим, что CP^2 вкладывается в E^7, кватернионная проективная плоскость QP^2 вкладывается в E^{13} и плоскость Кэли в E^{25}. Размерности этих евклидовых пространств наименьшие из возможных. Ряд результатов о невкладываемости многообразий Грассмана $G_{2,n}$ и $G_{3,n}$ в евклидово пространство получен в работе Опройу [165]. Здесь показано, например, что если число $s=2^r$ такое, что $2^{r-1} \leqslant n \leqslant 2^r$ и 1) либо $n \neq s-1$, тогда $G_{2,n}$ не вкладывается в E^{2s-2} и не погружается в E^{2s-3}, 2) либо $n=s-1$, тогда $G_{2,s-1}$ не вкладывается в E^{3s-2}. Аналогичные результаты получены для $G_{3,n}$.

Доказательство невозможности вложений связано с изучением классов Штифеля—Уитни, которые для вложенных многообразий не произвольны. Если многообразие M^n гладко вложено, как замкнутое подмножество в евклидово пространство E^{n+k}, то k-ый класс Штифеля—Уитни нормального пучка $w_k = 0$ (см. Милнор, Сташеф [32]). Изучению условий на классы Штифеля—Уитни посвящены работы Лашофа и Смейла, Масси и других. В работе Масси [145] доказано, что если класс $w_{n-q}=0$ для компактного многообразия M^n, $0<q<n$, то существуют постоянные числа $h_1, h_2, \dots, h_q$ такие, что $h_1 \geqslant \geqslant \dots \geqslant h_q$ и $n=2^{h_1}+\dots+2^{h_q}$. Если n — четное и M^n ориентируемое, то $w_{n-1}=0$. Это обобщает результат Уитни о том, что w_3 ориентируемого M^4 равен нулю. Тривиальность характеристических классов Штифеля—Уитни—Эйлера для многообразия, вложенного в евклидово пространство, вторая квадратичная форма которого удовлетворяет некоторым неравенствам, доказана в работе Морвана [159]. Банхофом и Мак Крори [71] дается итерпретация классов Штифеля—Уитни гладких многообразий с помощью особенностей проекций на координатные пространства. Баусум [73] доказывает, что если $\bar{w}_{n-i}=0$ для $i \leqslant 4$ и либо M^n ориентируемо и $m \equiv 0, 1 \pmod 4$, либо M^n неориентируемо и $m = 2,3 \pmod 4$, то M^n вкладывается в E^{2n-2}.

Интенсивно изучался вопрос о классификации вложений, который значительно более труден, чем классификация погружений. В случае многомерных узлов S^n в S^{n+q} с коразмерностью $q>2$ значительный результат получен Хефлигером [105], который классифицировал эти узлы с помощью гомотопических групп. Оказывается при $q>2$ проблема изотопии может быть переведена в проблему конкорданности. Два дифференцируемых вложения f_0 и f_1 многообразия $M \to X$ конкорданны, если существует вложение $F: M \times I \to X \times \mathbf{I}$ такое, что $F(x, t) = (f_i(x), i)$; $i=0, 1$. Два конкорданных вложения называются эквивалентными, а множество классов эквивалентных вложений $S^n \to S^{n+q}$ обозначается через C_n^q. При $q>2$ два конкорданных вложения будут изотопными. Вводится операция суммы классов из C_n^q, которая превращает множество C_n^q в абелеву группу. Основной результат состоит в том, что группа изотопических классов C_n^q изоморфна триадной гомотопической группе $\pi_{n+1}(G, S0, G_q)$, где G_q — пространство отображений степени один сферы S^{q-1} на себя, G — есть индуктивный предел G_k при $k\to\infty$, SO — индуктивный предел пространств вращений SO_k. Элемент этой гомотопической группы представляется непрерывным отображением $f: D^{n+1}\times \times S^{N-1}\to S^{N-1}$ для некоторого большого N, обладающим некоторыми свойствами. Вычисление гомотопических групп Хефлигера в ряде случаев может быть проведно до конца. Например, в работе Милграма [147] указаны методы, позволяющие вычислить группы C^k_{2k-3+j} при $k=2$ или 3 $(\mathrm{mod}\, 8)$, $j=0,\ldots, 6$. В [107] Хефлигер доказывает, что любое дифференцируемое вложение $(4k-1)$-мерной сферы в m-мерную сферу S^m при $m>6k$ незаузлено, т. е. ограничивает в S^m $4k$-мерный диск. При условии $m=6k$ существует бесконечное число изотопических классов вложений $(4k-1)$-мерной сферы в $6k$-мерную сферу S^{6k}. Определяется группа $\Sigma^{m,n}$ классов h-кобордизмов вложенных сфер S^n в S^m. Вложенная сфера S^n в S^m называется h-кобордантной нулю, если она ограничивает дифференцируемый $(n+1)$-мерный диск D^{n+1} в единичном диске D^{m+1}. Как показал Смейл, элементы группы $\Sigma^{m,n}$ в большинстве случаев соответствуют изотопическим классам вложений S^n в S^m. Хефлигер доказывает, что группа $\Sigma^{6k,4k-1}$ изоморфна группе целых чисел Z, если $k>1$. Указывается некоторое стандартное вложение S^{4k-1} в S^{6k}, которое является генератором группы $\Sigma^{6k,4k-1}$. Оно строится вполне геометрическим образом. В евклидовом пространстве E^{3d} с координатами $(x, y, z)=(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d, z_1, \ldots, z_d)$ рассматриваются три вложенные $(2d-1)$-мерные сферы, лежащие в «координатных» пространствах $S_1: x=0$, $\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2}=1$, $S_2: y=0$, $\frac{z^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1$, $S_3: z=0$, $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, где числа $\alpha>\beta>0$. Затем S_1 соединяется с S_2 и S_2 с S_3 двумя тонкими цилиндрами

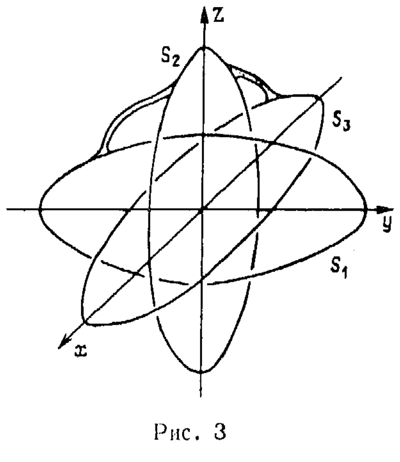

Рис. 3

При $d=2k$ получается стандартное вложение S^{4k-1} в S^{6k}, класс h-кобордизмов которого не зависит от частного выбора соединяющих цилиндров.

В ряде работ привлекаются гомотопические группы дополнения к узлу. Сталлингс и Левин [137] доказали, что при $n\geqslant5$ узел $\sigma: S^{n-2}\subset S^n$ будет незаузленным в кусочно-линейной и топологической категории тогда и только тогда, когда $\pi_q(S^n\setminus S^{n-2})\cong\pi_q(S^1)$ при $q\leqslant n$. При $n\geqslant4$ этот вопрос рассматривается и в [91]. Лашоф и Шанесон в [135] показали, что при $n\geqslant5$ существует не более двух неэквивалентных узлов $S^{n-2}\subset S^n$ с диффиоморфными дополнениями. Вложения гладкого многообразия M^m в гладкое многообразие N^n при условии $n\geqslant m+3$ рассматривает Лашоф [134]. Вложениям $(n-1)$-мерной сферы в E^n посвящена работа Давермана [84].

Для регулярного отображения $f: M^n\to E^{2n-1}$ односвязного многообразия С. П. Новиков в работе [33] определил инвариант из Z_2, равенство которого нулю необходимо и достаточно, чтобы f было регулярно гомотопно вложению. Доказывается, что существует C^1-близкое к f регулярное отображение $g: M^n\to E^{2n-1}$ такое, что множество точек в M^n, имеющих один и тот же образ при отображении g, разбивается на пары окружностей, называемых особыми. Каждая пара из особых окружностей S_1 и S_2 заклеивается кругами $\sigma_i\subset M^n$ так, что $\sigma_1\cap\sigma_2=\varnothing$. В каждой точке круга σ_i задается система трансверсальных к нему полей и трансверсаль к S_i, лежащая в σ_i. Тогда на образе окружностей $g(S_1)=g(S_2)$ определены $(2n-2)$-векторных полей, трансверсальных к $g(S_i)$ и независимых. Они определяют элемент $\alpha\in\pi_1(GL(2n-2))$. При определенных условиях α не зависит от выбора σ_i. Сумма инвариантов $\Sigma\alpha_k$ по всем особым парам является инвариантом отображения $g: M^n\subset E^{2n-1}$, обращение которого в ноль позволяет устранить самопересечения $g(M^n)$.

А. Б. Сосинский в [53] рассмотрел вопрос о конечной разложимости узла $\sigma: S^{n-2}\subset S^n$ в сумму простых, т. е. неразложимых узлов σ_1 и σ_2. Узел называется разложимым в сумму $\sigma=\sigma_1\#\sigma_2$, если существуют нетривиальные узлы $\sigma_i: S^{n-2}\subset S^n$, пересечение которых между собой и некоторым экватором S^{n-1} есть диск D^{n-2}, а объединение их минус $\operatorname{Int} D^{n-2}$ дает узел σ, расположенный трансверсально к S^{n-1}. Доказано, что если $n\geqslant5$, то всякий узел σ можно представить в виде суммы конечного числа простых узлов $\sigma=\sigma_1\#\ldots\#\sigma_m$.

С. Г. Смирнов в [51] классифицировал узлы S^m о многообразии M^n без края со стягиваемой универсальной накрывающей и $1<m<n-2$. По числам m, n и группе $\pi_1(M)$ определяется некоторая абелева группа $\Gamma(m, n, \pi_1(M))$, связанная с группами Хефлигера, такая, что множество гладких изотопических классов изоморфно этой группе, если M ориентируемо, и некоторой ее факторизации, если M неориентируемо. Вло-

жения и погружения изучались С. Г. Смирновым в [50] и М. Ш. Фарбером в [54], [55]. Конструкция заузливания (n—2)-мерного подмногообразия с помощью какого-нибудь узла $\sigma: S^{n-2} \subset S^n$ используется в работе О. И. Виро [17] для построения гладких вложений замкнутых неориентируемых поверхностей в E^4 с фундаментальной группой дополнения, отличной от Z_2. В известных стандартных вложениях $P^2 \subset E^4$ эта группа — Z_2. Гомотопические группы пространства собственных вложений одного открытого многообразия в другое изучают в [79] Бургеоз и Спринг. В работе А. З. Дымова [23] доказываются теоремы вложения n-мерных открытых многообразий в компактные многообразия размерности n, $n+1$ и $n+2q+2$.

Ряд авторов рассматривает интересный вопрос о представимости элементов групп гомологий многообразия M регулярными подмногообразиями —тематика, начатая работами Милнора, Кэрвера, В. А. Рохлина и других. Тристрам в [187] доказал для $M = S^2 \times S^2$, что элемент $\xi \in H_2(M)$ вида $\xi = n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 — естественные образующие этой группы, n_1 и n_2 взаимно простые числа, не может быть реализован сферой. В. А. Рохлин в [46] оценил снизу род двумерной поверхности, реализующей элемент ξ из группы $H_2(M)$ четырехмерного многообразия M через индекс самопересечения, сигнатуру M и число Бетти b_2. В указанном выше примере, при n_1 и n_2 четных, эта оценка дает $g \geqslant \frac{|n_1 n_2|}{2} - 1$. Вопрос о представимости гомологических классов вложенными подмногообразиями изучается и в работах Микса и Пэтреску [146], Беннекина [75] и Папаставридиса [168]. В [168], например, показано, что если M^{2n+1} — гладкое замкнутое многообразие и $2n+1 = 2^k - 1$, то всякий элемент $a \in H_{n+1}(M, Z_2)$ реализуется подмногообразием; если же $2n \neq 2^k - 2$, то существует (n—1)-связное многообразие M^{2n+1}, некоторый цикл которого не реализуется подмногообразием. Если M^{2n+1} ориентируемо, то все элементы из $H_{n+1}(M, Z_2)$ реализуются подмногообразиями.

Изотопическим классам вложений проективных пространств RP^n и CP^n посвящены работы Ясуи [202]—[204]. С помощью результатов М. М. Постникова и Хефлигера доказано, что если n — четное, $n \neq 2^r$ и $n \geqslant 10$, то существует только один изотопический класс вложений RP^n в E^{2n-2}. Если $n \geqslant 5$ и $n \neq 2^r + 2^s$, ($r \geqslant s \geqslant 0$), то n-мерное комплексное проективное пространство CP^n можно вложить в E^{4n-3} и имеется счетное число различных классов изотопности таких вложений. Изотопические классы вложений RP^n в E^N с $N = 2n$, $2n-1$ и $2n-2$ и нормальные пучки рассматриваются в работе Лармора и Ригдона [133].

Черезвычайные усилия были отданы проблеме погружений и вложений линзовых пространств. В последнее время этот вопрос рассматривался в работах Дедиу [87—88], Кобаяси [126], Бер рика [76]. Линзовое пространство $L^{2n+1}[p; p_0, p_1, \dots, p_n]$ — есть факторизация сферы $S^{n+1}=\left\{(z_0, \dots, z_n)\in C^{n+1} \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n} |z_k|^2=1\right\}$ действием группы, пораждаемой вращением γ

$$(z_0, \dots, z_n) \xrightarrow{\gamma} \left(e^{\frac{2\pi i p_0}{p}} z_0, e^{\frac{2\pi i p_1}{p}} z_1, \dots, e^{\frac{2\pi i p_n}{p}} z_n\right),$$

где $p, p_0, \dots, p_n$ — взаимно простые с p натуральные числа. Если $p_0= \dots =p_n=1$, то линзовое пространство обозначается через $L^n(p)$. Существуют параллелизуемые линзовые пространства, например, $L^1(p)$, $L^3(p)$, по теореме Хирша они погружаются в евклидово пространство в виде гиперповерхности [88]. В работе [126] доказано, что $L^n(5)$ не вкладывается в E^{3n+2} при $n=3\cdot 5^{t+1}+5^t$, но вкладывается в E^{3n+3}. В [76] показано, что $L^n(p)$ с p кратным числу $2^{2n-1-\alpha(n-1)}$ не погружается в евклидово пространство размерности $4n-2\alpha(n)-2$.

§ 3. ПОГРУЖЕНИЯ С МИНИМАЛЬНОЙ АБСОЛЮТНОЙ КРИВИЗНОЙ

Известно неравенство Фенхеля, говорящее о том, что интеграл от абсолютной кривизны k замкнутой кривой в E^3 больше или равен 2π, причем, равенство его 2π имеет место в том и только том случае, когда кривая плоская и выпуклая.

Фэри [98] и Милнор [149] доказали предположение Борсука о том, что этот интеграл для заузленной кривой в E^3 больше или равен 4π. Рассматривались различные обобщения этих неравенств. В работе Лангевина и Розенберга [132] для заузленной кривой C, являющейся границей поверхности M рода g, доказано следующее неравенство

$$2\int_C k\,ds+\int_M |K|\,dS \geqslant 2\pi(2g+3),$$

где K — гауссова кривизна поверхности M. Здесь же доказано, что для заузленного тора T в E^3

$$\int_T |K|\,dS \geqslant 16\pi.$$

Неравенство Фенхеля на замкнутые кривые в римановых пространствах обобщено в работах [179] и [188].

Заметим, что, хотя интеграл от модуля кручения $\varkappa$ замкнутой кривой C может быть сколь угодно малым, для него можно указать следующую оценку Сегрэ [174]. Обозначим через δ сферический диаметр описанного вокруг индикатрисы бинормалей круга, если эта индикатриса содержится на полусфере, и положим $\delta=\pi$, если эта индикатриса не лежит на полусфере.

Тогда

$$\int |\varkappa|\, ds > 2\delta.$$

Если замкнутая кривая C расположена на локально выпуклом цилиндре, направляющая кривая которого — кривая индекса m, и кривая C не касается прямолинейных образующих, то для интеграла от кручения можно указать оценку сверху, установленную в работе Ю. А. Аминова [8]

$$\left| \int\limits_C \varkappa ds \right| < 2\pi m.$$

Вайнер в [193] для неплоской замкнутой кривой в E^3 длины L, лежащей в шаре радиуса R, доказывает следующее неравенство

$$L \int\limits_C \varkappa^2 ds \leqslant R^2 \left[\int\limits_C k^2 ds \int\limits_C \varkappa^2 ds - \left(\int\limits_C k\varkappa ds \right)^2 \right].$$

Как следствие, для замкнутой кривой в E^3 получаем следующее неравенство

$$16 \int\limits_C \varkappa^2 ds \leqslant L \left[\int\limits_C k^2 ds \int\limits_C \varkappa^2 ds - \left(\int\limits_C k\varkappa ds \right)^2 \right].$$

Выведены также соответствующие неравенства для кривых в многомерном пространстве.

Перейдем теперь к рассмотрению обобщения неравенства Фенхеля на многомерные подмногообразия. Укажем обзоры на эту тему [130], [89].

Пусть M^n — компактное дифференцируемое многообразие размерности n и $\varphi : M^n \to E^{n+k}$ — некоторое погружение M^n в евклидово пространство E^{n+k}. Множество единичных нормальных векторов к M образует пучок $(k-1)$-мерных сфер над M, т. е. мноогобразие B размерности $(n+k-1)$. Рассмотрим отображение $\nu : B \to S^{n+k-1}$, которое сопоставляет каждому единичному нормальному вектору к B единичный вектор, проходящий через начало и параллельный к нормальному вектору. Пусть ν^* — индуцированное отображение касательных пространств. Тогда полная абсолютная кривизна есть

$$\tau(M, \varphi, E^{n+k}) = \frac{1}{C_{n+k-1}} \int\limits_B |\nu^* d\sigma|,$$

где C_{n+k-1} — объем единичной сферы S^{n+k-1}, $d\sigma$ — элемент объема S^{n+k-1}. Подынтегральное выражение справа может быть записано с помощью липшиц—киллинговой кривизны, определенной для каждого нормального поля векторов. Погружение φ называется минимальным или тугим (tight), если для него $\tau(M, \varphi, E^{n+k})$ принимает наименьшее значение при изменении φ и k. Не каждое компактное дифференцируемое многообразие M можно погрузить минимально в евклидово пространство. Абсолютная полная кривизна может также определяться с помощью функции высоты $h_a(x)$, т. е. расстояния от точки $\varphi(x)$ до плоскости, проходящей через начало координат O, ортогональной вектору a. Для почти всех a эта функция имеет только навырожденные критические точки. Пусть $\beta(M, f)$ — число критических точек дифференцируемой функции f. Тогда

$$\tau(M, \varphi, E^{n+k}) = \int\limits_{a \in S^{n+k-1}} \beta(M, h_a)\, d\sigma.$$

С. Черн и Лашоф показали, что если полная абсолютная кривизна равна 2, то φ есть вложение M в виде выпуклой гиперповерхности в E^{n+1}, а Кейпер показал, что

$$\inf_{\varphi, k} \tau(M, \varphi, E^{n+k}) = \inf_f \beta(M, f).$$

Поэтому тугое погружение определяется так же, как погружение, для которого почти все линейные функции высоты имеют наименьшее допустимое число критических точек.

Кейпер указал, что экзотическая сфера не может быть минимально вложена в евклидово пространство, а Ферус [97] доказал, что каждая вложенная экзотическая n-сфера, $n \geqslant 5$, в E^{n+2} имеет полную кривизну $\geqslant 4$.

Аналогично вводится понятие натянутого (taut) погружения как такого погружения, для которого для почти всех точек $p \in E^m$ функции расстояния от этих точек имеют наименьшее допустимое число критических точек. Если $\varphi(M)$ не содержится ни в одной гиперплоскости E^{n+k}, то погружение φ называется субстанциональным или собственным. Банхофф доказал, что натянутая (taut) компактная поверхность в E^3 должна быть сферой или циклидой Дюпена.

Трудной проблемой является вопрос о том, какие многообразия могут быть погружены минимально.

Кёйпер доказал, что каждая ориентируемая замкнутая поверхность и каждая неориентируемая замкнутая поверхность с эйлеровой характеристикой $\leqslant -2$ могут быть вложены минимально в E^3 и что действительная проективная плоскость и бутылка Клейна не могут быть минимально вложены в E^3. Проективная плоскость погружается субстанциально и минимально в E^5 в виде поверхности Веронезе. Кёйнер показал, что если погружение $\varphi: M \to E^{n+k}$ минимально и субстанционально, то $k \leqslant \leqslant n(n+1)/2$. Он же дал примеры минимальных и субстанциальных вложений с коразмерностями k от 1 до $n(n+1)/2$.

Кобаяси [127] доказывает, что каждое компактное однородное келерово многообразие может быть минимально вложено в евклидово пространство. Приводится погружение Мэннури $P^m(C)$ в $E^{(m+1)^2-1}$. Им же в [128] единым образом строятся изометрические погружения компактных симметрических пространств в евклидовы пространства, являющиеся минимальными и субстанциальными. В работе Тэйя [181] такие погружения строятся для действительных и кватернионных проективных пространств и проективной плоскости Кэли. Опишем вложения $P^n(F)$, где F — поле действительных, комплексных или кватернионных чисел. Пусть F^{n+1} — векторное пространство над этим полем, имеющее действительную размерность $(n+1)d$, где $d=1$ для R, $d=2$ для C, $d=4$ для Q. Для каждого элемента $x \in F$ определен сопряженный элемент. Для матрицы A оператора на F^{n+1} определена транспонированная матрица ${}^tA$ и сопряженная матрица $\bar{A}$, а также $A^*={}^t\bar{A}$. Обозначим через $H(n+1, F)$ пространство всех $(n+1)$-мерных квадратных матриц над полем F, таких что $A^*=A$ (эрмитовы матрицы над F). Пусть $P^n(F)$ — проективное пространство над полем F.

Для элемента $x \in P^n(F)$ можно использовать однородные координаты

$$x=\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^{n+1} \quad \text{при условии } x^*x=1.$$

Определяется отображение $\varphi: P^n(F) \to H(n+1, F)$ следующим образом

$$\varphi(x)=xx^*=\begin{pmatrix} |x_0|^2, & x_0\bar{x}_1, & \dots, & x_0\bar{x}_n \\ x_1\bar{x}_0, & |x_1|^2, & \dots, & x_1\bar{x}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n\bar{x}_0, & \dots & & , |x_n|^2 \end{pmatrix}.$$

Образ этого отображения лежит в некотором $\left(\binom{n+1}{2}d+n\right)$-мерном евклидовом пространстве. Для двух элементов x и y из F^{n+1} определено скалярное произведение $(xy)=\mathrm{Re}(x^*y)$. Для двух матриц A и $B \in H(n+1, F)$ скалярное произведение имеет вид $(AB)=\mathrm{Tr}(AB)$. Оказывается, что отображение φ является изометрическим относительно так введенных метрик, минимальным и субстанциальным.

В [197] Вилсон доказывает, что вложение ортогональной группы $SO(n)$ в E^{n^2}, полученное рассмотрением всех элементов матрицы из $SO(n)$, как координат в E^{n^2}, минимально. Показано также, что грассмановы координаты грассманова многообразия $G_{2,n}$ ориентированных 2-плоскостей в n-мерном пространстве дают минимальное вложение. Даются также минимальные вложения $U(n)$ и $Sp(n)$.

Полная абсолютная кривизна для погружений M^n в риманово пространство определяется как нормированный интеграл от абсолютного значения липшиц—килинговой кривизны, взятой по многообразию всех единичных нормальных векторов. При этом липшиц-киллингова кривизна определяется как детерминант второй фундаментальной формы для каждого нормального поля векторов.

Банхофф определил в [69] центральную кривизну кривых, которая является обобщением полной абсолютной кривизны. В плоском случае это понятие определяется следующим образом. Пусть $f: S^1 \to E^2$ — непрерывное отображение единичного круга S^1 в плоскость. Опорная прямая к f в точке x есть прямая, содержащая x и опорная к некоторой окрестности точки x в S^1. Пусть $\tau_p(f)$ — число опорных прямых, проходящих через точку $p \in E^2$. Центральная кривизна $\tau_C(f)$ кривой по отношению к окружности C есть среднее начение $\tau_p(f)$ для точек $p \in C$, т. е.

$$\tau_c(f) = \frac{1}{l(C)} \int\limits_{p \in C} \tau_p(f)\, ds_c,$$

где $l(C)$ — длина окружности C. Доказывается, что если кривая $f(S^1)$ содержится в C, то $\tau_C(f)$ не зависит от положения C. Классическая полная абсолютная кривизна $\tau(f)$ может рассматриваться как $\tau_C(f)$ по отношению к бесконечно большой окружности. Для пространственных кривых полная центральная кривизна $\tau_S(f)$ по отношению к сфере определяется с помощью стереографических проекций на плоскости, проходящие через центр S.

Банхофф ввел понятие два-кусочного свойства (two piece property — TPP) для топологического отображения f многообразия M в евклидово пространство E^N [70]. Отображение f обладает свойством TPP, если для любой гиперплоскости $H \subset E$ прообраз $f^{-1}[f(M) \setminus H]$ имеет не более двух связных компонент. Он показал, что для компактных замкнутых многообразий размерности $\leqslant 2$ тугость эквивалента этому свойству. Кейпер и Поль [129] рассмотрели топологические субстанциальные вложения действительной проективной плоскости в E^N при $n \geqslant 5$, обладающие TPP, и показали, что $N=5$ и образ вложения есть либо поверхность Веронезе, либо кусочно-линейное вложение Ванхоффа с 6-ю вершинами. Для регулярного отображения единственным решением будет поверхность Веронезе.

Новое определение полной абсолютной кривизны для подмногообразий, погруженных в евклидовы сферы, дал Вайнер [192]. Выбрав точку p на сфере S^{n+k} такую, что $-p$ не лежит на подмногообразии M^n, он параллельно переносит в касательное пространство к сфере в точке p любой нормальный вектор к M^n, взятый в точке $q \in M^n$ вдоль любой геодезической, соединяющей p и q. Полученное таким образом отображение нормального пучка $\nu(M)$ в единичную сферу S_pS^{n+k} в касательном пространстве к сфере S^{n+k} в точке p обозначим через e_p. Доказывается, что аналог полной кривизны — интеграл от якобиана отображения e_p, взятый по $\nu(M)$, равен χ-характеристике Эйлера—Пуанкаре, если $-p \notin M$, и равен χ минус удвоенное число проходов M через $-p$, если $-p \in M$. Полная абсолютная кривизна $\tau_p(M)$ по отношению к p определяется как интеграл от

$|e_p^*|$ по нормальному пучку $\nu(M)$. Для компактного ориентируемого подмногообразия $M^n \subset S^{n+k}$ при условии $-p \notin M^n$ доказывается: 1) $\tau_p(M) \geqslant$ суммы чисел Бетти M, 2) если $\tau_p(M) < 3$, то M гомеоморфно сфере, 3) если $\tau_p(M) = 2$, то M — гиперповерхность малой $(n+1)$-мерной сферы, проходящей через $-p$.

Сесил и Руан обобщили понятие тугости и натянутости на погружения в гиперболическое пространство H^m [82], рассматривая функции расстояния от вполне геодезической плоскости и от точки. Доказано, что погружение $f: M \to H^m$ является тугим тогда и только тогда, когда композиция f со стереографической проекцией P пространства H^m в E^m дает тугое погружение M в E^m в евклидовом смысле при любом выборе P. Доказывается, что между тугими погружениями в H^m и в E^m имеется различие. Именно, если $f: M \to H^m$ — тугое погружение и $i: H^m \to H^{m+k}$ — вполне геодезическое вложение, то композиция $if: M \to H^{m+k}$ не обязательно является тугим погружением, в противоположность евклидову случаю. В работе С. Чена [83] доказывается, что субстанциальное тугое вложение $f: S^m \times S^n$ в E^{m+n+2} (где $m/n \neq 2$ или $1/2$) с образом, лежащим на овалоиде, проективно эквивалентно (в смысле Кейпера) произведению двух овалоидов размерности m и n, соответственно. Эта теорема обобщает теорему С. Черна и Лашофа.

В работе Санди [178] рассматриваются заузленные вложения $x(S^n)$ n-мерной сферы S^n в E^{n+2}. Если g — минимальное число генераторов фундаментальной группы $E^{n+2} \setminus S^n$, то для полной абсолютной интегральной кривизны K^* доказано неравенство

$$K^* \geqslant 2g(x)\, C_{n+1}.$$

Отсюда следует, что если $K^* < 4C_{n+1}$, то фундаментальная группа $E^{n+2} \setminus S^n$ есть Z. В работе Винтгена [199] дается оценка для полной интегральной кривизны n-мерного замкнутого многообразия $M \subset E^{n+2}: K^* \geqslant [\mu(M) + 4(g-1)]\, C_{n+1}$, где $\mu(M)$ — число Морса многообразия M. Указывается метод получения нижней оценки полной абсолютной кривизны в данном изотопическом классе узлов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.*, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М. Л., ОГИЗ, 1948
2. *Аминов Ю. А.*, О погружении областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство. Докл. АН СССР, 1977, *236*, № 3, 521—524 (РЖМат, 1978, 2А681)
3. —, Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство. Мат. сб., 1980, *111*, № 3, 402—433 (РЖМат, 1980, 7А689)
4. —, Внешний диаметр погруженного риманова многообразия. Мат. сб., 1973, *92*, № 3, 456—460 (РЖМат, 1974, 3А554)

5. —, О внешнем диаметре поверхности отрицательной кривизны. Укр. геометр. сб., 1973, *13*, 3—9 (РЖМат, 1973, 8А581)
6. —, Об оценках диаметра и объема подмногообразия евклидова пространства. Укр. геометр. сб., 1975, вып. 18, 3—15 (РЖМат, 1976, 4А774)
7. —, Метрика приближенно-минимальных поверхностей. Сиб. мат. ж., 1967, *7*, № 3, 483—493 (РЖМат, 1968, 1А770)
8. —, Свойства в целом кривых в трехмерном евклидовом пространстве, связанные с кручением. Укр. геометр. сб., 1973, вып. 14, 3—10 (РЖМат, 1974, 1А740)
9. —, Преобразование Бианки для области многомерного пространства Лобачевского. Укр. геометр. сб., 1978, вып. 21, 3—5 (РЖМат, 1978, 10А541)
10. *Борисенко А. А.*, О компактных поверхностях отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве. Укр. геометр. сб., 1976, вып. 19, 9—11, (РЖМат, 1977, 2А746)
11. —, Об изометрическом погружении псевдоримановых пространств постоянной кривизны. Укр. геометр. сб., 1976, вып. *19*, 11—18 (РЖМат, 1977, 2А743)
12. —, Полные k-мерные поверхности неположительной внешней кривизны в римановом пространстве. Мат. сб., 1977, *104*, № 4, 559—576 (РЖМат, 1978, 8А735)
13. —, О характеристических классах Понтрягина компактной поверхности в сферическом пространстве. Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, 24—30
14. *Борисов Ю. Ф.*, $C^{l,\alpha}$-изометрические погружения римановых пространств. Докл. АН СССР, 1965, *163*, № 1, 11—13 (РЖМат, 1966, 1А754)
15. *Боровский Ю. Е.*, *Шефель С. З.*, Об одной теореме Черна — Кейпера. Сиб. мат. ж., 1978, *19*, № 6, 1386—1387 (РЖМат, 1979, 3А588)
16. *Бураго Ю. Д.*, *Залгаллер В. А.*, Геометрические неравенства. Ленинград, Наука, 1980, 288 стр.
17. *Виро О. Я.*, Локальное заузливание подмногообразий. Мат. сб., 1973, *90*, № 2, 173—183 (РЖМат, 1973, 7А547)
18. *Воробьева Л. И.*, Невозможность C^2 изометрического погружения в E^3 полуплоскости Лобачевского. Вест. Моск. ун-та. Сер. мат. и мех., 1976, *5*, 42—46 (РЖМат, 1976, 4А773)
19. —, Оценка верхней грани гауссовой кривизны для некоторых поверхностей с краем. Мат. заметки., 1976, *20*, № 1, 113—120 (РЖМат, 1976, 11А830)
20. *Глазырин В. В.*, Риманова кривизна многомерных седловых поверхностей. Сиб. мат. ж., 1977, *18*, № 3, 541—548 (РЖМат, 1978, 1А616)
21. —, Топологические и метрические свойства k-седловых поверхностей. Докл. АН СССР, 1977, *233*, № 6, 1028—1031 (РЖМат, 1977, 9А861)
22. —, Топологическое и метрическое строение k-седловых поверхностей. Сиб. мат. ж., 1978, *19*, № 3, 555—565 (РЖМат, 1978, 11А767)
23. *Дымов А. З.*, Вложение открытых многообразий в компактные. Сиб. мат. ж., 1978, *19*, № 2, 280—302 (РЖМат, 1978, 8А582)
24. *Ефимов Н. В.*, Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны. Мат. сб., 1964, *64*, № 2, 286—320 (РЖМат, 1966, 5А478)
25. —, Непогружаемость полуплоскости Лобачевского. Вест. Моск. ун-та. Сер. мат. и мех., 1975, № 2, 83—86 (РЖМат, 1975, 9А545)
26. —, Поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной. Успехи мат. наук, 1966, *21*, № 5, 3—58 (РЖМат, 1967, 6А400)
27. *Кадомцев С. Б.*, Невозможность некоторых специальных изометрических погружений пространств Лобачевского. Мат. сб., 1978, *107*, 2, 175—198 (РЖМат, 1979, 4А792)
28. *Кулик И. О.*, *Янсон И. К.*, Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М., Наука, 1970. 272 с.
29. *Лумисте Ю. Г.*, Дифференциальная геометрия подмногообразий. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 13 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 273—340 (РЖМат, 1976, 6А623)

30. *Малый Б. Д.*, Классы Эйлера стабильно эквивалентных векторных расслоений. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, *38*, №№ 1, 107—126 (РЖМат, 1974, 4А414)
31. *Милка А. Д.*, Кратчайшие линии на выпуклых поверхностях. Докл. АН СССР, 1979, *248*, № 1, 34—36 (РЖМат, 1979, 12А757)
32. *Милнор Дж., Сташеф Дж.*, Характеристические классы. М. Мир., 1979, 371 с. (РЖМат, 1980, 4А623)
33. *Новиков С. П.*, О вложении односвязных многообразий в евклидово пространство. Докл. АН СССР, 1961, *138*, № 4, 775—778 (РЖМат, 1961, 11А299)
34. *Погорелов А. В.*, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., Наука, 1969, 759 с. (РЖМат, 1969, 9А495)
35. —, Регулярность выпуклых гиперповерхностей с регулярной метрикой. Докл. АН СССР, 1975, *224*, № 1, 39—42 (РЖМат, 1976, 1А869)
36. *Позняк Э. Г.*, О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны. Укр. геометр. сб., 1966, *3*, 78—92 (РЖМат, 1967, 12А628)
37. —, Геометрическая интерпретация регулярных решений уравнения $z_{xy}=\sin z$. Дифференц. уравнения, 1979, *15*, № 3, 1332—1336
38. Некоторые новые результаты об изометрических погружениях частей плоскости Лобачевского в E^3. Всес. научн. конф. по неевкл. геометрии «150 лет геометрии Лобачевского», Казань, 1976. М., 1977, 73—78 (РЖМат, 1978, 7А934)
39. —, Геометрические исследования, связанные с уравнением $z_{xy}=\sin z$. В сб. «Проблемы геометрии». Т. 8 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, 225—241 (РЖМат, 1978, 1А660)
40. —, Изометричное погружение в E^3 некоторых некомпактных областей плоскости Лобачевского. Мат. сб., 1977, *102*, № 1, 3—12 (РЖМат, 1977, 6А576)
41. —, *Шикин Е. В.*, Поверхности отрицательной кривизны. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 12 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1974, 171—207 (РЖМат, 1975, 6А861)
42. —, *Соколов Д. Д.*, Изометрические погружения римановых пространств в евклидовы. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 15 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, 173—211 (РЖМат, 1978, 2А668)
43. *Розендорн Э. Р.*, К вопросу о погружении двумерных римановых метрик в четырехмерное евклидово пространство. Вест. Моск. ун-та. Сер. мат. и мех., 1979, № 2, 47—50 (РЖМат, 1979, 7А760)
44. —, Построение ограниченной полной поверхности неположительной кривизны. Успехи мат. наук, 1961, *16*, № 2, 149—156 (РЖМат, 1963, 1А408)
45. *Рохлин В. А.*, Вложение неориентируемых трехмерных многообразий в пятимерное евклидово пространство. Докл. АН СССР, 1965, *160*, № 3, 549—551 (РЖМат, 1965, 6А287)
46. —, Двумерные подмногообразия четырехмерного многообразия. Функц. анализ и его прилож., 1971, *5*, № 1, 48—60 (РЖМат, 1971, 6А573)
47. *Сабитов И. Х.*, Об одной схеме последовательных приближений двумерных метрик в E^3. Сиб. мат. ж., 1978, *19*, № 6, 1358—1380 (РЖМат, 1979, 3А600)
48. —, К вопросу о погружении двумерных метрик в E^4. Мат. заметки, 1977, *21*, № 2, 137—140 (РЖМат, 1977, 7А670)
49. —, *Шефель С. З.*, О связи между порядками гладкости поверхности и ее метрики. Сиб. мат. ж., 1976, *17*, № 4, 916—925 (РЖМат, 1977, 2А742)
50. *Смирнов С. Г.*, Погружения и вложения гладких многообразий. Успехи мат. наук, 1979, *34*, № 6, 191—194 (РЖМат, 1980, 5А567)
52. —, Гладкие узлы в многообразии гомотопического типа $K(\pi,1)$. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, *39*, 3, 610—634
52. *Сосинский А. Б.*, Многомерные узлы. Докл. АН СССР, 1965, *163*, № 4, 1326—1329 (РЖМат, 1966, 1А550)
53. —, Разложение узлов. Мат. сб., 1970, *81*, № 1, 145—158 (РЖМат, 1970, 7А428)

54. *Фарбер М. Ш.*, Классификация некоторых узлов коразмерности два. Докл. АН СССР, 1978, *240*, № 1, 32—35 (РЖМат, 1979, 2А429)
55. —, Классификация многомерных узлов коразмерности два. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 3, 105—111
56. *Шефель С. З.*, Конформное соответствие метрик и гладкость изометрических погружений. Сиб. мат. ж., 1979, *20*, № 2, 397—401 (РЖМат, 1979, 8А727)
57. —, О двух классах k-мерных поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве. Сиб. мат. ж., 1969, *10*, № 2, 459—466 (РЖМат, 1970, 8А573)
58. —, Поверхности в евклидовом пространстве. Мат. анализ и смеж. вопросы математики. Новосибирск, 1978, 297—318 (РЖМат, 1979, 3А599)
59. *Шикин Е. В.*, Об изометрическом погружении двумерных многообразий отрицательной кривизны методом Дарбу. Мат. заметки, 1980, *27*, № 5, (РЖМат, 1980, 9А676)
60. —, Изометрические погружения в E^3 некомпактных областей неположительной кривизны. В сб. «Пробл. геометрии». Т. 7 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 249—266 (РЖМат, 1976, 9А665)
61. —, О регулярном погружении в целом в E^3 метрик класса E^4 отрицательной кривизны. Мат. заметки, 1973, *14*, № 2, 261—266 (РЖМат, 1974, 1А741)
62. *Albert C.*, Classes characteristiques des immersions sans torsion. C. r. Acad. sci., 1978, *AB286*, 19, A831—A834 (РЖМат, 1978, 11А606)
63. *Alexander S., Maltz R.*, Isometric immersions of Riemannian products in Euclidean space. J. Different. Geom., 1976, *11*, № 1, 47—57 (РЖМат, 1977, 3А675)
64. —, *Portnoy E.*, Cylindricity of isometric immersions between hyperbolic spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *237*, 311—329 (РЖМат, 1979, 2А616)
65. *Almgren F. J. Jr., Thurston W. P.*, Examplex of unknotted curves which bound only surfaces of high genus within their convex hulls. Ann. Math., 1977, *105*, № 3, 527—538 (РЖМат, 1978, 1А534)
66. *Baikousis C., Koufogiorgos T.*, Isometric immersions of complete Riemannian manifolds into Euclidean space. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, *79*, № 1, 87—88 (РЖМат, 1980, 12751)
67. *Banchoff T.*, Stiefel-Whitney homology classes and singularities of projections for polyhedral manifolds. Proc. symp. Pure Math. Stanford Calif., 1973, *27*, part 1, Providence, 1975, 333—347 (РЖМат, 1976, 7А748)
68. —, The spherical two-piece property and tight surfaces in spheres. J. Dif. Geom., 1970, *4*, 193—205 (РЖМат, 1971, 3А604)
69. —, Total central curvature of curves. Duke Math. J., 1970, *37*, № 2, 281—289 (РЖМат, 1971, 2А651)
70. —, Tight polyhedral klein bottles projective planes and Moebius bands. Math. Ann., 1974, *207*, 233—243 (РЖМат, 1974, 8А455)
71. —, *McCrory C.*, Whitney duality and singularities of projections. Lect. Notes Math., 1977, *597*, 608—681 (РЖМат, 1978, 3А410)
72. —, *Takens F.*, Height functions on surfaces with three critical points. Ill. J. Math., 1975, *19*, № 3, 325—335 (РЖМат, 1976, 6А558)
73. *Bausum D. R.*, Embedding and immersion of manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *213*, 263—303 (РЖМат, 1976, 7А759)
74. *Bendersky M.*, Characteristic classes of n-manifolds immersing in R. Math. Scand., 1973, *31*, № 2, 293—300 (РЖМат, 1974, 1А559)
75. *Bennequin D.*, Sur les representants lisses de classes d'homologie entiere de codimension 1 des varietes. C. r. Acad. sci., 1977, *A285*, n-, *B285*, № 4, 4207—4210 (РЖМат, 1978, 3А410)
76. *Berrick A. J.*, The Smale invariants of an immersed projective space. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1979, *86*, № 3, 401—411 (РЖМат, 1980, 7А545)
77. —, Nonimmersion of lens space with 2-torsions. Trans. Amer. Math. Soc., 1976, *224*, № 2, 399—405 (РЖМат, 1977, 1А524)
78. *Blecker D. D.*, Immersed surfaces with constant curvature near infinity. Compos. Math., 1978, *36*, № 2, 131—143 (РЖМат, 1978, 10А606)

79. *Bourgeois G., Spring D.,* Groupes d'homotopie de l'espace des plongements propres d'une m variete ouverte dans une m variete ouverte. C. r. Acad. Sci., 1978, *AB286*, A771—A773 (РЖМат, 1978, 11А608)
80. *Burgess C. E.,* Embeddings of surfaces in Euclidean three space. Bull. Amer. Math. Soc., 1975, *81*, № 5, 795—818 (РЖМат, 1976, 8А721)
81. *Cecil T. E.,* Taut immersions of noncompact surfaces into a Euclidean 3-spaces. J. Different Geom., 1976, *11*, № 3, 451—459 (РЖМат, 1977, 9А671)
82. —, *Ryan P. J.,* Tight and taut immersions into hyperbolic space. J. London Math. Soc., 1979, *19*, № 2, 561—572 (РЖМат, 1980, 3А552)
83. *Chen C.-S.,* Tight embedding and projective transformation. Amer. J. Math., 1979, *101*, № 5, 1083—1102 (РЖМат, 1980, 5А563)
84. *Daverman R. J.,* Embeddings of $(n—1)$-spheres in Euclidean n-space. Bull. Amer. Math. Soc., 1978, *84*, № 3, 377—405 (РЖМат, 1979, 2А409)
85. *Davis D. M., Mahowald M.,* The immersion conjecture for RJ^{81+7} is false. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *236*, 361—383 (РЖМат, 1978, 10А447)
86. —, —, Immersions of complex projective spaces and generalized vector field problem. Proc. London Math. Soc., 1977, *35*, № 2, 333—344 (РЖМат, 1978, 2А558)
87. *Dediu M.,* Campi di vettori tangent nello spazio lenticolare *U* (3). Atti Acad. anz. Lencei Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur, 1975, *58*, 14—17
88. —, Sur quelques proprietes des espaces lenticulaires. Rev. roum. math. pures et appl., 1972, *17*, № 6, 871—874 (РЖМат, 1973, 3А367)
89. *Derdzinski A.,* Results after 1968 concerning immersions of compact manifolds in Riemannian manifolds especially in Euclidean spaces. Zesz. nauk AGH, 1978, *596*, 85—91 (РЖМат, 1979, 4А775)
90. *Donnelly H.,* Chern-Simons invariants of reductive homogeneous spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *227*, 141—164 (РЖМат, 1978, 2А575)
91. *Dyer E., Vasquez A. T.,* The sphericity of higher dimensional knots. Can. J. Math., 1973, *25*, № 6, 1132—1136 (РЖМат, 1974, 6А696)
92. *Eceles P. J.,* Multiple points of codimensions one immersions of oriented manifolds. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1980, *87*, № 2, 213—220 (РЖМат, 1980, 9А537)
93. *Erbacher J.,* Isometric immersions of constant mean curvature and triviality of the normal connections. Nagoya Math. J., 1972, *45*, 139—165 (РЖМат, 1972, 9А558)
94. *Fary J.,* Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant an noeud. Bull. Soc. Math. France, 1949, *77*, 128—138
95. *Feder S., Segal D. M.,* Immersions and embeddings of projective spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, *35*, № 2, 590—592 (РЖМат, 1973, 7А570)
96. *Ferland K. E.,* Embeddings of k-orientable manifolds. Mich. Math. J., 1975, *21*, № 3, 253—256 (РЖМат, 1975, 11А605)
97. *Ferus D.,* Symmetric submanifolds of Euclidean space. Math. Ann., 1980, *247*, № 1, 81—93 (РЖМат, 1980, 8А633)
98. —, Total Absolut Krubbung in Differentialgeometrie und Topologie. Lect. Notes. Math., 1968, *66* (РЖМат, 1969, 6А424К)
99. *Friedrich Th.,* m-Funktionen und ihre Anwendung auf die totale Absolutkrumung. Math. Nachr., 1975, *67*, 281—301 (РЖМат, 1976, 5А581)
100. *Goenner H. F.,* On the interdependency of the Gauss-Codazzi-Ricci equations of local isometrie embedding. Gen. Relat. and Gravit., 1977, *8*, № 2, 139—145 (РЖМат, 1978, 1А655)
101. *Lolbus B. F.,* Singularity obstructions to immersions. Mich. Math. J., 1978, *25*, № 1, 9—17 (РЖМат, 1979, 4А642)
102. *Graves L. K.,* Codimension one isometric immersions between Lorenz spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1979, *252*, 367—392 (РЖМат, 1980, 3А540)
103. —, *Nomizu K.,* Isometric immersions Lorentzian space forms. Math. Ann., 1978, *233*, № 2, 125—136 (РЖМат, 1978, 12А2085)
104. On codimension one isometric immersions between idenfinite space forms. Tsukuba J. Math., 1979, *3*, № 2, 17—29 (РЖМат, 1980, 8А635)

105. *Haefliger A.*, Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} for $q>2$. Ann. Math., 1966, *83*, № 3, 402—436
106. —, Plongements differentiables des varietes dans varietes. Comm. Math. Helv., 1961, *36*, 47—82
107. —, Knotted (4*k*-1)-spheres in 6*k*-space. Ann. Math., 1962, *75*, 452—466 (РЖМат, 1963, 5А382)
108. —, *Hirsh M. W.*, On the existence and classification of differentiable embeddings. Topology, 1963, *2*, № 2, 129—135 (РЖМат, 1964, 11А275)
109. *Halpern B.*, *Weaver C.*, Inverting a cylinder through isometric immersions and isometric imbeddings. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *230*, 41—70 (РЖМат, 1978, 4А467)
110. *Handel D.*, An embedding theorem for real projective spaces. Topology, 1968, *7*, 125—130
111. *Hasanis Th.*, On complete minimal submanifolds in R^n. Rev. roum. math. pures et appl., 1979, *24*, № 2, 241—242 (РЖМат, 1980, 1А861)
112. —, *Koutroufiotis D.*, Immersions of bounded mean curvature. Arch. Math., 1979, *33*, № 2, 170—171 (РЖМат, 1980, 6А754)
113. *Henke W.*, Isometric immersions der kodimension 2 von Raumformen. Manuscr. math., 1976, *19*, № 2, 165—188 (РЖМат, 1977, 4А758)
114. —, Uber die Existenz isometrischer Immersionen der kodimension 2 von sphärischen Raumformen in Standard-Räume. Math. Ann., 1976, *222*, № 1, 89—95 (РЖМат, 1976, 12А818)
115. —, Riemannsche Mannifaltigkeiten Konstanter positive Krummung in euklidischen Räumen der kodimension 2. Math. Ann., 1971, *193*, № 4, 265—278 (РЖМат, 1972, 5А667)
116. *Hirsch M.*, The imbedding of bounding manifolds in Euclidean space. Ann. Math., 1961, *74*, 494—497
117. —, The imbedding differentiable manifolds in Euclidean space. Ann. Math., 1961, *73*, 566—571
118. —, Immersions of manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, *93*, № 2, 242—276 (РЖМат, 1960, 8755)
119. *Itoh T.*, *Ogiue K.*, Isotropic immersions. J. Dif. Geom., 1973, *8*, 305—316
120. —, —, Isotropic immersions and Veronese manifolds.
121. *Jacobowitz H.*, Implicit function theorem and isometric embeddings. Ann. Math., 1972, *95*, 191—225
122. *James J. M.*, Some embeddings of projective spaces. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1959, *55*, 294—298
123. —, Euclidean models of projective spaces. Bull. London. Math. Soc., 1971, № 9, 257—276 (РЖМат, 1972, 6А553)
124. —, Two problems studies *by* Heinz Hopf. Lect. Notes Math., 1972, *279*, 134—174 (РЖМат, 1973, 2А485) Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *209*, 109—117
125. *Källen A.*, Isometric embeddings of a smooth compact manifold with a metric of low regularity. Ark. math., 1978, *16*, № 1, 29—50 (РЖМат, 1978, 12А1095)
126. *Kobayashi T.*, Non immersion theorems for lens spaces. J. Math. Kyoto Univ., 1966, *6*, № 1, 91—108 (РЖМат, 1968, 2А491)
127. *Kobayashi S.*, Imbeddings of homogeneous spaces with minimum total curvature. Tohoku Math. J., 1967, *19*, № 1, 63—70 (РЖМат, 1968, 5А634)
128. —, Isometric imbeddings of compact symmetric spaces. Tohoku Math. J., 1968, *20*, 21—25 (РЖМат, 1969, 2А707)
129. *Kuiper N.*, *Pohl W.*, Tight topological embeddings of the real projective plane in E^5. Invent. math., 1977, *42*, 177—199 (РЖМат, 1978, 5А505)
130. —, Minimal total absolute curvature for immersions. Invent. math., 1970, *10*, № 3, 201—238 (РЖМат, 1971, 3А452)
131. *Lai H.-F.*, Characteristic classes of real manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 1972, *172*, 1—33 (РЖМат, 1973, 8А456)
132. *Langevin R.*, *Rosenberg H.*, On curvature integrals and knots. Topology, 1976, *15*, № 4, 405—416 (РЖМат, 1977, 7А567)
133. *Larmore L. L.*, *Rigdon R. D.*, Enumerating immersions and embeddings

of projective spaces. Pacific. J. Math., 1976, *64*, № 2, 471—492 (РЖМат, 1977, 6А432)
134. *Lashof R.*, Embedding spaces. Ill. J. Math., 1976, *20*, № 1, 144—154 (РЖМат, 1977, 3А531)
135. —, *Shaneson J.*, Classification of knots of codimension two. Bull. Amer. Math. Soc., 1969, *75*, 171—175
136. *Levine J.*, Imbedding and immersion of real projective spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, *14*, № 5, 801—803 (РЖМат, 1964, 12А312)
137. —, Inknotting spheres in codimension two, Topology, 1965, *4*, № 1, 9—16 (РЖМат, 1966, 7А409)
138. —, A classification of differentiable knots. Ann. Math., 1965, *82*, 15—50 (РЖМат, 1966, 1А578)
139. *Little R. D.*, Minimal immersions of low dimensional manifolds. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *66*, № 2, 347—350 (РЖМат, 1978, 7А738)
140. *Machowald M.*, Ring spectra which are Thom complex. Duke math. J., 1979, *46*, № 3, 549—559 (РЖМат, 1980, 5А568)
141. —, On the embeddability of the real projective spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, *13*, № 5, 763—765 (РЖМат, 1963, 12А359)
142. —, On obstruction theory in orientable fiber bundles. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, *110*, 315—349 (РЖМат, 1964, 12А294)
143. *Massey W. S.*, Imbeddings of projective planes and related manifolds in spheres. Indiana Univ. Math. J., 1974, *23*, № 9, 791—812
144. —, Normal vector fields on manifolds. Proc. Amer. Math. Soc., 1961, *12*, 33—40
145. —, On the Stiefel-Whitney classes of a manifolds. Amer. J. Math., 1960, *82*, 92—102
146. *Meeks W. H. III, Patresky J.*, Representing codimension one homology classes by embedded submanifolds. Pacific J. Math., 1977, *68*, № 1, 175—176 (РЖМат, 1977, 2А546)
147. *Milgram R. J.*, On the Haefliger knot groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, *78*, № 5, 861—865
148. *Millson J. J.*, Examples of nonvanishing Chern-Simons invariants. J. Dif. Geom., 1975, *1*, № 4, 589—600 (РЖМат, 1976, 8А765)
149. *Milnor J.*, On total curvatures of closed space curves. Math. Scand., 1953, *1*, № 2, 289—296
150. *Moore J. D.*, Isometric immersions of space forms in space forms. Pacific. J. Math., 1972, *40*, № 1, 157—167 (РЖМат, 1972, 12А537)
151. —, Conformally flat submanifolds of Euclidean space. Math. Ann., 1977, *225*, 89—97
152. —, Submanifolds of constant positive curvature. I. Duke math. J., 1977, *44*, № 2, 449—484 (РЖМат, 1978, 3А428)
153. —, Codimension two submanifolds of positive curvature. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *70*, № 1, 72—74 (РЖМат, 1979, 2А443)
154. —, *Morvan J.-M.*, Saus-varietes conforment plates de codimension quatre. C. r. Acad. sci., 1978, *AB287*, № 8, A655—A657 (РЖМат, 1979, 5А615)
155. —, *White J. H.*, Normal characteristic forms: conformal invariance and duality. Math. Z., 1978, *164*, № 2, 125—141 (РЖМат, 1979, 8А599)
156. *Morin B.*, Equations du retornement de la sphere. C. r. Acad. Sci., 1978, *AB287*, № 13, A879—A882 (РЖМат, 1979, 11А491)
157. —, *Petit J.-P.*, Problematique du retournement de la sphere. C. r. Acad. Sci. 1978, *AB287*, № 10, A767—A770 (РЖМат, 1979, 11А492)
158. —, —, Le retournement de la sphere. C. r. Acad. Sci., 1978, *AB287*, № 11, A791—A794 (РЖМат, 1979, 11А493)
159. *Morvan J.-M.*, Quelques relations entre topologie d'une sous variete et ses courbures externes. C. r. Acad. Sci., 1978, *AB287*, № 1, A — 23 — A25 (РЖМат, 1979, 2А442)
160. *Nomizu K.*, Uniqueness of the normal connections and congruence of isometric immersions. Tohoku Math. J., 1976, *28*, № 1, 613—617 (РЖМат, 1977, 9А846)

161. *Omori H.*, Isometric immersions of Riemannian manifolds. J. Math. Soc. Japan., 1967, *19*, № 22,
162. *O'Neil B.*, Imbilics of constant curvature immerdions. Duke Math. J., 1965, *32*, 149—160
163. —, Isometric immersions which preserve curvature operators. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, *13*, № 5, 759—763 (РЖМат, 1964, 5А432)
164. —, Isotropic and Kähler immersions. Canad. J. Math., 1965, *17*, 907—195
165. *Oproiu V.*, Some non-embedding theorems for Grassman manifolds $G_{2,n}$ and $G_{3,n}$. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1977, *20*, № 3, 177—185 (РЖМат, 1978, 1А545)
166. *Papastavridis S.*, Imbedding, immersions and characteristic classes of differentiable manifolds. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, *69*, № 1, 177—180 (РЖМат, 1979, 1А674)
167. —, Imbeddings, immersions and integrability of characteristic classes. Math. scand., 1978, *43*, № 2, 177—184 (РЖМат, 1980, 5А566)
168. —, On realising mod-2 homology classes of manifolds by submanifolds. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1979, *22*, № 2, 109—111 (РЖМат, 1980, 5А547)
169. *Poenaru V.*, Some invariants of generic immersions and their geometric applications. Bull. Amer. Math. Soc., 1975, *81*, № 6, 1079—1082
170. *Reckziegel H.*, Krämmungsflächen von isometrischen. Immersionen in Räume konstanter Krummung. Math. Ann., 1976, *223*, № 2, 169—181 (РЖМат, 1977, 3А678)
171. —, Completeness of curvature surfaces of an isometric immersion. J. Dif. Geom., 1979, *14*, 7—20
172. *Rodriguez L. L.*, Immersions of non-zero relative mullity in manifolds of constant positive curvature. Arch. Math., 1979, *32*, № 2, 181—184 (РЖМат, 1980, 2А695)
173. *Rushing T. B.*, Topological embeddings, New York, Acad. Press, 1973, xiii, 316, Publishers Weekly, 1973, *203*, № 23, 117 (РЖМат, 1974, 5А583К)
174. *Segre B.*, Sulla torsione integrale delle curve chiuse sghembe. Atti della Academia Nazionale dei Lincei. Rendiconti Classe di Scienze Fisishe., Math. e Natur., 1947, *3*, № 8, 422—426
175. *Sigrist F.*, *Sater U.*, On immersions CP Lect. Not. Math., 1978, *673*, 106—115 (РЖМат, 1979, 5А511)
176. *Smale S.*, The classifications of immersions of spheres in euclidean space. Ann. Math., 1957, *69*, № 3, 327—344
177. *Sugawara T.*, Non-immersion and non-embedding theorems for complex Grassman manifolds. Proc. Japan. Acad., 1979, *A55*, № 2, 59—64 (РЖМат, 1979, 9А566)
178. *Sunday D.*, The total curvature of knotted spheres. Bull. Amer. Math. Soc., 1976, *82*, № 1, 140—142 (РЖМат, 1977, 2А657)
179. *Szenthe J.*, On the Total curvature of closed curves in Riemannian manifolds. Publ. Math. Debrecen., 1968, *15*, 99—105 (РЖМат, 1969, 11А597)
180. *Tachibana S.*, On the isometric deformation vector of the hypersurface in Riemannian manifolds. Natur. Sci. Rept. Ochanoniza Univ., 1976, *27*, № 1, 10—9 (РЖМат, 1977, 1А706)
181. *Tai S. S.*, Minimum imbeddings of compact symmetric spaces of rank one. J. Dif. Geom., 1968, *2*, 55—66 (РЖМат, 1969, 4А476)
182. *Tenenblat K.*, Bäcklund's theorem for *n*-dimensional submanifolds of space forms. An. Acad. brasil. cience, 1979, *51*, № 3, 363—364 (РЖМат, 1980, 8А607)
183. —, On characteristic hypersurfaces submanifolds in euclidean space. Pacific J. Math., 1978, *74*, № 2, 507—517 (РЖМат, 1978, 10А537)
184. —, *Terng C.-L.* A higher dimension generalisation of the sine-Gordon equation and its Bäcklund transformation. Bull (New Series). Amer. Math. Soc., 1979, *1*, № 3, 589—593
185. —, —, Bäcklund's theorem for n-dimensional submanifolds of R. Ann. Math., 1980, *111*, 477—490

186. *Terng C. L.* A higher dimension generalisation of the Sine-Gordon equations and its soliton theory. Ann. Math., 1980, *11*, 491—510
187. *Tristram A. G.,* Some cobordism invariants for links. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1969, *66*, 251—264 (РЖМат, 1970, 7А517)
188. *Tsukamoto Y.,* On the total absolute curvature of closed curves in manifolds of negative curvature. Math. Ann., 1974, *210*, 313—319 (РЖМат, 1975, 4А797)
189. *Vilms J.,* Local isometric imbedding of Riemannian n-manifelds into Euclidean $(n+1)$-space. J. Div. Geom., 1977, *12*, № 2, 197—202 (РЖМат, 1979, 1А475)
190. *Vincensini P.,* Sur le plongement des certaines varietes riemanniennes a deux dimensions dans l espace euclidien a quatre dimensions. Ann. mat. pura et appl., 1979, *121*, 91—107 (РЖМат, 1980, 6А726)
191. *Wallach N., Carmo M.* do, Minimal immersions of spheres into spheres. Ann. Math., 1971, *93*, № 1, 43—62 (РЖМат, 1971, 8А537)
192. *Weiner J. L.,* Total curvature and total absolute curvature of immersed submanifolds of spheres. J. Dif. Geom., 1974, *9*, 391—400 (РЖМат, 1975, 4А800)
193. —, An inequality involving the length curvature and torsions of a curve in euclidean n-space. Pacific J. Math., 1978, *74*, № 2, 531—534 (РЖМат, 1979, 2А603)
194. *White J.,* Minimal total absolute curvature for orientable surfaces with boundary. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, *80*, 361—362 (РЖМат, 1974, 11А755)
195. *Whitney H.,* The singularities of a smooth n-manifolds in $(2n-1)$-space. Ann. Math., 1949, *45*, 247—293
196. —, The self-intersections of a smooth n-manifolds in $2n$-space. Ann. Math., 1949, *45*, 220—246
197. *Wilson J. P.,* Some minimal imbeddings of homogeneous spaces. J. London. Math. Soc., 1969, *1*, № 2, 335—340 (РЖМат, 1972, 1А1119)
198. *Wintgen P.,* Homotopien von Untermannigfaltigkeiten mit nicht ausgearteter zweiter Fundamentalform. Czechosl. Math. J., 1975, *25*, № 3, 424—437 (РЖМат, 1976, 4А617)
199. —, Über von höherer Ordnung reguläre Immersion. Math. Nachr., 1978, *85*, 177—184 (РЖМат, 1979, 8А581)
200. *Wong Y.-C.,* Sectional curvatures of Grassman manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1968, *60*, № 1, 75—79 (РЖМат, 1968, 2А576)
201. *Wu W.,* On the imbedding of orientable manifolds in a Euclidean space. Scientia sinica, 1963, *12*, № 1, 25—33 (РЖМат, 1963, 9А281)
202. *Yasui T.,* Note on the Enumeration Embeddings of Real Projective Spaces. Hiroshima Math. J., 1973, *3*, № 2, 409—418 (РЖМат, 1964, 6А695)
203. —, The enumeration of liftings in fibrations and the embedding problem. Hiroshima Math. J., 1976, *6*, № 3, 465—484 (РЖМат, 1977, 10А417)
204. —, The enumeration of liftings in fibrations and the embedding problem. I. Hiroshima Math. J., 1976, *6*, № 2, 227—255 (РЖМат, 1977, 1А549)