



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Панов, Д. А. Панов, Гомеοидная плотность и теорема Понселе, *Матем. просв.*, 2001, выпуск 5, 145–157

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

17 марта 2025 г., 08:56:07



## Гомеоидная плотность и теорема Понселе

А. А. Панов

Д. А. Панов

Теорема Понселе — одна из самых привлекательных в проективной геометрии. Известно несколько вариантов ее доказательства, но, как сказано в [1] и повторено в [2], «все они достаточно длинные и неочевидны». Возможно, хотя бы одно из предложенных здесь доказательств будет свободно по крайней мере от одного из этих недостатков. Напомним формулировку теоремы Понселе.

**ТЕОРЕМА ПОНСЕЛЕ.** Пусть имеются две коники  $C_0$  и  $C_1$  и пусть  $A_1A_2 \dots \dots A_{n+1}$  — ломаная, вершины которой лежат на  $C_0$ , а ребра касаются  $C_1$ . Тогда, если для некоторой точки  $A_1$  эта  $n$ -звенная ломаная замкнута, то она будет замкнутой и при любом другом выборе точки  $A_1$  на конике  $C_0$ .

Заметим, что конструкция, рассматриваемая в теореме Понселе, имеет естественный характер и возникает в определенных механических и оптических задачах. Например, при движении светового луча в плоском эллиптическом резонаторе прямолинейные отрезки луча имеют огибающую (на оптическом языке — каустику), представляющую собой конику, софокусную с ограничивающим эллипсом [3, 4].

Мы определяем гомеоидную плотность на эллипсе как аффинный образ равномерной плотности на окружности. При этом эллипс наследует многие свойства окружности. Например, эллипс, снабженный гомеоидной плотностью, не притягивает на плоскости и касательные к эллипсу, проведенные из одной точки, становятся (в некотором смысле) равными. Гомеоидная плотность также допускает и естественную физическую интерпретацию. Заряд (здесь имеется в виду «плоский» заряд, для которого кулоновская сила обратно пропорциональна расстоянию), помещенный на проводящий эллипс, распределится на нем с гомеоидной плотностью. Введение такой плотности позволяет работать с парой коник

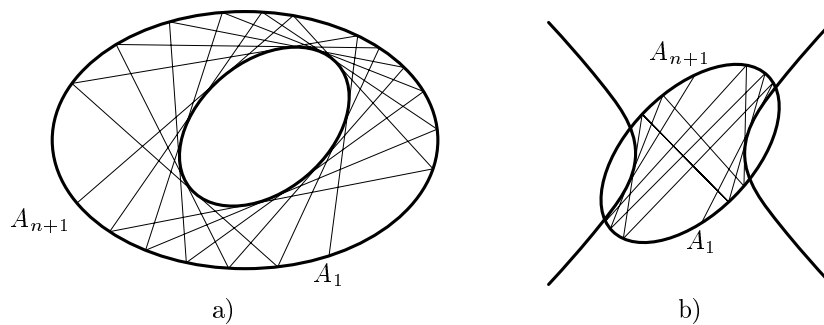


Рис. 1.

$C_0$  и  $C_1$  как с парой окружностей и апеллировать к известному доказательству теоремы Понселе для пары окружностей [2].

Гомеοидную плотность можно ввести и на других кониках. Сначала мы это сделаем для пары прямых, а потом получим известное аналитическое представление плотности [5] и для остальных коник. В [5] дано простое геометрическое определение гомеοидной плотности на кониках. Мы покажем, что гомеοидная плотность на кониках имеет и другое естественное геометрическое представление, а именно, представление двояко-линейчатой поверхностью, которое позволяет сформулировать следующий пространственный вариант теоремы Понселе [6], [7].

**ТЕОРЕМА.** Пусть имеются две квадрики общего положения  $Q_0$  и  $Q_1$  в  $CP^3$ . Через  $L'Q_1$  и  $L''Q_1$  обозначим две системы линейных образующих квадрики  $Q_1$ . Пусть  $V_1V_2 \dots V_{2n+1}$  — ломаная, вершины которой лежат на пересечении  $T = Q_0 \cap Q_1$ , а ребра принадлежат (чередуясь) системам линейных образующих  $L'Q_1$ ,  $L''Q_1$ . Тогда, если для некоторой точки  $V_1$  эта  $2n$ -звенная ломаная замкнута, то она будет замкнутой и при любом другом выборе точки  $V_1$  на  $T$ .

Теорема специально сформулирована таким образом, чтобы непосредственно была видна ее связь с теоремой Понселе. После ее доказательства мы приведем более общий и симметричный вариант для пучка квадрик в  $CP^3$ . В конце сделано несколько добавлений о связи между гомеοидностью и интегрируемостью, о компьютерных экспериментах с эллиптическим бильярдом и о других вопросах.

### ГОМЕОИДНАЯ ПЛОТНОСТЬ — ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ПОНСЕЛЕ

Для доказательства теоремы Понселе нам понадобятся следующие факты:

- ▷ окружность на плоскости не притягивает,
- ▷ эллипс на плоскости не притягивает,
- ▷ касательные к эллипсу, проведенные из одной точки, равны.

Поскольку в традиционном понимании все эти утверждения одинаково неверны, они нуждаются в некоторой интерпретации.

#### *Окружность на плоскости не притягивает*

Этот факт верен по крайней мере наполовину. Известно, что в двумерном мире сила притяжения обратно пропорциональна расстоянию. В этой ситуации масса, равномерно распределенная вдоль окружности, создает внутри нее нулевое поле силы тяжести. Выполняется локальный баланс сил — две противоположные дуги, отсекаемые хордами, проходящими через данную точку, действуют на эту точку в точности с противоположными силами. Это утверждение следует из подобия инфинитезимальных треугольников на рисунке 2, в частности, из соотношения

$$\frac{d\varphi_1}{l_1} = \frac{d\varphi_2}{l_2}. \quad (1)$$

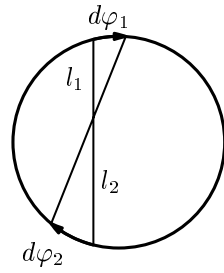


Рис. 2.

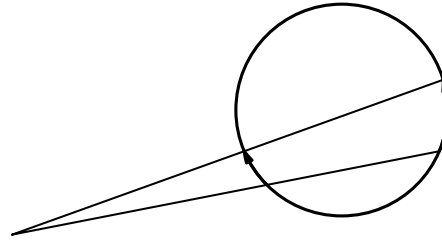


Рис. 3.

Посмотрим, как нужно изменить закон тяготения, чтобы и вне окружности поле было нулевым. Сначала заметим, что инфинитезимальные треугольники на рисунке 3 тоже подобны и для них после введения соответствующих обозначений выполняется то же самое условие (1). Сохраним для сил закон обратной пропорциональности и будем считать, что дуги, расположенные по разные стороны от точки (рис. 2), притягивают ее. Но, если дуги расположены по одну сторону от точки (рис. 3), то считаем, например, что дальняя притягивает, а ближняя отталкивает. Соотношение (1) гарантирует, что при таком понимании окружность на плоскости на самом деле не притягивает.

**ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОРИЕНТАЦИИ.** В дальнейшем нам придется следить за направлением инфинитезимального сдвига  $d\varphi$ . Поэтому вернемся к рисунку 2. Представим, что одна хорда на рисунке получается из другой малым поворотом вокруг их общей точки. Тогда этот поворот индуцирует согласованную ориентацию на дугах  $d\varphi_1$  и  $d\varphi_2$ . Если же, как на рисунке 3, секущая получается малым поворотом из секущей, то ориентация высекаемых ими дуг противоположна.

*Гомеоидная плотность — и эллипс тоже не притягивает*

Эллипс является аффинным образом единичной окружности. При аффинном отображении равномерная плотность на окружности по правилу «масса образа равна массе прообраза» порождает *гомеоидную* плотность на эллипсе [5]. Последнюю тоже будем обозначать  $d\varphi$ . Поскольку при аффинном преобразовании отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, сохраняется, для гомеоидной плотности выполняется то же самое соотношение (1). Отсюда, в частности, следует, что эллипс, снабженный гомеоидной плотностью, на плоскости тоже не притягивает.

*Гомеоидная плотность — и касательные к эллипсу равны*

Обозначим гомеоидную плотность на эллипсе на этот раз  $d\psi$  и запишем ее в виде  $d\psi = k(\psi) ds$ , где  $ds$  длина дуги эллипса. Из определения гомеоидной плотности следует, что величина  $1/k$  — это коэффициент растяжения касательного направления в соответствующей точке окружности при аффинном отображении этой окружности на эллипс. Пусть  $l(\psi_1)$  и  $l(\psi_2)$  длины касательных, проведенных к эллипсу из одной точки. Тогда величины  $l(\psi_1)k(\psi_1)$  и  $l(\psi_2)k(\psi_2)$  равны

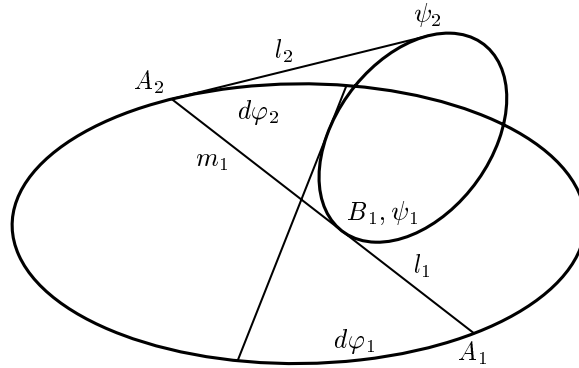


Рис. 4.

между собой, как длины соответствующих касательных к окружности —

$$l(\psi_1)k(\psi_1) = l(\psi_2)k(\psi_2). \quad (2)$$

Если теперь назвать величину  $l(\psi)k(\psi)$  длиной касательной к эллипсу, то, на самом деле, касательные к эллипсу, проведенные из одной точки, будут равны.

Все вспомогательные предложения рассмотрены, можно приступать к доказательству.

#### Доказательство теоремы Понселе

Будем считать, что обе коники являются эллипсами. На конике  $C_0$  введем гомеоидную плотность  $d\varphi$ , которая создает нулевое силовое поле. То есть такую плотность, для которой выполняется соотношение (1). На конике  $C_1$  введем гомеоидную плотность  $d\psi = k(\psi) ds$ , которая гарантирует равенство касательных в виде (2).

Пусть  $A_1A_2$  — хорда коники  $C_0$ , касающаяся коники  $C_1$ , причем  $A_1 = A(\varphi_1)$  и  $A_2 = A(\varphi_2)$  (рис. 4). Через  $l_1$  обозначим отрезок от точки  $A_1$  до точки касания  $B_1 = B(\psi_1)$ . Через  $l_2$  обозначим аналогичный отрезок, выходящий из точки  $A_2$ . Наконец, через  $m_1$  обозначим отрезок от точки касания  $B_1$  до точки  $A_2$  и положим  $k_1 = k(\psi_1)$ ,  $k_2 = k(\psi_2)$ .

Сдвинув начальную точку  $A_1$  на  $d\varphi = d\varphi_1$ , из соотношения (1) получаем

$$\frac{d\varphi_1}{l_1} = \frac{d\varphi_2}{m_1}.$$

В свою очередь из соотношения (2) получаем

$$m_1k_1 = l_2k_2.$$

Откуда следует, что

$$\frac{d\varphi_1}{l_1k_1} = \frac{d\varphi_2}{l_2k_2}.$$

Сначала развернем это равенство до

$$\frac{d\varphi_1}{l_1k_1} = \frac{d\varphi_2}{l_2k_2} = \dots = \frac{d\varphi_{n+1}}{l_{n+1}k_{n+1}}.$$

Потом снова сократим до

$$\frac{d\varphi_1}{l_1 k_1} = \frac{d\varphi_{n+1}}{l_{n+1} k_{n+1}}.$$

Если ломаная  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$  замкнута, то  $l_{n+1} = l_1$ , и  $k_{n+1} = k_1$ . Откуда следует, что

$$d\varphi_{n+1} = d\varphi_1. \quad (3)$$

Это соотношение гарантирует лишь равенство абсолютных величин сдвигов, но пока не совпадение их направлений.

Пусть  $\sigma$  — число точек касания ломаной с коникой  $\mathcal{C}_1$ , лежащих вне эллипса  $\mathcal{C}_0$  (число *внешних* касаний). Сделанное ранее замечание об ориентации показывает, что для ориентированных дуг соотношение (3) может быть записано в виде

$$d\varphi_{n+1} = (-1)^\sigma d\varphi_1.$$

Легко понять, что при любом расположении эллипсов число  $\sigma$  внешних касаний для замкнутой ломаной обязательно четно. Отсюда следует, что равенство (3) верно и с учетом ориентации. То есть куда сдвинется точка  $A_1$ , ровно туда же сдвинется точка  $A_{n+1}$  и ломаная останется замкнутой. Теорема Понселе почти доказана.

#### *Невырожденные коники приводятся к паре эллипсов*

Осталось показать, что, действительно, доказательство достаточно провести только для пары эллипсов. Конструкция, описанная в теореме Понселе, инвариантна относительно проективных преобразований, так как при проективном преобразовании коники переходят в коники и касательные в касательные. Если на проективной плоскости существует прямая, не пересекающая ни одну из коник  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ , то отправив эту прямую на бесконечность, сразу получим пару эллипсов.

Рассмотрим случай, когда любая прямая пересекает хотя бы одну из коник (речь идет о расположении, подобном рис. 1 б). Воспользуемся тем, что теорема Понселе инвариантна относительно еще одного типа преобразований — относительно перехода к двойственной конфигурации [1, 2]. При таком преобразовании коники лишь обмениваются ролями — образ ломаной будет вписан в образ  $\mathcal{C}_1$  и будет касаться образа  $\mathcal{C}_0$ . Но главное, что появляются прямые, не пересекающие образы коник, и значит опять дело можно свести к паре эллипсов.

### ГОМЕОИДНАЯ ПЛОТНОСТЬ — АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Гомеοидную плотность, как сейчас будет показано, можно ввести не только на эллипсе, но и на других кониках. Так что изложенное выше доказательство на самом деле проходит для любой пары коник и можно обойтись без каких-либо дополнительных преобразований.

#### *Две прямые не притягивают*

Пусть коника представлена двумя прямыми  $L_1$  и  $L_2$ , пересекающимися в точке  $O$  (рис. 5). Возьмем произвольную точку  $P$  на плоскости и выпустим из нее

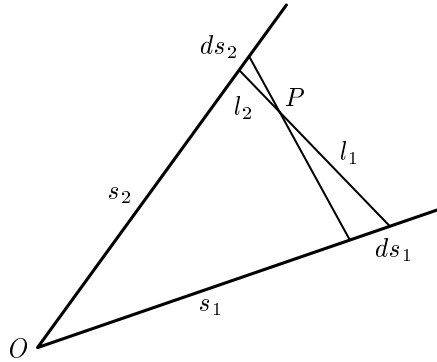


Рис. 5.

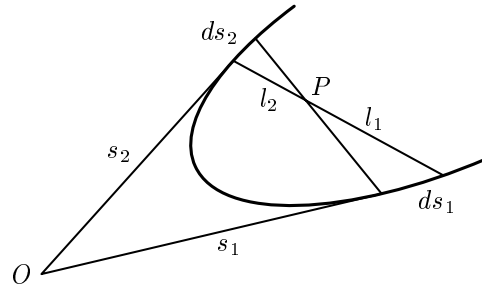


Рис. 6.

две близкие прямые. Они пересекут  $L_1$  и  $L_2$  по отрезкам  $ds_1$  и  $ds_2$ . Расстояния от точки  $P$  до этих отрезков обозначим через  $l_1$  и  $l_2$ , а расстояния от точки  $O$  до них обозначим  $s_1$  и  $s_2$ . Легко убедиться, что для данной конфигурации выполняется соотношение

$$\frac{ds_1/s_1}{l_1} = \frac{ds_2/s_2}{l_2}, \quad (4)$$

которое показывает, что после введения плотности  $d\varphi = ds/s$  прямые на плоскости не притягивают.

*Равенство касательных и отсутствие притяжения — две стороны одной медали*

При обсуждении ситуации с эллипсом, мы показали, что гомеоидная плотность обеспечивает отсутствие притяжения (из-за локального баланса сил со стороны высекаемых дуг) и одновременно равенство касательных. Сейчас мы покажем, что эти свойства равносильны.

Пусть, например, на кривой введена плотность  $d\varphi = k(s) ds$ , обеспечивающая равенство касательных, (рис. 6) — касательные длины  $s_1$  и  $s_2$  пересекаются и имеет место равенство

$$k_1 s_1 = k_2 s_2. \quad (5)$$

Пусть из произвольной точки  $P$  проведены две близкие прямые, высекающие на кривой линейные элементы длины  $ds_1$  и  $ds_2$ , находящиеся от  $P$  на расстояниях  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 6). Пусть эти элементы пересекаются в точке  $O$ , находящейся от них на расстояниях  $s_1$  и  $s_2$ . Тогда одновременно выполняются равенства (4) и (5), из которых следует  $k_1 ds_1/l_1 = k_2 ds_2/l_2$ , т. е.

$$\frac{d\varphi_1}{l_1} = \frac{d\varphi_2}{l_2}.$$

Доказано, что кривая не притягивает, так как выполняется локальный баланс сил. Это доказательство обратимо, поэтому из локального баланса сил также вытекает равенство касательных.

*Аналитическое представление гомеοидной плотности*

Пусть коника на плоскости задана уравнением  $F(x, y) = 0$ , где

$$F(x, y) = [x \ y \ 1] A \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть в точках  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  на конике проведены касательные, пересекающиеся в точке  $O$ . Тогда для расстояния  $s_1$  от  $O$  до первой из точек имеется формула

$$s_1 = 2 \left( \left( [x_1 \ y_1 \ 1] A \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) / |\nabla F(x_1, y_1) \wedge \nabla F(x_2, y_2)| \right) \cdot (|\nabla F(x_1, y_1)|).$$

Мы видим, что один из сомножителей здесь симметричен относительно точек касания, а другой зависит только от первой из них. Поэтому после введения на конике плотности

$$d\varphi = \frac{ds}{|\nabla F|}$$

касательные становятся равными и коника перестает притягивать из-за локального баланса сил — эта плотность гомеοидна.

*Двояко-линейчатая поверхность — геометрическое представление гомеοидной плотности*

Пусть на кривой  $C$ , лежащей в плоскости  $\pi$ , задана плотность  $d\varphi = k ds$ , гарантирующая равенство касательных. На кривой введем ориентацию, а плоскость вложим в  $R^3$ . В  $R^3$  построим семейство прямых, параметризованное точками кривой  $C$ . Именно, в каждой точке  $P \in C$  проведем прямую, которая проектируется на  $\pi$  в касательную к  $C$  и имеет относительно  $\pi$  угловой коэффициент  $k(P)$ . Полученная линейчатая поверхность  $Q$  на самом деле будет двояко-линейчатой, так как условие равенства касательных гарантирует, что на  $Q$  лежат и все прямые с угловым коэффициентом  $-k(P)$ .

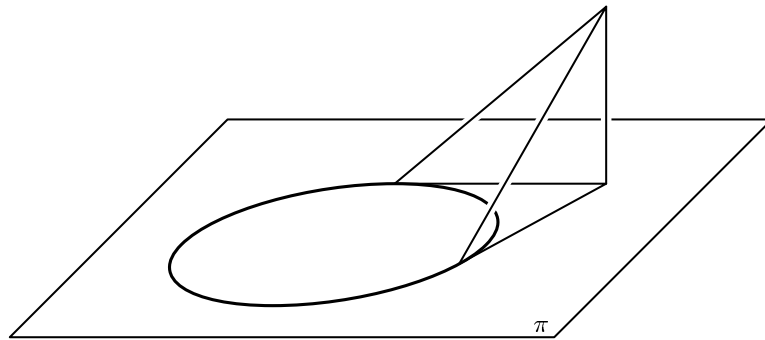


Рис. 7.



Хорошо известно [2], что всякая двояко-линейчатая поверхность это либо однополостный гиперboloид, либо гиперболический параболоид. Отсюда, кстати, следует, что исходная кривая  $C$  — обязательно коника. И, значит, гомеодную плотность с равенством касательных и отсутствием притяжения из-за локального баланса сил можно ввести только на кониках.

### ОТ КОНИК К КВАДРИКАМ — ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Итак, в предыдущем разделе мы показали, что гомеодная плотность на конике допускает естественное представление в виде квадрики в трехмерном пространстве.

#### *От коник к квадрикам*

Вернемся к теореме Понселе. Будем считать, например, что мы имеем дело с двумя эллипсами  $C_0$  и  $C_1$ , лежащими в координатной плоскости  $xy$ . Над эллипсом  $C_0$  построим цилиндр  $Q_0$  с образующей, параллельной оси  $z$ . Используя гомеодную плотность на эллипсе  $C_1$ , построим над ним однополостный гиперboloид  $Q_1$ . В описанной ситуации связь между теоремой Понселе для коник  $C_0$ ,  $C_1$  и теоремой для квадрик  $Q_0$ ,  $Q_1$ , сформулированной во введении, становится очевидной — линейные образующие  $Q_1$  проектируются на плоскость  $xy$  в касательные к эллипсу  $C_1$ , а пересечение  $Q_0 \cap Q_1$  в конику  $C_0$ .

#### *Квадрики и их пересечения*

В пространстве  $CP^3$  все невырожденные квадрики проективно эквивалентны. Приведем невырожденную квадрику к виду  $x_1x_2 = x_3x_4$ . Такая квадрика содержит два семейства прямых —  $\lambda x_1 = \mu x_3$ ,  $\mu x_2 = \lambda x_4$  и  $\lambda x_1 = \mu x_4$ ,  $\mu x_2 = \lambda x_3$ . Каждое из семейств представляет собой  $CP^1$  (с однородными координатами  $\lambda, \mu$ ) и через каждую точку квадрики проходит ровно по одной прямой из каждого семейства. Таким образом, невырожденная квадрика в  $CP^3$  является прямым произведением  $CP^1 \times CP^1$ .

Рассмотрим две квадрики общего положения в  $CP^3$ . Пусть  $\mathcal{T} = Q_0 \cap Q_1$  — их пересечение. Через  $LQ_1$  обозначим одну из двух систем линейных образующих квадрики  $Q_1$ . Эта система представляет собой  $CP^1$  или, что то же самое,  $S^2$ . Каждая из прямых, входящих в  $LQ_1$ , пересекает  $Q_0$  а, значит, и  $\mathcal{T}$  ровно в двух точках (с учетом кратности). Таким образом,  $\mathcal{T} = Q_0 \cap Q_1$  является двулистным накрытием  $S^2$ . У этого накрытия имеются четыре точки ветвления (как раз те точки, где прямые из  $LQ_1$  касаются  $\mathcal{T}$ ). Отсюда следует, что  $\mathcal{T}$  — тор (подробности в [8]).

#### *Второе доказательство*

Докажем теорему для двух квадрик, сформулированную во введении. Рассмотрим две квадрики общего положения  $Q_0$  и  $Q_1$  в  $CP^3$ , пересекающиеся по тору  $\mathcal{T} = Q_0 \cap Q_1$ . Пусть опять  $LQ_1$  одна из систем линейных образующих квадрики  $Q_1$ . Определим инволюцию  $\sigma$  тора по правилу: точки пересечения  $p'$  и  $p''$

тора с линейной образующей меняются местами —  $p' \leftrightarrow p''$ . Присутствие кратных пересечений гарантирует наличие у этой инволюции неподвижных точек. У тора имеются два типа аналитических инволюций. Это сдвиг на полупериод и симметрия относительно точки. Существование неподвижных точек показывает, что  $\sigma$  представляет собой симметрию относительно точки.

На квадрике  $Q_1$  есть две системы линейных образующих  $L'Q_1, L''Q_1$ . Им соответствуют две инволюции  $\sigma'$  и  $\sigma''$ . Произведение четного числа этих инволюций  $\sigma''\sigma' \dots \sigma''\sigma'$  является сдвигом тора и наличие неподвижной точки гарантирует тождественность этого отображения. Теорема доказана.

### Обратно к коникам

Покажем, как предыдущие рассуждения приводят к теореме Понселе для коник. Воспроизведем конструкцию из пункта *От коник к квадрикам*. Пусть расположенная в плоскости  $xy$  замкнутая ломаная  $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ ,  $A_1 = A_{n+1}$  вписана в  $C_0$  и описана около  $C_1$ . Поднимем ее на квадратик  $Q_1$  так, чтобы получилась ломаная  $B_1B_2 \dots B_{n+1}$ , у которой отрезки  $B_{2i-1}B_{2i}$  лежат на образующих из  $L'Q_1$ , а отрезки  $B_{2i}B_{2i+1}$  — на образующих из  $L''Q_1$ . Легко убедиться: если отрезок  $A_iA_{i+1}$  касается коники  $C_1$  внешним образом (точка касания лежит вне  $C_0$ ), то точки  $B_i, B_{i+1}$  расположены по одну сторону от плоскости  $xy$ , если же касание внутреннее, то  $B_i, B_{i+1}$  лежат по разные стороны.

Вспомним еще, что для замкнутой ломаной  $A_1A_2 \dots A_{n+1}$  число внешних касаний  $\sigma$  четно. Отсюда сразу следует, что в случае четного  $n$  ломаная на квадрике тоже будет замкнутой, то есть  $B_1 = B_{n+1}$ . Но тогда ломаная  $B_1B_2 \dots B_{n+1}$  будет замкнута при любом выборе точки  $B_1$ , а вместе с ней будет замкнута ломаная  $A_1A_2 \dots A_{n+1}$  при любом выборе точки  $A_1$ .

Если же  $n$  нечетно, то будет выполняться соотношение  $B_1 = \sigma_z B_{n+1}$ , где  $\sigma_z$  симметрия относительно плоскости  $xy$ . Отсюда следует, что  $B_1$  неподвижная точка произведения четного числа инволюций  $\sigma_z\sigma' \dots \sigma''\sigma'$  и, следовательно, это произведение есть тождественное преобразование. Таким образом, при любом выборе точки  $B_1$  будет выполняться соотношение  $B_1 = \sigma_z B_{n+1}$  и, значит, при любом выборе точки  $A_1$  опять же будет  $A_1 = A_{n+1}$ .

### Еще одна теорема Понселе

Как было обещано во введении, приведем еще один вариант пространственной теоремы Понселе.

**ТЕОРЕМА.** Пусть имеется пучок квадрик  $Q_\lambda$  в  $CP^3$ . Пусть пересечение  $T = \bigcap_\lambda Q_\lambda$  является тором. Рассмотрим  $2n$  квадрик  $Q_1, \dots, Q_{2n}$ , принадлежащих пучку. На каждой из них выберем по системе линейных образующих  $LQ_i$ . Пусть  $\sigma_i$  — соответствующие им инволюции тора  $T$ . Тогда, если произведение  $\sigma_1 \dots \sigma_{2n}$  имеет неподвижную точку, то это тождественное преобразование тора.

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от предыдущего доказательства теоремы для двух квадрик.

## ДОБАВЛЕНИЯ

*Интегрируемость*

Как уже было сказано во введении, конфигурация, описанная в теореме Понселе, естественным образом возникает при движении частицы в эллиптическом бильярде. Траектория частицы, движущейся вдоль границы бильярда, все время касается эллипса, софокусного с границей бильярда. А все отрезки траектории, проходящей между фокусами, лежат на касательных к софокусной гиперболе. Такое упорядоченное поведение траекторий обязано интегрируемости эллиптического бильярда.

Пусть  $(x_n, y_n)$  — последовательные точки соударения частицы с границей бильярда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

а  $V_n = (u_n, v_n)$ ,  $|V_n| = 1$  — скорость частицы перед соответствующим соударением. Тогда

$$\frac{(x_{n+1} + x_n)(x_{n+1} - x_n)}{a^2} + \frac{(y_{n+1} + y_n)(y_{n+1} - y_n)}{b^2} = 0$$

и это равенство означает, что естественное поле нормалей

$$\nabla \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = \left( \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2} \right)$$

обладает следующим свойством: сумма нормалей, взятых на концах любой хорды эллипса, перпендикулярна этой хорде. Это приводит к тому, что проекция поля нормалей на траекторию движения частицы есть величина постоянная, то есть имеется интеграл вида

$$F(x_n, y_n, u_n, v_n) = \frac{x_n u_n}{a^2} + \frac{y_n v_n}{b^2}. \quad (6)$$

*Интегрируемость и гомеодность*

Рассмотрим произвольную кривую с тем же самым механизмом интегрируемости, т.е. кривую с таким векторным полем  $N$ , что сумма его векторов на концах любой хорды перпендикулярна этой хорде. Беря малую хорду, видим, что это обязательно поле нормалей. Пусть на концах некоторой хорды векторы этого поля имеют длины  $N_1$  и  $N_2$ , а длины касательных от концов хорды до их пересечения имеют длины  $l_1$  и  $l_2$ . Тогда, как показывает рисунок 8,

$$\frac{l_1}{N_1} = \frac{l_2}{N_2},$$

то есть длины касательных с весом  $1/|N|$  равны, то есть плотность  $1/|N|$  гомеодная, а значит, сама кривая — обязательно коника.

*Фазовый портрет*

Вернемся к интегралу (6) и положим в нем

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, & y &= b \sin t \\ u &= \cos \varphi, & v &= \sin \varphi. \end{aligned}$$

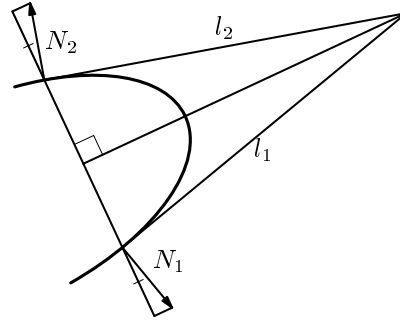


Рис. 8.

Тогда этот интеграл примет вид

$$F(t, \varphi) = (a + b) \cos(t - \varphi) - (a - b) \cos(t + \varphi). \quad (7)$$

Значит, в фазовом пространстве с координатами  $(t, \varphi)$  точка  $(t_n, \varphi_n)$ , соответствующая точке отражения  $(x_n, y_n)$  и вектору скорости перед соударением  $(u_n, v_n)$ , движется по линиям уровня функции  $F(t, \varphi)$ . Фазовый портрет эллиптического бильярда, изображенный на рисунке 9, получен в результате следующего компьютерного эксперимента. Из нижней точки эллипса в нескольких направлениях запускались частицы и для каждой частицы в течение продолжительного времени на фазовой плоскости отмечались точки  $(t_n, \varphi_n)$ .

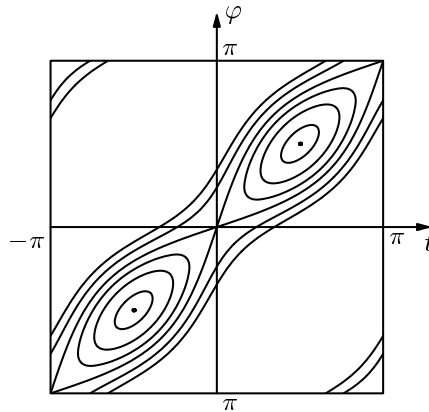


Рис. 9.

#### Геометрический и компьютерный бильярды

На первый взгляд существенных расхождений между этими бильярдами не должно быть. Сравнение рисунка 9 и картины линий уровня функции (7) подтверждает это. Однако, имеется ситуация, в которой различие существует и бросается в глаза.

Основное оптическое свойство эллипса гарантирует, что частица, один раз прошедшая через фокус, будет проходить через фокусы и после каждого следующего соударения. Запустим частицу из нижней вершины эллипса через правый фокус. Очевидно, что, отражаясь и последовательно проходя через фокусы, частица будет приближаться к большой оси эллипса. Легко оценить скорость этого приближения. Пусть  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  — это расстояние от центра эллипса до его фокуса. Тогда при каждом прохождении бильярда отклонение частицы от большой оси уменьшается примерно в  $(a + c)/(a - c)$  раз.

В компьютерном эксперименте начальное поведение частицы, проходящей через фокус, полностью соответствует этому сценарию. Однако, после прижатия к оси и нескольких прохождений вдоль нее частица отбрасывается от большой оси эллипса. После этого ее снова прижимает к оси и снова отбрасывает и так далее — возникают биения. Дадим качественное объяснение этому явлению.

Запустим в «геометрическом» бильярде частицу через фокус, подождем пока она достаточно прижмется к оси и обратим ее направление. Обратная траектория — это тоже траектория некоторой частицы, и первоначально эта траектория будет проходить вдоль оси, но уже будет отталкиваться от нее. Таким образом, вблизи большой оси бильярда существуют две траектории: одна притягивается к этой оси, другая отталкивается от нее. В «компьютерном» бильярде за счет ошибок округления происходит «пересадка» с притягивающейся траектории на отталкивающуюся и частица начинает удаляться от оси бильярда. Этим и объясняются биения. Влияние ошибок округления можно подтвердить, проводя вычисления с удвоенной точностью, — в этом случае отбрасывание частицы от оси бильярда происходит после большего числа отражений.

#### *Пара коник приводится к виду двух окружностей*

Этот раздел предназначен для тех, кто имеет привычку просматривать тексты задом наперед — от конца к началу. Здесь объясняется, почему можно не читать эту статью, а значит, почему ее можно было и не писать. В [2] имеется простое доказательство теоремы Понселе для двух вложенных окружностей. Собственно, наше первое доказательство скроено по этому образцу. Покажем, что двумя окружностями можно было бы и ограничиться. Рассмотрим случай двух вложенных эллипсов. С помощью аффинного преобразования превратим внешний из них в окружность. Ограниченный ею круг будем считать проективной моделью плоскости Лобачевского. В этой модели движения — это проективные преобразования, сохраняющие круг [2]. Рассмотрим однопараметрическую группу  $H_1$  сдвигов вдоль горизонтального диаметра круга. Движения из  $H_1$  переставляют хорды, перпендикулярные диаметру, при этом точки круга движутся по эквидистантам, представленным полуэллипсами, касающимися внешней полуокружности в граничных точках диаметра. Аналогичным образом действует однопараметрическая группа  $H_2$  сдвигов вдоль вертикального диаметра. Пусть  $h_1 \in H_1$  и  $h_2 \in H_2$ . Тогда под действием преобразования  $h_1 h_2$  точка сначала сдвигается вдоль меридиана юг-север, а потом вдоль меридиана запад-восток. При этом для любой пары точек  $x, y$  однозначно определена пара преобразований  $h_1, h_2$ , такая что  $y = h_1 h_2(x)$ .

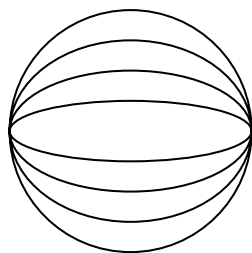


Рис. 10.

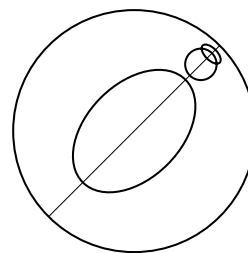
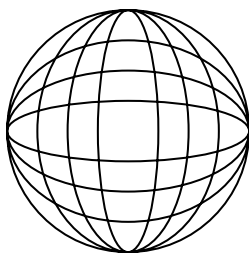


Рис. 11.

При движении плоскости Лобачевского эллипс переходит в эллипс, но при этом его центр не обязательно переходит в центр образа. Тем не менее, очевидно, что для любого эллипса существует преобразование вида  $h_1 h_2$ , переводящее его в эллипс, центр которого совпадает с центром круга. Проведем это преобразование и после этого рассмотрим однопараметрическую группу сдвигов вдоль диаметра, содержащего большую ось централизованного эллипса. При движении под действием этой группы и большая, и малая оси эллипса уменьшают свои размеры. Но большая ось делает это более интенсивно и в некоторый момент эллипс превращается в окружность. Таким образом, пара коник может быть приведена к виду двух окружностей, и теперь можно сослаться на соответствующее доказательство теоремы Понселе из [2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Берже М. Геометрия. М.: Мир, 1984.
- [2] Прасолов В. В., Тихомиров В. М. Геометрия. М.: МЦНМО, 1997.
- [3] Козлов В. В., Трещев Д. В. Биллиарды. М.: МГУ, 1991.
- [4] Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию. М.: ФАЗИС, 1996.
- [5] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
- [6] Griffiths P., Harris J. A Poncelet Theorem in Space // Comment. Math. Helvetici, 1977. Vol 52. P. 145–160.
- [7] Barth W., Bauer Th. Poncelet Theorems // Expo. Math. 1996. Vol 14. P. 125–144.
- [8] Прасолов В. В., Шварцман О. В. Алгебра римановых поверхностей. М.: ФАЗИС, 1999.