

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Троцкий, Р. М. Шагалиев, Проблема совмещения конечно-разностных и конечно-элементных схем в задачах газовой динамики с теплопроводностью,

Матем. моделирование, 2000, том 12, номер 2, 3–11

<https://www.mathnet.ru/mm834>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

14 мая 2025 г., 16:57:55



Работа доложена на IX научной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященной 80-летию академика А.А. Самарского.

ПРОБЛЕМА СОВМЕЩЕНИЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ СХЕМ В ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

© В.Е. Трошчиев¹⁾, Р.М. Шагалиев²⁾

- 1) Государственный Научный Центр Российской Федерации – Троицкий Институт Инновационных и Термоядерных Исследований (ТРИНИТИ)
- 2) Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский Научно-Исследовательский Институт Экспериментальной Физики (ВНИИЭФ)

Для уравнений газовой динамики рассматриваются схемы с заданием сеточных термодинамических функций плотности, температуры, давления в центрах четырёхугольных ячеек (центровые схемы). Для уравнения теплопроводности рассматриваются схемы с заданием сеточной температуры в узлах-вершинах четырёхугольников (узловые схемы, в частности, конечно-элементные). Для совмещения узловых и центровых схем возникает необходимость двукратных интерполяций температур из узлов в центры и обратно, что приводит к схемам с условной аппроксимацией (негибкие схемы). В докладе предложен метод преобразования узловых схем в интерполяционно-инвариантные схемы (*I*-схемы). *I*-схема – это схема, которая остаётся неизменной после двукратных интерполяций сеточных температур.

ON THE PROBLEM OF COMBINATION OF FINITE-DIFFERENCE AND FINITE-ELEMENT SCHEMES IN GAS-DYNAMIC PROBLEMS WITH THERMAL CONDUCTIVITY

V.E. Troshchiev¹⁾, R.M. Shagaliev²⁾

- 1) State Science Center - Troitsk Institute for Innovation and Fusion Research
- 2) Russian Federal Nuclear Center - All Russia Scientific Research Institute of Experimental Physics

Schemes with thermodynamic functions of density, temperature, pressure defined in centers of tetragonal cells are considered for gas dynamic equations (center schemes). Schemes with temperature defined in nodes-tops of tetragons are considered for the thermal conductivity equation (node schemes, in particular, finite-element ones).

Need appears of double interpolations of temperatures from nodes to centers and vice versa for combining of node and center schemes. This leads to the schemes with conditional approximation. Method of transformation of node schemes to interpolation-invariant ones (*I*-schemes) is offered in the report. *I*-scheme – is a scheme, which stays unchangeable under double interpolations of net temperature.

I. Численные расчеты задач с большим числом физических процессов (газодинамика, теплопроводность, перенос частиц, кинетические явления и другие процессы) [1] стали актуальными в сороковых-пятидесятых годах в связи с работами по атомной проблеме. Для решения этого класса задач в Институте прикладной математики АН СССР А.Н. Тихоновым и А.А. Самарским со своими сотрудниками уже в те годы были разработаны самосогласованные математические модели указанных физических процессов, численные методики и компьютерные программы [1]. По этим методикам и программам было выполнено большое число расчетов, имевших важное значение для работ по атомной проблеме. Разработанные модели и ряд принципиальных положений численных методик того времени полностью сохраняют свое значение до настоящего времени.

В конце пятидесятых – начале шестидесятых годов методики и программы ИГМ были переданы во ВНИИЭФ и ВНИИТФ. Дальнейшее совершенствование и развитие численных методов и компьютерных программ проводилось в трех институтах по многим направлениям, в частности, по разработке численных методов для решения задач [1] в пространственно-двумерных и трехмерных постановках. При разработке численной методики и программы в пространственно-двумерной постановке [2-4] мы неожиданно столкнулись с невозможностью использования вариационно-разностных (конечно-элементных) схем для решения двумерного уравнения теплопроводности совместно с уравнениями газовой динамики.

В настоящем докладе, посвященном 80-летию Александра Андреевича Самарского, мы рассматриваем вопрос о совместном использовании типичных разностных схем для уравнений газовой динамики и вариационно-разностных схем для уравнения теплопроводности – вопрос, от решения которого существенно зависит точность и экономичность расчетов.

II. При численном решении уравнений газовой динамики (УГД) в лагранжевых и эйлоро-лагранжевых переменных аппроксимация УГД обычно осуществляется на косоугольных сетках (в двумерном случае – это треугольники, четырехугольники и т.д., в трехмерном – тетраэдры и другие многогранники). На таких сетках кинематические сеточные функции u – скорость, r – координаты рассчитываются, как правило, в вершинах-узлах ячеек, а термодинамические величины температура T , плотность ρ , давление P и внутренняя энергия E во внутренних точках-центрах многоугольников или многогранников. Такое задание сеточных функций соответствует сеточной трактовке физических законов, на основе которых выводятся УГД.

Систему УГД с учетом теплопроводности для определенности рассмотрим в переменных Лагранжа:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P, \quad \frac{dr}{dt} = u, \quad \frac{d(1/\rho)}{dt} = \frac{1}{\rho} \text{div} u, \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{P}{\rho} \text{div} u + \frac{1}{\rho} \text{div}(\chi \text{grad} T), \quad (2)$$

$$P = P(\rho, T), \quad E = E(\rho, T), \quad \chi = \chi(\rho, T). \quad (3)$$

Для дальнейших рассмотрений предположим, что уравнение энергии (2) аппроксимируется на временном шаге $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ следующей схемой расщепления по физическим процессам:

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = \frac{1}{\rho^n} \text{div}(\chi^n \text{grad} T^{n+1}), \quad (4)$$

$$\frac{E^{n+1} - E^{n+1}}{\Delta t} = -\frac{P^{n+1}}{\rho^{n+1}} \text{div} u, \quad (5)$$

$$E^{n+1} = E(\rho^n, T^{n+1}), \quad E^n = E(\rho^n, T^n), \quad \chi^n = \chi(\rho^n, T^n), \quad E^{n+1} = E(\rho^{n+1}, T^{n+1}).$$

В данной схеме расщепления первым решается уравнение теплопроводности (УТП) (4), из которого находится температура $T^{n+1}(\mathbf{r})$, затем решаются УГД (1), (5). Детальная запись разностных аппроксимаций по времени t для уравнения (1) и правой части (5) нам не потребуется. Далее будем рассматривать для упрощения двумерные уравнения и наиболее употребительные четырехугольные сетки (рис.1).

III. Пусть аппроксимация УГД (1), (5) по переменным x, y проведена по какой-либо центральной схеме относительно термодинамических функций. Тогда для решения УТП (4) естественно также применять центровые схемы, т.е. схемы с заданием сеточных температур в центрах ячеек. Для центральных схем ячейками баланса являются исходные четырехугольники сетки (рис.1), а само уравнение баланса для четырехугольника с номером $m+1/2$ имеет вид:

$$\frac{E_{m+1/2}^{n+1} - E_{m+1/2}^n}{\Delta t} \rho_{m+1/2}^n S_{m+1/2} = \oint_{\gamma} \chi_{\gamma}^n \cdot \frac{\partial T^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} d\gamma, \quad (6)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к контуру γ четырехугольника "m+1/2", $S_{m+1/2}$ – его площадь, χ_{γ}^n – значение коэффициента теплопроводности на контуре γ .

Уравнение баланса тепла (6) выделяет класс центральных схем для УТП. Точность конкретной схемы в классе определяется, прежде всего, видом аппроксимации контурного (потокowego) интеграла в правой части (6). Из геометрических соображений очевидно, что построить аккуратную аппроксимацию потокового члена (6) на косоугольных сетках (Рис.1) весьма трудно. Получающиеся схемы не монотонны, алгоритмически неоднородны, требуют использования разного рода интерполяций и экстраполяций, что делает такие аппроксимации условными [5]. Численные расчеты подтверждают эти свойства центральных схем.

IV. В связи с отмеченными недостатками центральных схем на косых сетках большой интерес для решения УТП в задачах газодинамики представляют конечно-элементные схемы (к.-э. схемы). К.-э. схемы строятся для линейного (или линеаризованного на шаге Δt) УТП следующим образом.

1. В области D с контуром Γ линейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\chi(x, y) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\chi(x, y) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (7)$$

с начальными данными

$$T(x, y, t) \Big|_{t=0} = T^0(x, y) \quad (8)$$

и краевыми условиями

$$T(x, y, t) \Big|_{(x, y) \in \Gamma} = \varphi(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}, t) \quad (9)$$

аппроксимируется по времени неявной разностной схемой

$$\frac{T^{n+1}(x, y) - T^n(x, y)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\chi \frac{\partial T^{n+1}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\chi \frac{\partial T^{n+1}}{\partial y} \right], \quad (10)$$

$$T(x, y, t) \Big|_{t=t_0} = T^0(x, y), \quad (11)$$

$$T(x, y, t^{n+1}) = \varphi(x_\Gamma, y_\Gamma, t^{n+1}) \equiv \varphi^{n+1}(x_\Gamma, y_\Gamma). \quad (12)$$

2. На каждом шаге по времени (t^n, t^{n+1}) задача (10)-(12) заменяется эквивалентной вариационной задачей о нахождении минимизирующего элемента $W_{\min}(x, y)$ для квадратичного функционала [6, 7]:

$$J(W^{n+1}(x, y)) = \iint_D \left[\chi(x, y) \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \chi(x, y) \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \frac{W - 2T^n}{\Delta t} \cdot W \right]^{n+1} dx dy, \quad (13)$$

$$W^{n+1}(x, y) \Big|_{(x, y) \in \Gamma} = \varphi^{n+1}(x_\Gamma, y_\Gamma). \quad (14)$$

В функционале (13) функция $T^n(x, y)$ предполагается известной. На первом шаге (t^0, t^1) функция $T^0(x, y)$ известна из условия (11). Эквивалентность задач (10)-(12) и (13), (14) заключается в том, что $W_{\min}^{n+1}(x, y) \equiv T^{n+1}(x, y)$.

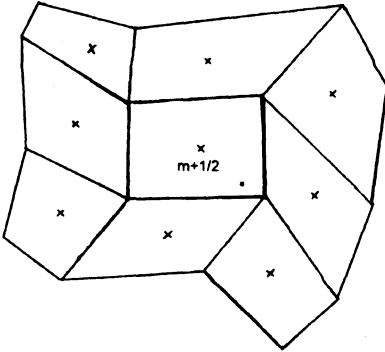


Рис. 1.

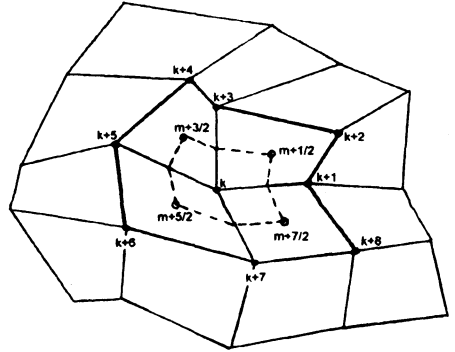


Рис. 2.

3. Область D покрывается выпуклыми четырехугольниками с вершинами внутри D и на контуре Γ (см. фрагмент сетки на рис.2). Таким образом, область D заменяется приближенно на область D^h , а контур Γ – на контур Γ^h в виде ломаной линии.

Каждому узлу-вершине с номером k ставится в соответствие базисная функция

$$\omega_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, \hat{k}, \hat{k} + 1, \dots, \hat{k},$$

где \hat{k} – число внутренних узлов и $\hat{k} - \hat{k}$ – число узлов на контуре Γ . Базисные функции $\omega_k(x, y)$ должны удовлетворять определенным требованиям (см.[7]), в частности, свойству полноты. Ограничимся базисными функциями «финитного» типа, т.е. отличными от нуля на минимальном сеточном шаблоне:

- $\omega_k(x, y) = 1$, при $x = x_k, y = y_k$;
- $\omega_k(x, y) > 0$, если точка (x, y) принадлежит четырехугольникам, примыкающим к узлу k ;
- $\omega_k(x, y) \equiv 0$ во всех четырехугольниках, не примыкающих к узлу k ;
- $\omega_k(x, y)$ есть непрерывные функции в области D^h и

$$\sum_{k=1}^{\hat{k}} \omega_k(x, y) \equiv 1. \quad (15)$$

Примером часто используемого финитного базиса являются билинейные функции с изопараметрическим преобразованием [7]. Эти функции в четырехугольнике $m+1/2$ с вершинами (x_k, y_k) , (x_{k+1}, y_{k+1}) , (x_{k+2}, y_{k+2}) , (x_{k+3}, y_{k+3}) определяются следующим образом. В плоскости ζ, η в единичном квадрате с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ задается функция

$$V(\zeta, \eta) = 1 - \zeta - \eta + \zeta\eta. \quad (15')$$

Взаимно однозначное соответствие между переменными (x, y) в четырехугольнике $m+1/2$ и переменными (ζ, η) в единичном квадрате определяется преобразованием

$$\begin{aligned} x &= (1 - \eta)[(1 - \zeta)x_k + \zeta x_{k+1}] + \eta[(1 - \zeta)x_{k+2} + \zeta x_{k+3}], \\ y &= (1 - \eta)[(1 - \zeta)y_k + \zeta y_{k+1}] + \eta[(1 - \zeta)y_{k+2} + \zeta y_{k+3}]. \end{aligned} \quad (15'')$$

Тогда

$$\omega_k(x, y) = V(\zeta(x, y), \eta(x, y)). \quad (15''')$$

Аналогичным образом определяется $\omega_k(x, y)$ в четырехугольниках $m+1^{1/2}$, $m+2^{1/2}$, $m+3^{1/2}$.

4. Минимизирующий элемент для функционала (13) ищется в конечномерном пространстве S^h сеточных функций, удовлетворяющих краевому условию (14):

$$\tilde{W}^{n+1}(x, y) = \sum_{k=1}^{\hat{k}} \tilde{W}_k^{n+1} \omega_k(x, y) + \sum_{k=\hat{k}+1}^{\hat{k}} \varphi_k^{n+1} \omega_k(x, y). \quad (16)$$

Функционал (13) минимизируется в пространстве функций (16) путем варьирования коэффициентов \tilde{W}_k^{n+1} . Таким образом, получаем замкнутую линейную систему уравнений

$$\frac{\partial J^h(\tilde{W}_1^{n+1}, \tilde{W}_2^{n+1}, \dots, \tilde{W}_k^{n+1})}{\partial \tilde{W}_k^{n+1}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \hat{k}$$

относительно коэффициентов $\tilde{W}_{k, \min}^{n+1}$ минимизирующей функции $\tilde{W}_{\min}^{n+1}(x, y) \in S^h$. После несложных преобразований система принимает вид

$$\begin{aligned} \iint_{D^h} [\tilde{W}_{\min}^{n+1}(x, y) - \tilde{W}^n(x, y)] \cdot \frac{1}{\Delta t} \omega_k(x, y) dx dy = \\ = - \iint_{D^h} \chi(x, y) \cdot \text{grad} \tilde{W}^{n+1}(x, y) \cdot \text{grad} \omega_k(x, y) dx dy, \quad k = 1, 2, \dots, \hat{k}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\tilde{W}^n(x, y) = \sum_{k=1}^{\hat{k}} T_k^n \cdot \omega_k(x, y) + \sum_{k=\hat{k}+1}^{\hat{k}} \varphi_k^n \cdot \omega_k(x, y).$$

В уравнениях (17) коэффициент теплопроводности $\chi(x, y)$ обычно аппроксимируется в каждом четырехугольнике $m+1/2$ некоторым средним постоянным значением $\chi_{m+1/2}$. Для «финитных»

базисных функций (15) система уравнений (17) существенно упрощается, так как интегрирование проводится только по примыкающим к узлу « k » четырехугольникам (см. рис.2).

В силу эквивалентности дифференциальной задачи (10)-(12) и вариационной – (13), (14) решение системы (17) естественно обозначить через

$$T_k^{n+1} \equiv \hat{W}_{k,\min}^{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \hat{k}.$$

Для «финитных» базисных функций (15) сеточное уравнение (17) в терминах температур T_k^{n+1} принимает в узле k (см. рис. 2) следующий вид:

$$\begin{aligned} & \iint_{s_{m+1/2}} \frac{1}{\Delta t} (\Delta_k^{n+1} \omega_k + \Delta_{k+1}^{n+1} \omega_{k+1} + \Delta_{k+2}^{n+1} \omega_{k+2} + \Delta_{k+3}^{n+1} \omega_{k+3}) \omega_k dx dy + \\ & + \iint_{s_{m+1/2}} \frac{1}{\Delta t} (\Delta_k^{n+1} \omega_k + \Delta_{k+3}^{n+1} \omega_{k+3} + \Delta_{k+4}^{n+1} \omega_{k+4} + \Delta_{k+5}^{n+1} \omega_{k+5}) \omega_k dx dy + \\ & + \iint_{s_{m+2/2}} \frac{1}{\Delta t} (\Delta_k^{n+1} \omega_k + \Delta_{k+5}^{n+1} \omega_{k+5} + \Delta_{k+6}^{n+1} \omega_{k+6} + \Delta_{k+7}^{n+1} \omega_{k+7}) \omega_k dx dy + \\ & + \iint_{s_{m+3/2}} \frac{1}{\Delta t} (\Delta_k^{n+1} \omega_k + \Delta_{k+7}^{n+1} \omega_{k+7} + \Delta_{k+8}^{n+1} \omega_{k+8} + \Delta_{k+1}^{n+1} \omega_{k+1}) \omega_k dx dy = \\ & = - \iint_{s_{m+1/2}} \chi_{m+1/2} \text{grad} (T_k^{n+1} \omega_k + T_{k+1}^{n+1} \omega_{k+1} + T_{k+2}^{n+1} \omega_{k+2} + T_{k+3}^{n+1} \omega_{k+3}) \text{grad} \omega_k dx dy - \\ & - \iint_{s_{m+1/2}} \chi_{m+1/2} \text{grad} (T_k^{n+1} \omega_k + T_{k+3}^{n+1} \omega_{k+3} + T_{k+4}^{n+1} \omega_{k+4} + T_{k+5}^{n+1} \omega_{k+5}) \text{grad} \omega_k dx dy - \\ & - \iint_{s_{m+2/2}} \chi_{m+1/2} \text{grad} (T_k^{n+1} \omega_k + T_{k+5}^{n+1} \omega_{k+5} + T_{k+6}^{n+1} \omega_{k+6} + T_{k+7}^{n+1} \omega_{k+7}) \text{grad} \omega_k dx dy - \\ & - \iint_{s_{m+3/2}} \chi_{m+1/2} \text{grad} (T_k^{n+1} \omega_k + T_{k+7}^{n+1} \omega_{k+7} + T_{k+8}^{n+1} \omega_{k+8} + T_{k+1}^{n+1} \omega_{k+1}) \text{grad} \omega_k dx dy, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\Delta_v^{n+1} = T_v^{n+1} - T_v^n$, $v = k, k+1, \dots, k+8$, а интегрирование проводится по площадям четырехугольников, примыкающих к узлу k (рис. 2).

V. В нашей работе [8] было показано, что к.-э. схема (18) с билинейными базисными функциями (15) консервативна. Локальными ячейками баланса являются многоугольники, окружающие узлы и образованные соединением центров тяжести четырехугольников с серединами сторон, примыкающих к узлу k (см. на рис. 2 контур γ_k : $(x_{m+1/2}, y_{m+1/2})$, $(x_{m+1/2}, y_{m+1/2})$, $(x_{m+2/2}, y_{m+2/2})$, $(x_{m+3/2}, y_{m+3/2})$). Правая часть уравнения (18) есть аппроксимация потока $-\chi \partial T / \partial n$ на контуре γ_k , а левая – это пространственная аппроксимация разности Δ^{n+1} по площади s_k внутри контура γ_k . Отметим, что матрица схемы (18) по самому построению симметрична и самосопряжена, правая часть хорошо аппроксимирует поток тепла через контур γ_k , так как контур всегда находится внутри четырехугольника, формулы расчета коэффициен-

тов матрицы однородны. Что касается левой части (18), то линейная комбинация температур $T_{k+1}, T_{k+2}, \dots, T_{k+8}$ снижает вес центральной температуры T_k и тем самым увеличивается риск возникновения немонотонных решений. Знание локальных ячеек баланса и строгая математическая интерпретация отдельных слагаемых в к.-э. схеме (18) позволяют строить эффективные смешанные узловые схемы конечных разностей и конечных элементов. В частности, если в схеме (18) заменить левую часть аппроксимацией $(T_k^{n+1} - T_k^n) \frac{1}{\Delta t} s_k$, а правую часть сохранить и обозначить для краткости записи через $[\chi \partial T / \partial n]_{\gamma_k}^n$, мы получим смешанную схему

$$\frac{(T_k^{n+1} - T_k^n)}{\Delta t} \cdot s_k = \left[\chi \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{\gamma_k}^n, \quad k = 1, 2, \dots, \hat{k}. \quad (19)$$

В схеме (19) усилено диагональное преобладание центрального узла (x_k, y_k) и в то же время сохранены все свойства к.-э. схем: положительность, симметричность и самосопряженность точного оператора – матрицы системы уравнений.

Численные расчеты показывают, что по схеме (19) успешно решаются на косых сетках самые сложные задачи о распространении тепловых волн с большими градиентами. На рис. 3 для отдельных моментов времени даны результаты расчета температурной волны,

$$T(x, t) = \begin{cases} [1/8(4t - x)]^{1/8}, & 4t > x, \\ 0, & 4t < x, \end{cases}$$

которая является аналитическим решением одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[256 T^8 \frac{\partial T}{\partial x} \right].$$

Расчет выполнен на косоугольной сетке в двумерной трактовке: сплошная линия – аналитическое решение, ромбики – сеточное решение по смешанной схеме (19). Решение этой же задачи по к.-э. схеме (18) показано на рис. 4 – схема (18) не передает монотонным образом тепловую волну.

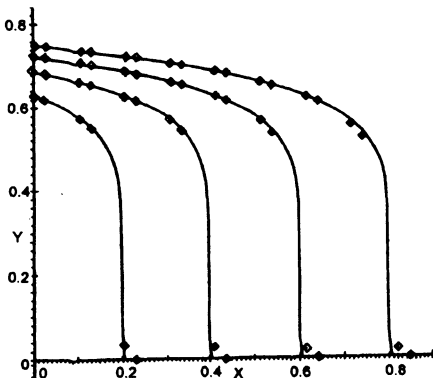


Рис. 3.

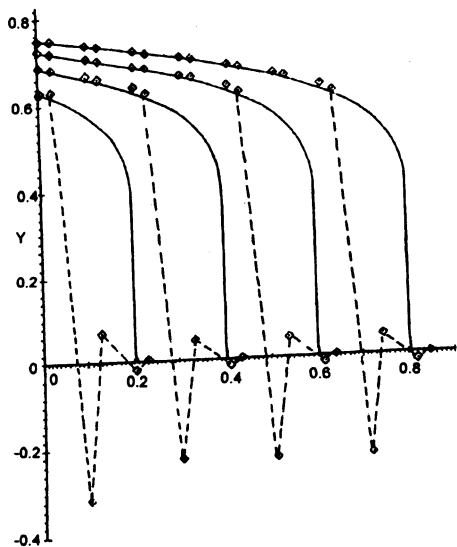


Рис. 4.

VI. Построение узловой смешанной схемы (19) с её важными теоретическими и практическими свойствами ставит вопрос о её применении к решению уравнения теплопроводности в задачах газовой динамики. Однако, чтобы совместить узловые схемы для УТП с центровыми схемами для УГД, очевидно, потребуется двукратная на шаге Δt интерполяция температур из узлов в центры и обратно (особенно это наглядно в методе расщепления по физическим процессам: теплопроводность – первый этап, холодная газодинамика – второй этап). Такие интерполяции приводят к негибким схемам, т.е. к схемам с условной аппроксимацией [5]. Таким образом, прямое совмещение центровых схем для УГД и узловых схем для УТП, вообще говоря, невозможно.

Ранее нами был построен особый класс узловых схем [3], в которых двукратная интерполяция сохраняет исходную схему неизменной. Такие схемы мы называем интерполяционно-инвариантными схемами, или I -схемами. К-э. схемы, в том числе и смешанная схема, к сожалению, не входят в этот класс. Сами же I -схемы [3] являются немонотонными и без дополнительных приемов не могут аккуратно аппроксимировать температурные волны.

В настоящем докладе мы предлагаем общий метод преобразования любой узловой схемы в I -схему.

Поясним суть I -схем на примере одномерного УТП:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 \leq x \leq H, \quad T(0,t) = \varphi_0(t), \quad T(H,t) = \varphi_H(t).$$

Рассмотрим схему:

$$\frac{\bar{T}_k^{n+1} - \bar{T}_k^n}{\Delta t} = \Lambda_k T^{n+1},$$

$$T_0^{n+1} = \varphi_0(t^{n+1}) = \varphi_0^{n+1}, \quad T_{\hat{k}}^{n+1} = \varphi_H(t^{n+1}) = \varphi_H^{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \hat{k} - 1; \quad (20)$$

$$\bar{T}_k = \frac{1}{4} T_{k-1} + \frac{1}{2} T_k + \frac{1}{4} T_{k+1},$$

$$\Lambda_k T = \left(\chi_{k+1/2} \frac{T_{k+1} - T_k}{h} - \chi_{k-1/2} \frac{T_k - T_{k-1}}{h} \right) \frac{1}{h}, \quad k = 1, 2, \dots, \hat{k} - 1. \quad (21)$$

Дополним эту схему формулами интерполяции:

$$T_{k+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} (T_{k+1}^{n+1} + T_k^{n+1}), \quad k = 0, 1, \dots, \hat{k} - 1;$$

$$\bar{\bar{T}}_k^{n+1} = \frac{1}{2} (T_{k+1/2}^{n+1} + T_{k-1/2}^{n+1}), \quad k = 1, 2, \dots, \hat{k} - 1. \quad (22)$$

Очевидно, что двукратная интерполяция (22) не изменяют схему (20), (21), т.к. $\bar{\bar{T}}_k^{n+1} = \bar{T}_k^{n+1}$.

Таким образом, схема (20), (21) есть I -схема. К-э. схемы и классическая схема

$$\left(T_k^{n+1} - T_k^n \right) \frac{1}{\Delta t} = \Lambda_k T^{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \bar{k} - 1 \quad (23)$$

не являются I -схемами, т.е. для них не существует требуемых формул интерполяции.

Основная идея (суть) I -схем заключается в специальной линейной комбинации \bar{T}_k (21), в формулах интерполяции (22) и в независимости определения I -схем от вида аппроксимации потокового члена. Эти свойства I -схем являются ключом к построению метода преобразования любой узловой схемы в интерполяционно-инвариантную. Главный интерес представляет клас-

сическая монотонная схема (23), которая является одномерным вариантом смешанной схемы (19).

Запишем уравнения схемы (23) в виде линейных комбинаций:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{T}_1^{n+1} - \bar{T}_1^n}{\Delta t} &= \frac{1}{4} \frac{(\varphi_0^{n+1} - \varphi_0^n)}{\Delta t} + \frac{1}{2} \Lambda_1 T^{n+1} + \frac{1}{4} \Lambda_2 T^{n+1}, \quad T_0^{n+1} = \varphi_0^{n+1}; \\ \left(\bar{T}_k^{n+1} - \bar{T}_k^n \right) \frac{1}{\Delta t} &= \frac{1}{4} \Lambda_{k-1} T^{n+1} + \frac{1}{2} \Lambda_k T^{n+1} + \frac{1}{4} \Lambda_{k+1} T^{n+1}, \quad k = 2, 3, \dots, \bar{k} - 2, \\ \frac{T_{\dot{k}-1}^{n+1} - T_{\dot{k}-1}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{4} \Lambda_{\dot{k}-2} T^{n+1} + \frac{1}{2} \Lambda_{\dot{k}-1} T^{n+1} + \frac{1}{4} \frac{\varphi_H^{n+1} - \varphi_H^n}{\Delta t}, \quad T_{\dot{k}}^{n+1} = \varphi_H^{n+1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Очевидно, что схема (24) совместно с формулами интерполяций (22) является *I*-схемой. Таким образом, классическая монотонная схема (23) преобразована в интерполяционно-инвариантную.

VII. Предложенный метод преобразования узловых схем в *I*-схемы легко обобщается на многомерные узловые схемы и, в частности, на смешанную схему методов конечных разностей и конечных элементов (19). Это полностью решает вопрос о совмещении узловых схем для УТП с центровыми схемами для УГД. Однако, надо заметить, что решение поставленной задачи достигается за счет расширения сеточного шаблона схем. Это означает усложнение схем, увеличение объема вычислений. Поэтому и далее представляет интерес поиск новых, более экономичных решений проблемы совмещения узловых и центровых схем.

Настоящее исследование выполнено при поддержке Министерства науки по направлению 09 Федеральной целевой программы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Самарский. Прямой расчет мощности взрыва. – Сб.: “Международный симпозиум “Наука и общество – история совместного атомного проекта” (40-е – 50-е годы)”, т. 1, ИПМ-96, Дубна, 14-18 мая 1996 г.
2. В.Е. Троцкий. О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., Т.16, N 3, 1976, с.793-797.
3. В.Е. Троцкий, Р.М. Шагалиев. Класс интерполяционно-инвариантных схем для численного решения уравнения теплопроводности. В сб. Вопросы атомной науки и техники. Серия: Методики и программы, Выпуск 3 (14). М., ЦНИАтоминформ, 1983, стр. 73-76.
4. Р.М. Шагалиев. Об одном устойчивом алгоритме раздельного счета по областям двумерного уравнения теплопроводности по узловой разностной схеме. – Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы, вып. 3 (17), М., ЦНИАтоминформ, 1984, с. 25-33.
5. А.А. Самарский. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1983.
6. Л.В. Канторович, В.И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. – М-Л: Физматгиз, 1962.
7. Г. Стренг, Дж. Фикс. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977.
8. В.Е. Троцкий, Р.М. Шагалиев. Консервативные узловые схемы методов конечных разностей и конечных элементов для двумерного уравнения теплопроводности. Сб. «Численные методы механики сплошной среды» Т.15, №4, Новосибирск, 1984, с.131-157.