



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. К. Демьянович, Об устойчивости проекционных методов,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1971, том 23, 7–15

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

23 января 2025 г., 10:53:19



ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Ю.К.Демьянович

Необходимые и достаточные условия устойчивости приближенных методов получил С.Г.Михлин [1]. Настоящая работа посвящена вопросу о выборе пространств, в которых удобно изучать устойчивость проекционных методов. Здесь дано обобщение построений, рассмотренных для проекционно-сеточных методов в случае эллиптических уравнений второго порядка в заметке [2].

В первом и втором пунктах изучаются вопросы об устойчивости уравнений с оператором, подчиненным некоторому условию коэрцитивности, и о разрешимости возмущенного уравнения. В третьем пункте рассмотрен вопрос о выборе пространств, в которых проекционный метод устойчив, а далее в пункте 4^о установлено, что в случае положительно определенного оператора все ортогональные проекционные методы устойчивы в энергетической метрике.

1^о Пусть на прямом произведении линейных пространств X_1 и X_{-1} определено внешнее скалярное произведение $(v, w), v \in X_1, w \in X_{-1}$. Рассмотрим банахово пространство X , норму в котором обозначим через $\|u\|$, $u \in X$. Пусть линейный оператор B действует из пространства X в пространство X_1 и имеет область определения $\mathcal{D}(B) \subset X$.

Рассмотрим линейал X_{-1}' элементов δ пространства X_{-1} для которых

$$\sup_{v \in \mathcal{D}(B)} \frac{|(\delta, Bv)|}{\|v\|} < +\infty.$$

Через N обозначим линейное пространство элементов δ из X_{-1}' таких, что

$$(\delta, Bv) = 0, \quad v \in \mathcal{D}(B),$$

и рассмотрим фактор-пространство

$$X_{-1, B}' = X_{-1}' / N$$

в котором норму определим равенством

$$\|\delta\|_B = \sup_{v \in \mathcal{D}(B)} \frac{|(\delta, Bv)|}{\|v\|} \quad (I.I)$$

Пусть линейные операторы A и Γ действуют из пространства X в пространство X_{-1} , а элементы f и d принадлежат пространству X_{-1} . Через $\|\Gamma\|_B$ обозначим норму оператора Γ , как оператора действующего из пространства X в $X_{-1,B}$.

Рассмотрим уравнения

$$Av = f, \quad (I.2)$$

$$(A + \Gamma)v = f + d. \quad (I.3)$$

Теорема I. Предположим, что справедливы неравенства

$$(Av, Bv) \geq \gamma \|v\|^2, \quad v \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B), \quad (I.4)$$

$$\|\Gamma\|_B < \gamma, \quad (I.5)$$

где γ положительная постоянная.

Пусть уравнения (I.2) и (I.3) имеют решения v_* и v'_* соответственно из линейала $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Тогда

$$\|v'_* - v_*\| \leq \gamma^{-1} (1 - \gamma^{-1} \|\Gamma\|_B)^{-1} (\|\Gamma\|_B \|v_*\| + \|d\|_B). \quad (I.6)$$

Доказательство. Из соотношений (I.2) - (I.3) после скалярного умножения на $B(v'_* - v_*)$ получим

$$(A(v'_* - v_*) + \Gamma v'_*, B(v'_* - v_*)) = (d, B(v'_* - v_*)), \quad (I.7)$$

так что в силу неравенства (I.4)

$$\|v'_* - v_*\| \leq \gamma^{-1} (\|\Gamma\|_B \|v'_*\| + \|d\|_B).$$

Теперь из неравенства

$$\|v'_*\| \leq \|v'_* - v_*\| + \|v_*\|$$

и из условия (I.5) получим соотношение (I.6).

Теорема доказана.

Замечание I. Пусть X_0 некоторое нормированное пространство; норму в X_0 обозначим через $\|\cdot\|_0$. Предположим, что $v'_*, v_* \in X_0$ и что справедливы неравенства

$$(Av, Bv) \geq \gamma \|v\| \cdot \|v\|_0, \quad v \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \cap X_0,$$

$$\|\Gamma\|_{0,B} < \gamma, \quad \|\Gamma\|_{0,B} \stackrel{\text{def}}{=} \|\Gamma\|_{[X_0 \rightarrow X_{-1,B}]}$$

Тогда из соотношения (I.7) легко получается оценка

$$\|v'_* - v_*\|_0 \leq \gamma^{-1} (1 - \gamma^{-1} \|\Gamma\|_{0,B})^{-1} (\|\Gamma\|_{0,B} \|v_*\| + \|\delta\|_B).$$

2° Перейдем к вопросу о разрешимости уравнения (I.3)

Теорема 2. Пусть справедливы неравенства (I.4) и (I.5). Предположим, что уравнение (I.2) разрешимо при любом $f \in X'_{-1}$

Тогда уравнение (I.3) однозначно разрешимо при любой правой части из пространства X_{-1} .

Доказательство. Разрешимость уравнения (I.2) при любом

$f \in X'_{-1}$ вместе с условием (I.4) означает существование оператора A^{-1} . Уравнение (3) эквивалентно уравнению

$$v + A^{-1} \Gamma v = w, \quad w \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1} (f + \delta). \quad (2.I)$$

Из неравенства (I.4) получим

$$\|A^{-1} \Gamma v\|^2 \leq \gamma^{-1} (\Gamma v, BA^{-1} \Gamma v),$$

так что

$$\|A^{-1} \Gamma v\| \leq \gamma^{-1} \|\Gamma v\|_B,$$

откуда в виду условия (I.5)

$$\|A^{-1} \Gamma\|_{[X \rightarrow X]} < 1.$$

Итак, уравнение (2.I), а вместе с ним и уравнение (I.3) однозначно разрешимы. Теорема доказана.

3° Пусть оператор \mathcal{O} действует из пространства X в X'_{-1} и непрерывно обратим. Пусть уравнение

$$\mathcal{O}u = f, \quad f \in X'_{-1} \quad (3.I)$$

решается проекционным методом: в пространствах X и X'_{-1} с внешним скалярным произведением $(u, u')_0, u \in X, u' \in X'_{-1}$, выделены подпространства $\tilde{X} \subset \mathcal{D}(\alpha)$ и \tilde{X}'_{-1} и задана операция проектирования P пространства X'_{-1} на \tilde{X} . Обозначим через $\theta(\alpha \tilde{X}, \tilde{X}'_{-1})$ раствор подпространств $\alpha \tilde{X}$ и \tilde{X}'_{-1} банахова пространства $X'_{-1, B}$.

Если выполнено условие Н.И.Польского

$$\theta(\alpha \tilde{X}, \tilde{X}'_{-1}) \leq \theta_0 < 1, \quad (3.2)$$

то норма решения \tilde{u}_* приближенной задачи

$$P\alpha \tilde{u} = Pf, \quad \tilde{u} \in \tilde{X}, \quad (3.3)$$

оценивается ([3], стр.198) через $\|f\|_{-1, B}$ и θ_0 ,

$$\|\tilde{u}_*\|_X \leq C_0, \quad C_0 = C_0(\|f\|_{-1, B}, \theta_0). \quad (3.4)$$

Обычно задачу (3.3) рассматривают в паре линейных пространств \bar{X} и \bar{X}'_{-1} , изоморфных пространствам \tilde{X} и \tilde{X}'_{-1} соответственно,

$$\Psi \bar{X} = \tilde{X}, \quad \gamma \bar{X}'_{-1} = \tilde{X}'_{-1};$$

здесь Ψ и γ заданные линейные изоморфизмы.

Если норму в пространстве \bar{X} и внешнее скалярное произведение между пространствами \bar{X} и \bar{X}'_{-1} ввести равенствами

$$\|v\|_{def} = \|\Psi v\|_X, \quad v \in \bar{X}, \quad (3.5)$$

$$(v', v'')_{def} = (\Psi v', \gamma v'')_0, \quad v' \in \bar{X}, \quad v'' \in \bar{X}'_{-1}, \quad (3.6)$$

то к задаче (3.3) можно применить теоремы I и 2, считая в этих теоремах, что

$$X_i = X = \bar{X}, \quad X'_{-1} = \bar{X}'_{-1},$$

$$(P' \alpha \Psi v, \gamma v_i) = (A v, v_i), \quad v \in \bar{X}, \quad v_i \in \bar{X}'_{-1},$$

и выбирая в качестве оператора B некоторый оператор, действующий в \bar{X} . Рассмотрим теперь семейство пар пространств (\bar{X}, \bar{X}'_{-1}) , зависящих от некоторого параметра h , и

соответствующее семейство приближенных задач вида (3.3). В семействе соответствующих пар пространств (\bar{X}, \bar{X}_{-1}) , получается семейство уравнений вида (1.2), которое будем называть методом приближенного решения задачи (3.1).

Определение. Пусть рассматривается семейство уравнений вида (1.2). Будем говорить, что метод приближенного решения (1.2) B - устойчив в метриках (3.5) - (3.6), если для решений v_* и v_*' уравнений (1.2) и (1.3) соответственно справедлива оценка

$$\|v_*' - v_*\| \leq C_1 \|\Gamma\|_B + C_2 \|\delta\|_B,$$

где C_1 и C_2 не зависящие от h константы.

Замечание 2. Из определения ясно, что понятие B - устойчивости зависит не только от оператора B , но и от фигурирующих в рассмотрении пространств \bar{X} и \bar{X}_{-1} .

Из предыдущего вытекает

Теорема 3. Пусть справедливы неравенства (1.4) и (3.2), а фигурирующие там числа C и θ_0 не зависят от h . Тогда приближенный метод (1.2) B - устойчив.

4° Пусть в гильбертовом пространстве H действует положительно определенный самосопряженный оператор \mathcal{A} ,

$$(\mathcal{A}u, u)_0 \geq \gamma(u, u)_0, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \gamma > 0. \quad (4.1)$$

За X примем энергетическое пространство $H_{\mathcal{A}}$ оператора \mathcal{A} . Пусть \bar{X} подпространство в X , а \tilde{X} изоморфное ему линейное подпространство,

$$\Psi \bar{X} = \tilde{X};$$

здесь через Ψ обозначен линейный изоморфизм. Определим норму, скалярное произведение и оператор A в пространстве \bar{X} равенствами

$$\|v\|_{\bar{X}} = \|\Psi v\|_{H_{\mathcal{A}}}, \quad (v, v_1)_{\bar{X}} = (\Psi v, \Psi v_1)_0, \quad (4.2)$$

$$(Av, v)_{\bar{X}} = \|\Psi v\|_{H_{\mathcal{A}}}^2, \quad v, v_1 \in \bar{X}. \quad (4.3)$$

Для решения уравнения

$$\mathcal{A}u = f, \quad f \in H, \quad (4.4)$$

построим приближенный метод вида (1.2) из задачи на минимум функционала энергии оператора \mathcal{A} на подпространстве \bar{X} .

Всякий такой метод в дальнейшем будем называть ортогональным проекционным методом. Таким образом, метод Рунге, проекционно-сеточные методы [4] и различные проекционные методы прямых [4] являются ортогональными проекционными методами. Известно [5], что для решения u_* так построенного уравнения (1.2) справедливо неравенство

$$\| \Psi v_* \| \leq \| u_* \| ,$$

где u_* - решение задачи (4.4), откуда

$$\| v_* \| \leq \| u_* \|_{H_\alpha} . \quad (4.5)$$

Из формул (4.2) - (4.3) имеем

$$(Av, v) = \| v \|^2 . \quad (4.6)$$

Опять рассмотрим семейство подпространств \tilde{X} и семейство соответствующих приближенных уравнений (2.1). Через \tilde{I} обозначим тождественный оператор в пространстве \tilde{X} . Соотношения (4.5) и (4.6) в соответствии с теоремами 1 и 2 приводят к следующему утверждению.

Теорема 4. Ортогональные проекционные методы \tilde{I} - устойчивы в метриках, задаваемых формулами (4.2).

Замечание 3. Для метода сеток в случае эллиптических уравнений в частных производных второго порядка этот результат установлен в заметке [2], а для сеточных методов в эллиптических задачах высшего порядка отмечен в работе [4].

Замечание 4. Можно рассмотреть устойчивость ортогональных проекционных методов для уравнений вида

$$Au + Tu = f, \quad \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(T),$$

(см. [2], где это сделано для задач, упомянутых в замечании 3).

Замечание 5. Нормы, определяемые равенствами (4.2) - (4.3), обычно не удобны для практического использования. Поэтому возникает вопрос о построении удобных норм, эквивалентных нормам (4.2) - (4.3). Для случаев, указанных в замечании 3, это выполнено в работах [2] и [4].

5° Теперь рассмотрим устойчивость в задаче Коши

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t), \quad v(0) = v_0, \quad 0 < t \leq T. \quad (5.1)$$

Для краткости ограничимся случаем самосопряженного положительно определенного и независящего от переменной t оператора A в гильбертовом пространстве H ; $f, v_0 \in H$.

Наряду с задачей (5.1) рассмотрим задачу с возмущениями

оператора Γ , правой части δ и начального условия γ ,

$$\frac{dv}{dt} + (A + \Gamma(t))v = f(t) + \delta(t), \quad v(0) = v_0 + \gamma, \quad (5.2)$$

Пусть v_* и v_{**} решения задач (5.1) и (5.2) соответственно. Тогда разность $w = v_{**} - v_*$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{dw}{dt} + Aw + \Gamma(t)v_{**} = \delta, \quad w(0) = \gamma. \quad (5.3)$$

Рассмотрим функцию $\varphi(\tau, t)$ вещественных переменных τ, t заданную в полушлоскости $\{-\infty < \tau < +\infty, t > 0\}$ формулой

$$\varphi(\tau, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{-t} & \text{при } \tau \leq 0, \\ \max\left\{1, \left(\frac{\tau}{te}\right)^\tau\right\} & \text{при } \tau > 0. \end{cases}$$

Пусть $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — вещественные числа.

При $t > 0$ легко получить неравенство

$$\begin{aligned} \|A^\alpha w(t)\|^2 &\leq |(A^{\alpha-\alpha_1} e^{-At} A^{\alpha_1} \gamma, A^\alpha w(t))| + \\ &+ \int_0^t |(A^{\alpha-\alpha_2} e^{-(t-s)A} A^{\alpha_2} \delta, A^\alpha w(t))| ds + \\ &+ \int_0^t |(A^{\alpha+\alpha_3} e^{-(t-s)A} A^{-\alpha_3} \Gamma(s) A^{-\alpha} A^{\alpha_4} v_{**}(s), A^\alpha w(t))| ds, \end{aligned}$$

так что используя почти очевидное соотношение

$$\|A^\tau e^{-At}\| \leq \varphi(\tau, t),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \|A^\alpha w(t)\| &\leq \varphi(\alpha-\alpha_1, t) \|A^{\alpha_1} \gamma\| + \int_0^t \varphi(\alpha-\alpha_2, t-s) \|A^{\alpha_2} \delta(s)\| ds + \\ &+ \int_0^t \varphi(\alpha+\alpha_3, t-s) \|A^{-\alpha_3} \Gamma(s) A^{-\alpha}\| \cdot \|A^{\alpha_4} v_{**}(s)\| ds. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Теперь в виду неравенства

$$\|A^{\alpha} v_{**}^{\alpha}(s)\| \leq \|A^{\alpha}(v_{**}^{\alpha} - v_{*}^{\alpha})(s)\| + \|A^{\alpha} v_{*}^{\alpha}(s)\|$$

из формулы (5.4) получим

$$\begin{aligned} \|A^{\alpha} w(t)\| &= \int_0^t \Psi(\alpha + \alpha_3, t-s) \|A^{-\alpha_3} \Gamma(s) A^{-\alpha}\| \|A^{\alpha} w(s)\| ds \leq \\ &\leq \Psi(\alpha - \alpha_1, t) \|A^{\alpha_1} \gamma\| + \int_0^t \Psi(\alpha - \alpha_3, t-s) \|A^{\alpha_2} \delta(s)\| ds + \\ &+ \int_0^t \Psi(\alpha + \alpha_3, t-s) \|A^{-\alpha_3} \Gamma(s) A^{-\alpha}\| \|A^{\alpha} v_{*}^{\alpha}(s)\| ds. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Пусть B_1 и B_2 банаховы пространства вещественных функций $\Psi(t)$ одной переменной, определенных на промежутке $[0, T]$, причем $B_1 \subset B_2$. Норму в пространстве B_1 обозначим через $|\Psi|_1$, $\Psi \in B_1$, а норму в пространстве B_2 — через $|\Psi|_2$, $\Psi \in B_2$. Предположим, что нормы в пространствах B_1 и B_2 монотонны: если $0 \leq \Psi_1 \leq \Psi_2$, $\Psi_s \in B_k$, $s=1,2$, то $|\Psi_1|_k \leq |\Psi_2|_k$, где $k=1,2$.

Рассмотрим интегральный оператор

$$K\Psi = \int_0^t \Psi(\alpha + \alpha_3, t-s) \|A^{-\alpha_3} \Gamma(s) A^{-\alpha}\| \Psi(s) ds,$$

как оператор из пространства B_1 в пространство B_2 .

Из неравенства (5.5) вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть оператор $I-K$ имеет положительный [3] левый обратный. Тогда

$$\begin{aligned} \| \|A^{\alpha} w(t)\| \|_1 &\leq C_0 \{ |\Psi(\alpha - \alpha_1, t)|_2 \|A^{\alpha_1} \gamma\| + \\ &+ | \int_0^t \Psi(\alpha - \alpha_2, t-s) \|A^{\alpha_2} \delta(s)\| ds |_2 + \end{aligned}$$

$$+ \left| \int_0^t \gamma(\alpha + \alpha_3, t-s) \|A^{-\alpha_2} \Gamma(s) A^{-\alpha}\| \cdot \|A^{\alpha} v_2(s)\| ds \right|_2,$$

где константа C определяется оператором K и пространствами B_1 и B_2 .

Замечание. Если $\alpha + \alpha_3 < 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $\|A^{-\alpha_2} \Gamma(s) A^{-\alpha}\| < \varepsilon$ условия теоремы 5 выполнены.

Литература

- 1 Михлин С.Г. Об устойчивости некоторых вычислительных процессов, ДАН, 1964, 157, №, 271-273.
- 2 Демьянович Ю.К. Устойчивость метода сеток для эллиптических задач, ДАН, 1965, 164, №1, 20-23.
- 3 Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений, М., "Наука", 1969.
- 4 Демьянович Ю.К. Об оценках скорости сходимости некоторых проекционных методов решения эллиптических уравнений. Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1968, 8, №1, 79-96.
- 5 Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов, М., "Наука", 1966.