Минимальные жесткие укладки домино

Д.ЕФИМОВ

ПРОСМАТРИВАЯ АРХИВ ЖУРНАЛа «Квант», автор нашел в одном из номеров следующую задачу И.Ф.Акулича [1].

Задача. *«Дорожная» шахматная доска имеет небольшой бортик по границам игрового поля, не позволяющий фигурам соскальзывать. Имеется также полный комплект из 28 домино, каждая кость которого покрывает ровно две соседние клетки доски. Можно ли уложить комплект домино на такой доске так, чтобы ни одну из костей нельзя было сдвинуть с места в плоскости доски?*

Если считать, что условие неподвижности домино в плоскости доски равносильно тому, что ни одна костяшка не примыкает своей короткой стороной к пустой клетке и не примыкает длинной стороной к двум смежным пустым клеткам, то, подумав немного, можно дать положительный ответ на вопрос задачи, например в виде, представленном на рисунке 1. Клетки доски, не закрытые доминошками, обозначены здесь голубым цветом.

Возникает естественный вопрос: можно ли улучшить этот результат, т.е. можно ли использовать меньшее количество домино? А каким будет решение при другом размере доски? В данной статье мы постараемся ответить на эти вопросы.

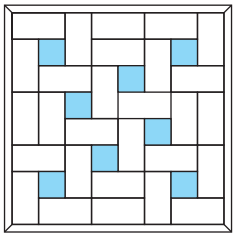

Рис. 1. Решение задачи о «дорожной» шахматной доске и домино

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20240401

Жесткие укладки и их свойства

Введем некоторые общие определения. Рассмотрим квадратную доску размера $n \times n$ клеток. Предположим, что множество $m \le n^2/2$ домино расположено на данной доске без наложений друг на друга так, что каждое домино закрывает ровно две соседние клетки. Назовем такое расположение *укладкой*. При этом некоторые клетки доски могут остаться незакрытыми. Назовем такие клетки *дырками*. Будем говорить, что укладка домино является *жесткой*, если ни одна из костяшек домино не примыкает своей короткой стороной к дырке и не примыкает длинной стороной к двум смежным дыркам (рис. 2).

Рис. 2. Невозможные взаимные расположения дырок и домино при жесткой укладке

Вполне очевидно, что если $n = 1$, то укладка является жесткой тогда и только тогда, когда каждая дырка ограничена доминошками так, как указано на рисунке 3.

Жесткую укладку назовем *минимальной*, если она содержит минимально возможное число домино для заданного раз-

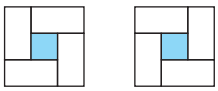

Рис. 3. Необходимое и достаточное условие жесткой укладки

мера доски. Понятно, что жесткая укладка является минимальной тогда и только тогда, когда она содержит максимально возможное количество дырок для заданного размера доски. Нас будет интересовать построение минимальных жестких укладок домино для разных размеров квадратных досок. Принимая во внимание вышесказанное, мы можем переформулировать данную задачу в духе проблем покрытия и упаковки [2, 3]:

Разместите на доске размера $n \times n$ клеток как можно больше 3×3-фигур, образованных четырьмя 2×1-костяшками домино и одной 1×1-дыркой (см. рис. 3); при этом допускается пересечение двух фигур по одной костяшке, а все незамощенные данными фигурами клетки доски должны быть полностью замощены домино.

Часть доски, состоящую из всех ее клеток за исключением клеток, расположенных вдоль краев, назовем *ядром*. Так, у доски размера 2×2 нет ядра, а ядро доски размера 3×3 состоит из одной центральной клетки. Из вышесказанного следует, что при жесткой укладке дырки могут находиться только в ядре доски.

Нетрудно видеть, что взаимные расположения двух дырок, показанные на рисунке 4, с точностью до поворота на 90 градусов, невозможны при жесткой укладке. Отсюда следует, что любая область доски, представляющая собой квадрат размера 2×2, содержит не более одной дырки, а любая область доски, представляющая собой квадрат размера 3×3, содержит не более двух дырок при жесткой укладке.

Упражнение 1. Укажите фигуры, состоящие из 5 клеток (не обязательно смежных по сторонам), такие, что любая область доски, представляющая собой данные фигуры, содержит не более одной дырки при жесткой укладке.

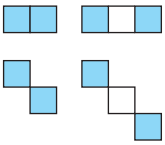

Рис. 4. Взаимные расположения двух дырок, невозможные при жесткой укладке

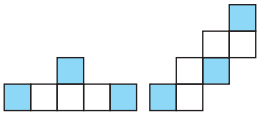

Рис. 5. Взаимные расположения трех дырок, невозможные при жесткой укладке

Существуют также некоторые запреты на взаимные расположения трех дырок при жесткой укладке, даже если пары дырок расположены допустимо. Два таких невозможных расположения показаны на рисунке 5, с точностью до поворота на $\pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Если при укладке доминошек на доску получились такие расположения дырок, то по крайней мере одна доминошка будет примыкать короткой стороной к дырке. Принимая данный факт во внимание, с помощью небольшого перебора можно показать, что любая область доски, представляющая собой прямоугольник размера 5×2 или 2×5, содержит не более двух дырок, а любая область доски, представляющая собой прямоугольник размера 5×3 или 3×5, содержит не более трех дырок при жесткой укладке.

Упражнение 2. Укажите фигуры, состоящие из 11 и 12 клеток, такие, что любая область доски, представляющая собой данные фигуры, содержит не более двух дырок при жесткой укладке.

В заключение данного раздела приведем вполне очевидное, но полезное утверждение.

Утверждение 1. *Четность числа дырок, содержащихся в жесткой укладке доски $n \times n$, совпадает с четностью n.*

Жесткие укладки досок малых размеров

Начнем с минимального размера доски, на которой можно расположить хотя бы одно домино, т.е. с доски 2×2. Очевидно, что такая доска допускает всего две жесткие укладки, представляющие собой пару смежных доминошек, расположенных вертикально или горизонтально.

Доска размера 3×3 также допускает всего две жесткие укладки. Они представлены на рисунке 3.

Используя утверждение 1, можно легко проверить, что любая (следовательно, и минимальная) жесткая укладка доски 4×4 не содержит дырок. Действительно, ядро такой доски представляет из себя квадрат размера 2×2. Минимальным положительным четным числом является 2, но, как мы знаем, квадрат 2×2 при жесткой укладке не может содержать более одной дырки.

Аналогично можно показать, что любая жесткая укладка доски 5×5 содержит ровно одну дырку. Действительно, ядро такой доски является квадратом 3×3, который, как мы знаем, может содержать не более двух дырок при жесткой укладке. Но в силу утверждения 1 любая жесткая укладка доски 5×5 не может не содержать дырок и не может содержать две дырки. Остается единственная возможность – жесткая укладка с одной дыркой, которая автоматически будет и минимальной. Примеры таких укладок показаны на рисунке 6. Отметим, что здесь показаны все

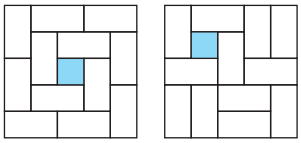

Рис. 6. Минимальные жесткие укладки доски 5×5

возможные с точностью до поворота на $\pi k/2$, $k\in\mathbb{Z}$, варианты размещения дырки. Доказать это можно с помощью метода раскраски [4, 5]. Занумеруем все клетки доски в шахматном порядке числами 1 и 2 (рис. 7, ядро взято в рамку). В результате получим 13 клеток с 1 и 12 клеток с 2. Каждое домино закрывает ровно одну клетку с 1 и одну клетку с 2. Поэтому число закрытых клеток с 1 и 2 должно быть одинаковым. Таким образом, при жесткой укладке дырка может быть только в клетке с 1.

1	2	1	2	1
2	1	2	1	2
1	2	1	2	1
2	1	2	1	2
1	2	1	2	1

Рис. 7. Метод раскраски

До сих пор минимальные жесткие укладки рассматриваемых досок поочередно или не содержали дырок, или содержали всего одну дырку. Случай доски 6×6 нарушает эту закономерность.

Упражнение 3. Покажите, что минимальная жесткая укладка доски 6×6 содержит ровно 4 дырки. Приведите различные примеры таких укладок.

Правосторонний конь

Прежде чем приступить к общему случаю, рассмотрим новую шахматную фигуру, которую назовем *правосторонним конем*. От обычного шахматного коня он отличается тем, что его ход состоит в передвижении на две клетки по строке или по столбцу доски, а затем на одну клетку вправо (рис. 8). Назовем множество всех

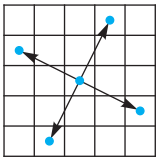

Рис. 8. Допустимые ходы правостороннего коня

клеток доски, в которые может попасть правосторонний конь, стартуя с некоторой данной клетки, *путем коня*, а каждую отдельную клетку пути *следом коня*. Здесь и далее мы будем использовать следующую нумерацию клеток доски: клетку, находящуюся на пересечении i-го столбца доски (начиная слева) и j-й строки доски (начиная снизу) обозначим через (i, j). Например, рисунок 9 показывает клетки доски 8×8, в которые может попасть пра-

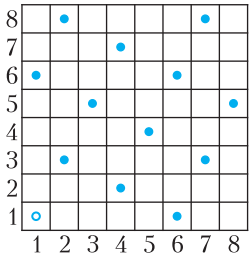

Рис. 9. Путь правостороннего коня на доске 8×8

восторонний конь, начиная, скажем, с клетки $(1, 1)$.

В связи с фигурой правостороннего коня возникает много математических задач. Рассмотрим некоторые из них. Из определения следует, что если правосторонний конь может попасть из клетки (i, j) в клетку (k, l), то он может совершить и обратный переход из клетки (k, l) в клетку (i, j). Нетрудно также заметить, что следы коня расположены периодически по строкам, столбцам и диагоналям доски с интервалом в 5 клеток. Поэтому имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2. *Число различных путей правостороннего коня на доске размера $n \times n$, $n \geq 5$, равно пяти. При этом каждый путь проходит ровно один раз через каждые последовательные 5 клеток в строках, столбцах и диагоналях доски.*

Рассмотрим теперь вопрос о числе следов правостороннего коня на данном пути.

Утверждение 3. *Число следов правостороннего коня на любом пути на доске размера $n \times n$, $n \geq 5$, равно $\lfloor n^2/5 \rfloor$ или $\lceil n^2/5 \rceil$ (здесь $\lfloor\ \rfloor$ и $\lceil\ \rceil$ обозначают, соответственно, округление вниз и вверх до ближайшего целого).*

Доказательство. Пусть дана доска размера $n \times n$, $n \geq 5$. Предположим, что правосторонний конь стартует с клетки $(1, 1)$. Тогда с учетом периодичности он оставит $\lceil n/5 \rceil$ следов в первой строке. И на доске имеется $\lceil n/5 \rceil$ строк с таким же расположением следов. Первый слева след коня во второй строке будет находиться в четвертом столбце. Поэтому во второй строке конь оставит всего $\lceil (n-3)/5 \rceil$ следов, а на доске имеется $\lceil (n-1)/5 \rceil$ строк с таким же расположением следов. Аналогично, в третьей строке будет оставлено $\lceil (n-1)/5 \rceil$ следов коня, и на доске имеется $\lceil (n-2)/5 \rceil$ аналогичных строк. В четвертой строке количество следов равно $\lceil (n-4)/5 \rceil$ и на доске имеется $\lceil (n-3)/5 \rceil$ аналогичных строк. Наконец, количество следов в пятой строке равно $\lceil (n-2)/5 \rceil$, а количество аналогичных строк на доске равно $\lceil (n-4)/5 \rceil$. Все последующие строки будут совпадать с одной из первых пяти с точки зрения расположения в них следов. Таким образом, общее число следов коня на доске в данном случае равно следующему значению:

$$S_1 = \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil^2 + \left\lceil \frac{n-3}{5} \right\rceil \left\lceil \frac{n-1}{5} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{5} \right\rceil \left\lceil \frac{n-2}{5} \right\rceil +$$
$$+ \left\lceil \frac{n-4}{5} \right\rceil \left\lceil \frac{n-3}{5} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-2}{5} \right\rceil \left\lceil \frac{n-4}{5} \right\rceil =$$
$$= \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil^2 + \left(\left\lceil \frac{n-1}{5} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-4}{5} \right\rceil \right) \left(\left\lceil \frac{n-2}{5} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-3}{5} \right\rceil \right).$$

Подставляя вместо n последовательные значения $n = 5k$, $5k + 1$, …, $5k + 4$, получаем, что S_1 равно $\lfloor n^2/5 \rfloor$ или $\lceil n^2/5 \rceil$ в зависимости от n.

Аналогичный результат мы получим, если конь стартует с клеток $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$ и $(5, 1)$. Проверку этих фактов мы оставляем читателям в качестве упражнения. В силу утверждения 2 этого достаточно, чтобы завершить доказательство.

Вполне очевидно, что такие же результаты справедливы и для левостороннего коня.

Основной результат

В данном разделе мы докажем наш основной результат, касающийся числа дырок и доминошек в минимальной жесткой укладке произвольной доски размера $n \times n$, $n \geq 2$, а также приведем общий метод построения минимальных жестких укладок.

Обозначим через $D_{\min}(n)$ минимальное число доминошек, а через $H_{\max}(n)$ максимальное число дырок в жестких укладках на доске размера $n \times n$. Очевидно, что эти величины связаны друг с другом следующим соотношением:

$$D_{\min}(n) = \frac{n^2 - H_{\max}(n)}{2}. \qquad (1)$$

Теорема. *Максимальное число дырок в жесткой укладке дается следующим равенством:*

$$H_{\max}(n)=\begin{cases}\left\lfloor\dfrac{(n-2)^2}{5}\right\rfloor, & n\equiv 0,2,4\pmod 5;\\ \left\lceil\dfrac{(n-2)^2}{5}\right\rceil, & n\equiv 1,3\pmod 5.\end{cases}\qquad(2)$$

Доказательство. Минимальные жесткие укладки досок размера $n\times n$, $2\le n\le 6$, мы уже рассмотрели и можно непосредственно проверить, что для них данная теорема выполняется. В дальнейшем для удобства рассмотрим доску размера $(n+2)\times(n+2)$, предполагая, что $n\ge 5$. Ядро такой доски имеет размер $n\times n$. Расположим в ядре дырки в соответствии со следами некоторого пути правостороннего коня. Затем замостим доминошками клетки доски, окружающие дырки, так, как указано на рисунке 10. После этого кроме клеток,

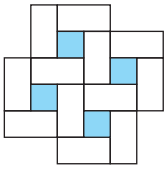

Рис. 10. Замощение клеток, окружающих дырки

«забронированных» под дырки, незамощеными останутся только некоторые клетки на границе доски и, возможно, некоторые клетки в углах ядра. При этом, как мы знаем, между двумя соседними дырками в строках и столбцах будет промежуток в 4 клетки. Пусть две соседние дырки на границе ядра имеют координаты $(k,n+1)$ и $(k+5,n+1)$. Тогда две клетки с координатами $(k+2,n+2)$ и $(k+3,n+2)$ на границе доски остаются незамощеными. Их можно замостить одной доминошкой (рис. 11).

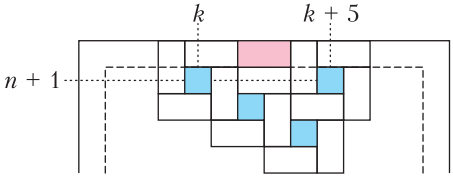

Рис. 11. Укладка на границе доски

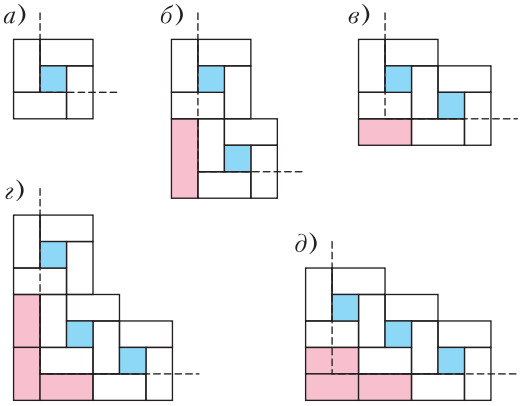

Рис. 12. Возможные взаимные расположения дырок в углах доски

Проведя такое замощение вдоль всей границы доски, мы оставим незамощеными только клетки в углах доски. Нетрудно видеть, что возможны только 5 вариантов расположения дырок в углах доски с точностью до поворота на $\pi k/2$, $k\in\mathbb{Z}$. Все они изображены на рисунке 12 (пунктирная линия показывает границу ядра доски). Во всех случаях, кроме б), клетки доски, оставшиеся незамощеными, могут быть полностью замощены доминошками.

Пусть $n=5k$. Тогда нетрудно видеть, что если мы начнем располагать дырки на доске, начиная с клетки $(2,2)$, то углы доски будут соответствовать типам а), в), г), д) (рис. 13). Так как тип углов однозначно определяется любым из данных углов, то мы будем иметь аналогичную ситуацию, если начнем размещать дырки, начиная с клеток $(4,2)$, $(5,2)$ и $(6,2)$.

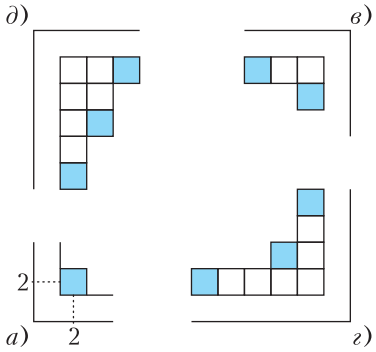

Рис. 13. Расположение дырок в углах доски при n = 5k

Таким образом, в данном случае мы сможем построить жесткую укладку.

Аналогично можно показать, что в случаях $n = 5k + p$, $p = 1, 2, 3, 4$, жесткие укладки рассматриваемого типа также существуют. Точную проверку этого утверждения мы опять же оставляем читателям в качестве упражнения. При этом, в силу утверждения 2, число дырок во всех этих укладках будет не менее $\lfloor n^2/5 \rfloor$.

Таким образом, мы показали, что $H_{\max}(n+2) \geq \lfloor n^2/5 \rfloor$. Покажем теперь, что $H_{\max}(n+2) \leq \lceil n^2/5 \rceil$. Пусть дана доска размера $10k \times 10k$, $k \in \mathbb{N}$, соответственно ее ядро будет иметь размер $(10k-2)\times(10k-2)$. Ядро такого размера можно замостить $(10k-1)(2k-1)$ прямоугольниками размера 2×5, $2k-1$ прямоугольниками размера 5×3 и одним квадратом 3×3. Например, ядро размера 8×8 можно замостить так, как показано на рисунке 14. Вспоминая

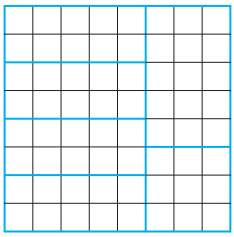

Рис. 14. Замощение ядра 8×8 *прямоугольниками и квадратом*

ограничения на количества дырок в таких прямоугольниках и квадрате при жестких укладках, получаем, что любая жесткая укладка доски $10k \times 10k$ содержит не более

$$2(5k-1)(2k-1)+3(2k-1)+2 = \\ = \lceil (10k-2)^2/5 \rceil$$

дырок. Аналогично можно показать, что число дырок в любой жесткой укладке доски $(10k+p)\times(10k+p)$, $k \in \mathbb{N}$, $p = 1, 2, \ldots, 9$, не превосходит $\lceil (10k+p-2)^2/5 \rceil$, а также показать, что $H_{\max}(7) \leq 5$, $H_{\max}(8) \leq 8$, $H_{\max}(9) \leq 10$. Проверку оставляем читателям в качестве упражнения.

Таким образом, $\lfloor n^2/5 \rfloor \leq H_{\max}(n+2) \leq \lceil n^2/5 \rceil$. Принимая во внимание утверждение 1, получаем

$$H_{\max}(n+2) = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{n^2}{5} \right\rfloor, & n \equiv 0,2,3 \pmod 5; \\ \left\lceil \dfrac{n^2}{5} \right\rceil, & n \equiv 1,4 \pmod 5, \end{cases}$$

что эквивалентно утверждению теоремы.

В завершение вернемся к задаче, которая открывает нашу статью. Подставляя $n = 8$ в формулы (1), (2), получаем $H_{\max}(8) = 8$, $D_{\min}(8) = 28$. Таким образом, для минимальной жесткой укладки стандартной шахматной доски требуется в точности полный набор костяшек домино и предложенное решение является оптимальным.

Заключение

Мы разобрали задачу о минимальной жесткой укладке домино на доске $n \times n$. Ее можно рассматривать как любопытную головоломку, но, возможно, приведенные здесь объекты и понятия со временем смогут найти приложения и за пределами занимательной математики. Естественным образом возникают обобщения этой задачи. Можно вместо доминошек брать плоские фигурки другой формы и размера. Можно вместо квадратных досок использовать доски другой формы. Наконец, можно попробовать перейти в другую размерность и рассмотреть жесткие укладки «кирпичей» в «ящиках».

Литература

1. *И.Акулич*. Конкурс «Математика 6–8». – «Квант», 1991, № 10.

2. *Н.Панюнин*. Упаковки и покрытия. – «Квант», 2019, № 8.

3. *P.G.Szabo, M.Cs.Markot, T.Csendes, E.Specht, L.G.Casado, I.Garcia*. New Approaches to Circle Packing in a Square. – Springer, 2007.

4. *С.Табачников, Д.Фукс*. Невозможные замощения. — «Квант», 2011, № 2.

5. *F.Ardila, R.P.Stanley*. Tilings. — arXiv:math/0501170.