С. Дориченко, Л. Медников, А. Семенов, А. Шаповалов, XXXVII Турнир городов, *Квант*, 2016, номер 1, 56–57

6. Однородный стержень длиной 2 м, двигаясь вдоль своей длины по шероховатой горизонтальной поверхности, начинает пересекать границу, за которой поверхность становится гладкой. Скорость стержня в этот момент равна 1,6 м/с. Какое расстояние проедет стержень от этого момента до остановки, если коэффициент трения о шероховатую поверхность 0,2?

7. С наклонной плоскости, образующей угол 45° с горизонтом, с высоты 1 м соскальзывает небольшая шайба. В конце спуска у основания наклонной плоскости шайба абсолютно упруго ударяется о стенку и поднимается вверх по наклонной плоскости. На какую высоту поднимется шайба после удара, если коэффициент трения шайбы о плоскость 0,25?

8. Два одинаковых тела массами по 5 кг соединены недеформированной пружиной жесткостью 15 Н/м и лежат на горизонтальном полу. Какую минимальную скорость, направленную вдоль оси пружины, надо сообщить одному из тел, чтобы оно сдвинуло другое тело? Коэффициент трения для каждого тела 0,1.

9. На гладком полу находится доска массой 1,5 кг, на которой лежит брусок массой 490 г. В брусок попадает и застревает в нем пуля массой 10 г, летящая горизонтально вдоль доски со скоростью 100 м/с. На какое расстояние сместится брусок вдоль доски, если коэффициент трения между ними 0,5?

ОЛИМПИАДЫ

XXXVII Турнир городов

Задачи осеннего тура (2015 год)

Базовый вариант

8–9 классы

1 (4)[1]. Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1?

Е.Бакаев

2 (4). Из одинаковых неравнобедренных прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?

Е.Бакаев

3 (5). Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.

Е.Бакаев

4 (5). На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отметили точки K и L соответственно, а на гипотенузе AB – точку M так, что $AK = BL = a$, $KM = LM = b$ и угол KML прямой. Докажите, что $a = b$.

Е.Бакаев

5. В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов A и $Б$ перелет из A в $Б$ стоит столько же, сколько перелет из $Б$ в A. Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если:

а) (3) $m = 99$;
б) (3) $m = 100$?

Е.Бакаев

10–11 классы

1 (3). Пусть p – простое число. Сколько существует таких натуральных n, что pn делится на $p + n$?

Б.Френкин

2 (4). Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC и прямоугольный треугольник ABD с общей гипотенузой AB (D и C лежат по одну сторону от прямой AB). Пусть DK – биссектриса в треугольнике ABD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ACK лежит на прямой AD.

Е.Бакаев, А.Зимин

3 (4). См. задачу 3 для 8–9 классов.

4. а) (2) См. задачу 5,а для 8–9 классов.
б) (2) См. задачу 5,б для 8–9 классов.

5 (5). Дана бесконечно возрастающая арифметическая прогрессия. Первые ее несколько членов сложили и сумму объявили первым членом новой последовательности, затем сложили следующие несколько членов исходной прогрессии и сумму объявили вторым членом новой последовательности и так далее. Могла ли новая последовательность оказаться геометрической прогрессией?

Г.Жуков

Сложный вариант

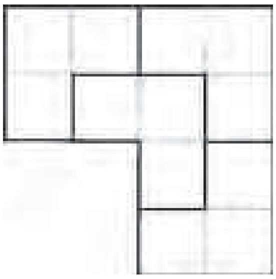
8–9 классы

1. Будем называть клетчатый многоугольник *выдающимся*, если он не является прямоугольником и из нескольких его копий можно сложить подобный ему многоугольник. Например, уголок из трех клеток – выдающийся многоугольник (это видно из рисунка на с. 57).

а) (2) Придумайте выдающийся многоугольник из 4 клеток.

---

[1] В скобках после номера задачи указано максимальное число баллов, присуждавшихся за ее решение. Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.



б) (3) При каких $n > 4$ существует выдающийся многоугольник из n клеток?

Е.Бакаев

2. а) (2) См. задачу М2406,а «Задачника «Кванта».

б) (4) См. задачу М2406,б «Задачника «Кванта».

3. Докажите, что сумма длин любых двух медиан произвольного треугольника:

а) (3) не больше $3P/4$, где P – периметр этого треугольника;

б) (5) не меньше $3p/4$, где p – полупериметр этого треугольника.

Л.Емельянов

4 (8). См. задачу М2409 «Задачника «Кванта».

5 (8). См. задачу М2408 «Задачника «Кванта».

6. а) (3) См. задачу М2411,а «Задачника «Кванта».
б) (7) См. задачу М2411,б «Задачника «Кванта».

7 (10). У Деда Мороза было n сортов конфет, по k штук каждого сорта. Он распределил все конфеты как попало по k подаркам, в каждый – по n конфет, и раздал их k детям. Дети решили восстановить справедливость. Два ребенка готовы передать друг другу по конфете, если каждый получает конфету сорта, которого у него нет. Всегда ли можно организовать серию обменов так, что у каждого окажутся конфеты всех сортов?

М.Евдокимов

10—11 классы

1 (3). Геометрическая прогрессия состоит из 37 натуральных чисел. Первый и последний члены прогрессии взаимно просты. Докажите, что 19-й член прогрессии является 18-й степенью натурального числа.

Б.Френкин

2 (6). Дан клетчатый квадрат 10×10. Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.

П.Кожевников

3 (7). См. задачу М2407 «Задачника «Кванта».

4 (7). См. задачу М2410 «Задачника «Кванта».

5. а) (2) См. задачу М2411,а «Задачника «Кванта».
б) (6) См. задачу М2411,б «Задачника «Кванта».

6. Арбуз имеет форму шара диаметра 20 см. Вася сделал длинным ножом три взаимно перпендикулярных плоских надреза глубиной h (надрез – это сегмент круга, h – высота сегмента, плоскости надрезов попарно перпендикулярны). Обязательно ли при этом арбуз разделится хотя бы на два куска, если:

а) (6) $h = 17$ см;
б) (6) $h = 18$ см?

М.Евдокимов

7 (12). См. задачу М2413 «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовили С.Дориченко, Л.Медников, А.Семенов, А.Шаповалов

Евклид и неприводимые многочлены

Начало см. на с. 50)

Упражнения

8. Опишите все многочлены f из $\mathbb{Z}[x]$, для которых $\tilde{f}$ – нулевой многочлен.

9. Найдите количество многочленов f из $\mathbb{Z}[x]$ со старшим коэффициентом 1 таких, что все коэффициенты f по модулю не превосходят 10 и $\tilde{f}(x) = x^5 + x^2 + 1$.

Отображение $f \to \tilde{f}$ хорошо тем, что сохраняет операции суммы и произведения (такие отображения в алгебре называют *гомоморфизмами*), т.е. $\widetilde{f+g} = \tilde{f} + \tilde{g}$ и $\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$ (в правой части первого равенства имеется в виду сложение «по модулю» 2).

Упражнение 10. Докажите эти равенства.

Имея в виду отображение $f \to \tilde{f}$, можно сказать, что $\mathbb{Z}_2[x]$ – черно-белая фотография цветного мира $\mathbb{Z}[x]$.

При отображении $f \to \tilde{f}$ неприводимый многочлен может стать приводимым и наоборот; скажем, для $f(x) = x(2x+1)$ имеем $\tilde{f}(x) = x$, а для $g(x) = x^2 + 1$ имеем $\tilde{g}(x) = x^2 + 1 = (x+1)^2$. Но если ограничиться многочленами со старшим коэффициентом 1, имеет место простая, но важная для нас лемма.

Лемма о сохранении приводимости. *Пусть f – приводимый многочлен над $\mathbb{Z}$ со старшим коэффициентом 1, тогда $\tilde{f}$ – приводимый многочлен над $\mathbb{Z}_2$.*

Доказательство. Так как $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ приводим, то $f = gh$, где g и h – многочлены с целыми коэффициентами степеней k и l, $0 < k < n$, $0 < l < n$, $k + l = n$. Старшие коэффициенты многочленов g и h должны равняться ± 1, поэтому $\tilde{g}$ имеет старший коэффициент 1 и степень k. Аналогично, $\tilde{g}$ имеет степень l. (Здесь важно, что $\tilde{g}$ и $\tilde{h}$ не «выродились» в 1.) Значит, $\tilde{f} = \tilde{g}\tilde{h}$ – разложение, показывающее, что $\tilde{f}$ приводим над $\mathbb{Z}_2$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что если $\tilde{p}$ – неприводимый многочлен над $\mathbb{Z}_2$, то любой его прообраз p со старшим коэффициентом 1 является неприводимым над $\mathbb{Z}$ многочленом. Теперь существование неприводимых над $\mathbb{Z}$ многочленов сколь угодно высокой степени следует из доказанного ранее аналогичного утверждения для многочленов, неприводимых над $\mathbb{Z}_2$.

В заключение в виде упражнения предлагаем еще один вариант рассуждения на основе идей Евклида, доказывающего существование неприводимых над $\mathbb{Z}$ многочленов сколь угодно высокой степени.

Упражнение 11. Если f – неприводимый над $\mathbb{Z}$ многочлен, то многочлен $\tilde{f}$ назовем *хорошим* (как мы видели, хороший многочлен может быть приводимым; можно доказать, что все многочлены из $\mathbb{Z}_2[x]$ хорошие).

а) Докажите, что каждый элемент из $\mathbb{Z}_2[x]$ раскладывается в произведение хороших многочленов.

б) Примените идею Евклида для доказательства бесконечности множества хороших многочленов.

в) Докажите, что если бы все неприводимые над $\mathbb{Z}$ многочлены имели степень, не превосходящую m, то хороших многочленов было бы конечное количество.