В. В. Рыжков

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ P_m В P_n

В данном сообщении понятие характеристических направлений, хорошо известное в теории точечных отображений пространств равной размерности переносится на отображения проективного пространства P_m в P_n при $m \neq n$. В случае $m<n$ выясняется особая роль асимптотических направлений поверхности $V_m \subset P_n$, служащей образом P_m. Эти направления и только они могут оказываться характеристическими при некоторых отображениях $\tilde{P}_m$ на V_m. При $m>n$ выясняются первоначальные факты, связанные с характеристической конфигурацией таких отображений. В качестве примера несколько подробней рассматривается случай $P_3 \to P_2$.

1. Рассмотрим отображение P_m в P_n, определяемое в некоторой области P_m уравнениями

$$T : x^i = x^i(u^r), \tag{1}$$

где u^r, x^i суть аффинные координаты в пространствах P_m, P_n соответственно, так что $r = 1, 2, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots, n$, Правые части уравнений (1) предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми функциями своих переменных, а якобиева матрица $\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^r}\right)$ имеющей максимальный возможный ранг:

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^r}\right) = \min(m, n). \tag{2}$$

Пусть O, O' — пара точек, соответствующих при отображении T; примем их за начала координат в каждом из пространств и запишем разложения функций $x^i(u^r)$ по степеням u^r, сохранив в записи члены до второго порядка включительно:

$$x^i = a_r^i u^r + \frac{1}{2} b_{rs}^i u^r u^s + \ldots . \tag{3}$$

При некотором согласовании координатных систем в обоих пространствах матрица (a_r^i) главной линейной части нашего отображения может быть приведена, в силу условия (2), к канонической форме; при этом естественно различать следующие три случая.

1) $m<n$. Локально образом P_m при отображении T служит некоторая m-мерная поверхность, а уравнения (3) записываются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= u^1 + \frac{1}{2} b_{rs}{}^1 u^r u^s + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^m &= u^m + \frac{1}{2} b_{rs}{}^m u^r u^s + \ldots, \quad r, s = 1, 2, \ldots, m. \\
x^{m+1} &= \frac{1}{2} b_{rs}^{m+1} u^r u^s + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^n &= \frac{1}{2} b_{rs}{}^n u^r u^s + \ldots,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

2) $m=n$. Отображение локально взаимно однозначное и матрица (a_r^i) приводится к единичной:

$$x^i = u^i + \frac{1}{2} b_{rs}{}^i u^r u^s + \ldots \quad i, r, s = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

3) $m>n$. В этом случае отображение порождает локальное расслоение пространства P_m на p-мерные подмногообразия, где $p=m-n$, являющиеся прообразами точек P_n при отображении T. Уравнения (3) записываются в форме

$$
\left.
\begin{aligned}
x^1 &= u^1 + \frac{1}{2} b_{rs}{}^1 u^r u^s + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^n &= u^n + \frac{1}{2} b_{rs}{}^n u^r u^s + \ldots
\end{aligned}
\right\}
\quad
\begin{aligned}
& r, s = 1, 2, \ldots, m, \\
& (m = n + p).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

2. В каждом из случаев нетрудно указать семейство коллинеаций (при $m>n$ вырожденных), касательных к данному отображению. Такое семейство коллинеаций задается в общей форме уравнениями

$$x^i = \frac{a_r{}^i u^r}{1 - p_r u^r}; \tag{7}$$

общая касательная коллинеация зависит таким образом от m параметров p_r и обозначается нами через $K(p_r)$ (см. [1]).

При $m=n$ определение характеристических направлений имеет совершенно симметричный характер по отношению к обоим пространствам; в общем случае эта симметрия нарушается. Мы даем определение характеристических направлений в отображаемом пространстве P_m.

Определение. Направление $\mathbf{l}(l^r)$ в точке O пространства P_m называется характеристическим для отображения T, если кривые, проходящие через O в этом направлении и имеющие в O инфлексионную точку, переходят при отображении T в кривые, также имеющие в $O'=TO$ инфлексионную точку или точку остановки.

В аналитической форме это означает, что при задании кривой γ в P_m уравнением $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$, где $\mathbf{u}(0)=0$, $\mathbf{u}'(0)\neq 0$ и коллинеарно $\mathbf{l}$, $\mathbf{u}''(0)\parallel\mathbf{u}'(0)$ имеем для образа $\gamma'=T\gamma$, $\mathbf{x}=\mathbf{x}[\mathbf{u}(t)]$, $\mathbf{x}_{|t=0}=0$, $\mathbf{x}'_{|t=0}\parallel\mathbf{x}''_{|t=0}$.

Таким образом, при $m>n$ мы включаем в число характеристических направлений и нулевые направления отображения T, т. е. направления, касательные к слоям локального расслоения в P_m. Эти направления, характеризуемые условием $\mathbf{x}'_{|t=0}=0$, мы называем нулевыми характеристическими направлениями.

Из данного определения вытекает, что уравнения, определяющие характеристические направления в точке O, имеют вид

$$a_q{}^iu^q\cdot b_{rs}{}^ju^ru^s-a_q{}^ju^qb_{rs}{}^iu^ru^s=0, \tag{8}$$

где, конечно, a_q^i можно свести к указанным выше каноническим формам. В случае $m=n$ это определение не отличается от обычного, поэтому мы остановимся на случаях $m<n$ и $m>n$.

3. Пусть $m<n$. Уравнения отображения запишем в виде (4); уравнения, определяющие характеристические направления, будут распадаться на две группы:

$$\begin{aligned} &u^p\cdot b_{rs}{}^qu^ru^s-u^q\cdot b_{rs}{}^pu^ru^s=0, && p,q,r,s=1,2,\ldots,m,\\ &u^p\cdot b^{\alpha}_{rs}u^ru^s=0, && \alpha=m+1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом,

$$b^{\alpha}_{rs}u^ru^s=0, \tag{10}$$

и мы видим, что каждое характеристическое направление в P_m имеет своим образом асимптотическое направление на поверхности $V_m=T(P_m)$ в P_n но, вообще говоря, не наоборот. Хотя и необязательно асимптотические направления на поверхности V_m суть образы характеристических направлений при данном отображении, все же, в известном смысле, утверждение допускает обращение. Именно, рассмотрим асимптотический конус поверхности V_m в P_n в точке O'. Тогда существует отображение $\widetilde{T}$ пространства $\widetilde{P}_m$ в P_n, имеющее V_m своим локальным образом, при котором асимптотический конус в точке O' служит образом характеристического конуса отображения в $O \in \widetilde{P}_n$. Такое отображение можно получить, например, следующим образом. Возьмем отображение проектирования V_m на касательную плоскость к V_m в точке O', с произвольным центром проекций. Теперь отображение $\widetilde{T}$ касательной плоскости на поверхность V_m, обратное указанному проектированию и будет искомым.

Для того, чтобы убедиться в этом, запишем уравнения V_m в окрестности O' в виде

$$\begin{gathered} x^{m+1} = \frac{1}{2} b_{rs}^{m+1} x^r x^s + \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x^n = \frac{1}{2} b_{rs}{}^n x^r x^s + \dots . \end{gathered} \tag{11}$$

Вводя в касательном $\widetilde{P}_m$ поверхности V_m аффинные координаты $u^1 = x^1, \dots, u^m = x^m$ и помещая центр проектирования в несобственное подпространство дополнительной координатной плоскости, мы запишем уравнения отображения $\widetilde{T}$, обратного такому проектированию, в виде

$$\begin{gathered} x^1 = u^1, \dots, x^m = u^m, \\ x^\alpha = \frac{1}{2} b_{rs} u^r u^s + \dots, \quad \alpha = m+1, \dots, n. \end{gathered} \tag{12}$$

Уравнения характеристических направлений этого отображения будут иметь вид

$$b_{rs}^\alpha u^r u^s = 0, \tag{13}$$

т. е. характеристический конус непосредственно переходит в асимптотический конус поверхности V_m. Само собою разумеется, что не исключаются и случаи пустого множества характеристических и асимпотических направлений.

Если мы рассмотрим некоторую область поверхности V_m и поле асимптотических конусов в ней, то уже нельзя будет утверждать, что это поле возникает как образ поля характеристических конусов при некотором отображении $\widetilde{T} : \widetilde{P}_m \to P_n$. Оставляя общее исследование вопроса об условиях, при которых это становится возможным, мы приведем здесь лишь результаты частного характера. Пусть в каждой точке некоторой области V_m задано асимптотическое направление l; не нарушая общности допустим, что поверхность V_m параметризована так, что указанное поле асимптотических направлений огибает асимптотические линии u^1, задаваемые уравнениями $u^2 = \mathrm{const}, \dots, u^m = \mathrm{const}$.

Будем искать отображение

$$\varphi : \widetilde{P}_m (\xi^r) \to P_n (u^r) \tag{14}$$

такое, чтобы для сквозного отображения

$$\widetilde{T} = T \circ \varphi: \quad \widetilde{P}_m(\xi^r) \to P_n(x^i) \tag{15}$$

прообразом асимптотических указанного семейства были характеристические.

Рассмотрим в пространстве $\widetilde{P}_m(\xi^r)$ прямую с уравнениями

$$\xi^r = \xi_0{}^r + \lambda l^r, \tag{16}$$

соответствующую направлению $u^2 = \mathrm{const}, \ldots, u^m = \mathrm{const}$; тогда легко видеть, что

$$l^r = \frac{D(u^2, \ldots, u^m)}{D(\xi^1, \ldots, \hat{\xi^r}, \ldots, \xi^m)}, \tag{17}$$

где крышечка над r указывает, что номер пропускается. В P_n образом такой прямой будет кривая с уравнениями $x^i = x^i(u^r)$, где $u^r = u^r(\xi_0{}^r + l^r\lambda)$.

Находим $\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}$ и $\frac{d^2\mathbf{x}}{d\lambda^2}$ при $\lambda = 0$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}_{|\lambda=0} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^r} \cdot \frac{\partial u^r}{\partial \xi^s} \cdot l^s = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \cdot \Delta, \tag{18}$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\lambda^2}_{|\lambda=0} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^{1\,2}} \cdot \Delta^2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^r} \frac{\partial^2 u^r}{\partial \xi^s \partial \xi^t} l^s l^t,$$

где $\Delta = \frac{D(u^1, \ldots, u^m)}{D(\xi^1, \ldots, \xi^m)}$. В силу асимптотичности направления u^1-линии мы можем написать

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^{1\,2}} = \Gamma^r_{11} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^r}$$

и теперь

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\lambda^2}_{|\lambda=0} = \left(\Gamma^r_{11}\Delta^2 + \frac{\partial^2 u^r}{\partial \xi^s \partial \xi^t} l^s l^t\right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^r}. \tag{19}$$

Условие того, чтобы направление нашей прямой (16) было характеристическим, состоит в коллинеарности $\frac{dx}{d\lambda}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{d\lambda^2}$ и сводится к равенствам:

$$\Gamma^r_{11}\Delta^2 + \frac{\partial^2 u^r}{\partial \xi^s \partial \xi^t} l^s l^t = 0, \quad r = 2, 3, \ldots, m, \tag{20}$$

т. е. на функции $u^r(\xi^s)$ накладывается $m-1$ условие в виде дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Локально такая система уравнений имеет решения; уравнения (20) инвариантны относительно группы коллинеаций пространства $\widetilde{P}_m$.

В случае отображений $P_2 \to P_3$, имеющих в качестве образа поверхность гиперболического типа, можно даже рассматривать одновременно оба семейства асимптотических как образы характеристических некоторого отображения $\widetilde{P}_2 \to P_3$. В этом случае, уравнения (20), примененные к каждому из семейств асимптотических поверхности $\mathbf{x}(u, v)$, дадут систему из двух уравнений:

$$\Gamma_{11}^2 \left[\frac{D(u, v)}{D(\xi, \eta)}\right]^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 = 0, \quad (21)$$

$$\Gamma_{22}^1 \left[\frac{D(u, v)}{D(\xi, \eta)}\right]^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 = 0,$$

также допускающих решения с известным произволом.

4. Перейдем теперь к случаю $m > n$. Задавая уравнения отображения в виде (6), мы напишем уравнения характеристических направлений в форме:

$$b_{rs}{}^i u^j u^r u^s - b_{rs}{}^j u^i u^r u^s = 0. \quad (22)$$

Они заведомо удовлетворяются при $u^1 = u^2 = \ldots = u^n = 0$ (нулевые направления); при $(u^1, u^2, \ldots, u^n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, т. е. с исключением нулевых направлений получим иную форму уравнений:

$$b_{rs}{}^i u^r u^s = \lambda u^i, \quad (23)$$

т. е. представим ненулевые характеристические направления как определяемые пересечением n гиперповерхностей второго порядка (23). В «общем» случае легко находим, что совокупность характеристических прямых зависит от $n-m$ параметров и является алгебраическим конусом порядка 2^n-1. Последнее можно предвидеть из таких геометрических соображений. Рассмотрим в P_m плоскость $\hat{P}_n$, трансверсальную к расслоению, индуцированному данным отображением. Тогда данное отображение естественным образом индуцирует локальное отображение $\hat{P}_n \to P_n$, которое «в общем случае» будет иметь 2^n-1 характеристических направлений; эти направления получатся от пересечения выбранной трансверсальной плоскости $\hat{P}_n$ с характеристическим конусом данного отображения. Тем самым подсказываются размерность и порядок характеристического конуса. Конечно, в частных случаях, размерность характеристического конуса может повышаться.

В простейшем случае отображений $P_3 \to P_2$ характеристические направления в каждой точке P_3 будут задаваться единственным уравнением третьей степени. Если уравнения отображения имеют вид

$$x^1 = u^1 + \frac{1}{2} b_{rs}{}^1 u^r u^s + \ldots,$$
$$x^2 = u^2 + \frac{1}{2} b_{rs}{}^2 u^r u^s + \ldots, \tag{24}$$

то это кубическое уравнение характеристического конуса будет

$$b_{rs}{}^1 u^2 u^r u^s - b^2{}_{rs} u^1 u^r u^s = 0. \tag{25}$$

Представляется интересным разобрать возможные случаи вырождения этого конуса, особого положения на нем нулевой образующей, наличия у него особенности вообще и т. п.

Здесь мы ограничимся лишь приведением примера отображений, для которых этот конус в любой точке распадается на три плоскости. Рассмотрим P_3 и лежащую в нем плоскость P_2. Возьмем два однопараметрических семейства плоскостей, так что в локальном смысле через точку некоторой области P_3 проходит ровно по одной из плоскостей каждого семейства. Предположим также, что в рассматриваемой области эти плоскости и заданная плоскость P_2 пересекаются в единственной точке. Эту точку мы и примем за образ исходной точки пространства при отображении на P_2. В частности, если оба семейства плоскостей суть пучки, то мы получим косое проектирование Штейнера.

Если теперь O — некоторая точка пространства, а π и σ — плоскости наших семейств, через нее проходящие, то ясно, что всякое направление в этих плоскостях — характеристическое. Действительно, любая кривая, проходящая через O и лежащая в π или в σ, будет изображаться прямой линией в P_2. Таким образом кубический конус характеристических направлений выделяет из своего состава две плоскости. Нетрудно также указать и положение третьей плоскости, образующей вместе с π и σ характеристический конус. В случае двух пучков плоскостей это будет плоскость, проходящая через O и точки пересечения осей пучков с плоскостью изображения P_2. Если данные семейства плоскостей огибают развертывающиеся поверхности, то третья плоскость пройдет через O и точки пересечения с P_2 двух образующих этой поверхности, вдоль которых ее касаются плоскости π и σ.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжков В. В., Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами. В сб. Геометрия. 1963 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., 1965, 65—107

V. Ryžkov

CHARACTERISTIC DIRECTIONS OF A POINT MAPPING P_m INTO P_n

The notion of characteristic directions, well known for the case of point correspondences between projective spaces of the same dimension n is generalized to the case of mappings P_m into P_n, when $m \neq n$. If $m < n$ the special importance of the asymptotic directions of the image surface $V_m \subset P_n$ is shown. These and only these directions can be regarded as characteristic ones for some mappings $\widetilde{P_m}$ into P_n, having the image V_m. If $m > n$ some preliminary facts concerning the characteristic directions are regarded and the case $P_3 \to P_2$ is discussed.