



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. О. Кузнецов, О внутреннем радиусе, поляризации и круговом усечении множества,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2016, том 445, 175–180

<https://www.mathnet.ru/zns16277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

18 мая 2025 г., 06:26:30



В. О. Кузнецов

О ВНУТРЕННЕМ РАДИУСЕ, ПОЛЯРИЗАЦИИ И КРУГОВОМ УСЕЧЕНИИ МНОЖЕСТВА

В предыдущей работе [4] было показано, что разность приведенного модуля односвязной области и ее кругового усечения не уменьшается при поляризации и круговой симметризации. В данной работе этот результат распространяется на случай произвольного открытого множества.

Пусть B – открытое множество, $r > 0$. Будем использовать следующие обозначения: $U_r = \{|z| < r\}$, $T_r = \{|z| = r\}$, $B_r = B \cap U_r$, $\mathbb{C}^+ = \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$, $B^+ = B \cap \mathbb{C}^+$, $l(\varphi) = \{z : \operatorname{Im}(ze^{-i\varphi}) = 0\}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, \tilde{B} – множество, полученное в результате поляризации множества B , относительно прямой $l(\varphi)$, B' – связная компонента множества B , содержащая точку $z = 0$.

Под функцией Грина $G(z, \zeta)$ открытого множества $B \subset \mathbb{C}$ будем понимать функцию Грина связной компоненты этого множества, содержащей точку ζ . Функцию Грина $G(z, \zeta)$ множества B будем предполагать доопределенной нулем на $\overline{\mathbb{C}} \setminus B$.

Если $g(z, \zeta) = -\log|z - \zeta| + A(z, \zeta)$ – функция Грина множества B , то величина

$$m(B, \zeta) = \frac{1}{2\pi} A(\zeta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow \zeta} (g(z, \zeta) - \log|z - \zeta|)$$

называется приведенным модулем множества B относительно точки $z = \zeta$ [1]. В частном случае, когда B – односвязная область гиперболического типа, содержащая точку ζ , получаем классическое определение приведенного модуля [1,2]

$$m(B, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \log r(B, \zeta),$$

где $r(B, \zeta)$ – конформный радиус области B относительно точки $z = \zeta$. Если область B не является односвязной, то величину

$$r(B, \zeta) = \exp(2\pi m(B, \zeta))$$

Ключевые слова: приведенный модуль, поляризация, симметризация, функция Грина.

называют внутренним радиусом области относительно точки $z = \zeta$ [2,3]. Приведенный модуль множества B относительно точки $z = 0$ будем обозначать через $m(B)$.

Теорема 1. Пусть B – открытое множество, $0 \in B \subset U_R$. Тогда при всех $r \in (0, R]$

$$m(\tilde{B}) - m(\tilde{B}_r) \geq m(B) - m(B_r). \quad (1)$$

Таким образом, при поляризации множества возрастает (не уменьшается) не только приведенный модуль этого множества, но и скорость его изменения при круговом усечении области. При доказательстве теоремы 1 будем использовать две леммы.

Лемма 1. Если A, B – открытые множества и $0 \in A \subset B \subset U_R$, то при любом $r \in (0, R)$

$$m(B) - m(B_r) \geq m(A) - m(A_r). \quad (2)$$

Если множества A и B связны, имеют классическую функцию Грина, и $B \cap T_r \neq \emptyset$, то равенство в этом неравенстве достигается только в случае $A = B$.

Доказательство. Так как множество $(A')_r$, вообще говоря, несвязно, то $(A_r)' \subset (A')_r$. Тем не менее, поскольку

$$((A')_r)' \subset (A_r)' = ((A_r)')' \subset ((A')_r)',$$

то $((A')_r)' = (A_r)'$ и, значит,

$$m((A')_r) = m((A_r)'). \quad (3)$$

Поэтому неравенство (2) для множеств A и B равносильно неравенству

$$m(B) - m((B_r)') \geq m(A) - m((A_r)') \quad (4)$$

для областей $\mathcal{A} = A'$ и $\mathcal{B} = B'$. Для односвязных областей \mathcal{A} и \mathcal{B} неравенство (4) вместе с утверждением о знаке равенства в этом неравенстве доказано в [4, Лемма 1]. Поскольку в этом доказательстве нигде не использовалась односвязность областей \mathcal{A} и \mathcal{B} , то оно остается справедливым и в общем случае. \square

Лемма 2. Пусть K – объединение конечного числа замкнутых круговых прямоугольников, на которые разбивает $\overline{U_R}$ полярная сетка прямых $\{z: \operatorname{Im}(z^n) = 0\}$ и окружностей $T_{k\delta}$, $k = 1, \dots, n$, $\delta = R/n$,

и пусть $0 \in B = U_R \setminus K$. Тогда функция $m(r) = m(B_r)$ непрерывна и дифференцируема слева на $(0, R]$ и

$$m'_-(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{T_r} \left(\frac{\partial g_r(z, 0)}{\partial n} \right)^2 |dz|, \quad r \in (0, R], \quad (5)$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали к T_r от функции Грина $g_r(z, 0)$ множества B_r .

Для односвязной области аналогичная формула в терминах отображающей функции Римана была получена в [5].

Доказательство леммы 2. Положим $A_r(z, 0) = g_r(z, 0) - \log|z|$, $D = (B_r)'$. Тогда $m(D) = m(B_r)$. Пусть $0 < r' < r \leq R$, $z \in T_{r'}$. Поскольку $B_{r'} \subset B_r \subset U_r$, то $0 = g_{r'}(z, 0) \leq g_r(z, 0) \leq \log r - \log r'$.¹ Значит, $0 \leq g_r(z, 0) - g_{r'}(z, 0) \leq \log r - \log r'$. Поскольку $g_r(z, 0) - g_{r'}(z, 0) = A_r(z, 0) - A_{r'}(z, 0)$ – гармоническая в B_r функция, то по принципу максимума $0 \leq m(r) - m(r') = A_r(0, 0) - A_{r'}(0, 0) \leq \log r - \log r'$. Это доказывает непрерывность функции $m(r)$.

Пусть $\varepsilon = r - r' > 0$. По формуле Тейлора

$$g_r(r'e^{i\theta}, 0) = \frac{\partial g_r(re^{i\theta}, 0)}{\partial n} \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (6)$$

Покажем, что оценка $O(\varepsilon^2)$ равномерна по θ . Пусть

$$I_k = (\pi(k-1)/n, \pi k/n], \quad k = 1, 2, \dots, 2n,$$

$m\delta < r' < r \leq (m+1)\delta$, $m \in \mathbb{Z}$; $P_k = \{z = \rho e^{i\theta} : \theta \in I_k, m\delta < \rho < r\}$. Достаточно проверить равномерность оценки в (6) для каждого из промежутков I_k , $k = 1, 2, \dots, 2n$. Если $P_k \cap D = \emptyset$, то утверждение очевидно.

Пусть $P_k \cap D \neq \emptyset$. Функцию $g_r(z, 0)$ можно продолжить гармонически с P_k на соседние круговые прямоугольники P_{k-1} и P_{k+1} . Полученная при этом функция $h(z)$ будет гармонической в круговом прямоугольнике $Q = P_{k-1} \cup P_k \cup P_{k+1}$ и будет обращаться в нуль на его стороне, лежащей на T_r . Отметим, что $h(z) = g_r(z, 0)$, если $z \in P_{k\pm 1} \cap D$. Функцию $h(z)$ продолжим гармонически в симметричный Q относительно окружности T_r круговой прямоугольник,

¹ $g_{r'}(z, 0) = g_r(z, 0)$, если $z \notin D$.

обозначим его Q_1 . Полученная при этом продолжении функция, обозначим ее $h_1(z)$, будет гармонической в круговом прямоугольнике $Q_2 = Q_1 \cup Q$, включая точки $z = re^{\pi(k-1)/n}$ и $z = re^{\pi k/n}$, поскольку она ограничена в окрестности этих точек. В P_k значения функций $h_1(z)$ и $g_r(z, 0)$ совпадают. Поэтому в P_k совпадают и значения всех производных этих функций. Кроме того,

$$\sup_{z \in Q_2} |h_1(z)| \leq \sup_{z \in Q_1} g_r(z, 0) \leq \log r - \log(m\delta).$$

Из ограниченности гармонической в Q_2 функции $h_1(z)$ вытекает ограниченность всех производных этой функции *внутри* Q_2 и, значит, равномерность оценки в (3).

Функция

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{T_r} \frac{\partial g_r(\zeta, 0)}{\partial n_\zeta} \frac{\partial g_r(\zeta, z)}{\partial n_\zeta} |d\zeta|$$

является решением задачи Дирихле в области $D_{r'}$ для граничных условий $f(z)|_{z \in (\partial D_{r'}) \setminus T_{r'}} = 0$, $f(z)|_{z \in T_{r'}} = \partial g_r(\zeta, 0)/\partial n_\zeta$. Поэтому $h(z) = g_r(\zeta, 0) - g_{r'}(\zeta, 0) - \varepsilon f(z)$ — гармоническая в области $D_{r'}$ функция. Из (6) вытекает, что $h(z)|_{z \in \partial D_{r'}} = O(\varepsilon^2)$ и, значит, эта оценка справедлива во всей области $D_{r'}$. В частности, $A_r(0, 0) - A_{r'}(0, 0) = \varepsilon f(0) + O(\varepsilon^2)$. Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим формулу (5). \square

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала утверждение теоремы в том случае, когда $B = U_R \setminus K$, где K — объединение замкнутых круговых прямоугольников полярной сетки в лемме 2. Можем считать, что $\varphi = 0$ и поляризация производится так, что $B^+ \subset \tilde{B}^+$. Положим $B' = D$. Поскольку $\tilde{D} \subset \tilde{B}$, то используя лемму 1 и соотношение (3), получаем

$$m(\tilde{B}) - m(\tilde{B}_r) \geq m(\tilde{D}) - m(\tilde{D}_r), \quad (7)$$

$$m(B) - m(B_r) = m(D) - m((B_r)') = m(D) - m(D_r). \quad (8)$$

Пусть $g(z, 0)$ и $\tilde{g}(z, 0)$ — функции Грина областей $(D_r)'$ и $(\tilde{D}_r)'$ соответственно. Поскольку эти области имеют регулярную границу, то к ним применима теорема 1 работы [6]. Повторяя рассуждения, примененные в [4] при доказательстве аналогичной теоремы, получим, что

$$\left(\frac{\partial \tilde{g}(z, 0)}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{g}(\bar{z}, 0)}{\partial n}\right)^2 \geq \left(\frac{\partial g(z, 0)}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(\bar{z}, 0)}{\partial n}\right)^2 \quad (9)$$

при всех $z \in T_r^+$. Для функции $m(r) = m(\tilde{D}_r) - m(D_r)$ из (5) и (9) тогда получаем

$$\begin{aligned} m'_-(r) &= \int_{T_r} \left[\left(\frac{\partial \tilde{g}(\bar{z}, 0)}{\partial n} \right)^2 - \left(\frac{\partial g(z, 0)}{\partial n} \right)^2 \right] |dz| \\ &= \int_{T_r^+} \left[\left(\frac{\partial \tilde{g}(z, 0)}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{g}(\bar{z}, 0)}{\partial n} \right)^2 - \left(\frac{\partial g(z, 0)}{\partial n} \right)^2 - \left(\frac{\partial g(\bar{z}, 0)}{\partial n} \right)^2 \right] |dz| \geq 0 \end{aligned}$$

и, поскольку функция $m(r) = m(\tilde{D}_r) - m(D_r)$ непрерывна на $(0, R]$, то

$$m(\tilde{D}) - m(\tilde{D}_r) \geq m(D) - m(D_r) \quad (10)$$

при всех $r \in (0, R]$. Из (7), (8) и (10) вытекает, что в рассматриваемом случае утверждение теоремы справедливо.

Пусть теперь B , $0 \in B$, – произвольное открытое множество в U_R . Положим $B^{(1)} = U_R \setminus K^{(1)}$, где $K^{(1)}$ – объединение замкнутых круговых прямоугольников полярной сетки в лемме 2, пересекающихся с $U_R \setminus B$. Уменьшив вдвое шаг полярной сетки, построим область $B^{(2)} = U_R \setminus K^{(2)}$, и т.д. В результате получим исчерпание множества B последовательностью открытых множеств

$$B^{(1)} \subset B^{(2)} \subset \dots \subset B^{(n)} \subset \dots$$

и исчерпание множества \tilde{B} последовательностью множеств

$$\widetilde{B^{(1)}} \subset \widetilde{B^{(2)}} \subset \dots \subset \widetilde{B^{(n)}} \subset \dots$$

Приведенный модуль множества равен пределу приведенных модулей исчерпывающих его множеств (см, например, [1]). Поскольку для множеств $B^{(k)}$ утверждение теоремы справедливо, то оно справедливо и в общем случае. \square

Через $\text{Sym } B$ будем обозначать результат круговой симметризации открытого множества B относительно вещественной положительной полуоси.

Теорема 2. Пусть B – открытое множество, $0 \in B \subset U_R$. Тогда при всех $r \in (0, R]$

$$m(\text{Sym } B) - m((\text{Sym } B)_r) \geq m(B) - m(B_r). \quad (11)$$

Доказательство. Если множество B удовлетворяет условиям леммы 2, то симметризовать множество B можно при помощи конечной последовательности поляризаций относительно надлежащим образом выбранных прямых $l(\varphi_k)$, $k = 1, \dots, n$ (см, например, [1]). Поскольку при каждой поляризации разность (11) не уменьшается, то утверждение теоремы 2 для такого множества выполняется. Справедливость теоремы 2 в общем случае устанавливается, как и для теоремы 1, построением исчерпания множества B множествами, удовлетворяющими лемме 2. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*. — Успехи мат. наук **49** (1994), 13–76.
2. J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping*. Ergeb. Math. Grenz. (N.F.) Bd. **18**, Springer-Verlag (1958); 2nd ed. corrected, 1965. Пер. на рус. яз. 1-го изд., Дж. Дженкинс, Однолистные функции и конформные отображения. М., 1962.
3. В. К. Хейман, *Многолистные функции*. Пер. с англ. М., ИЛ, 1960.
4. В. О. Кузнецов, *Поляризация и круговое усечение области*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 162–169.
5. А. Ю. Сольнин, *Минимизация конформного радиуса при круговом сужении области*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 145–164.
6. А. Ю. Сольнин, *Поляризация и функциональные неравенства*. — Алгебра и анализ **8**, No. 6 (1996), 148–185.

Kuznetsov V. O. Inner radius, polarization and circular truncation of the set.

The difference of the reduced module $m(B, 0)$ of an open set B , $0 \in B$, and the reduced module $m(B_r, 0)$ of its circular truncation B_r , where $B_r = B \cap \{|z| < r\}$, is considered. It is proved that in the case of polarization and circular symmetrization this difference does not decrease.

Государственный университет
морского и речного флота
им. адмирала С. О. Макарова
E-mail: kvo_kuz@mail.ru

Поступило 12 марта 2016 г.