Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Н. А. Баженов, О категоричности булевых алгебр типа $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times \eta)$ в гиперарифметической иерархии, *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.*, 2012, том 12, выпуск 3, 35–45

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 34.239.153.44
6 ноября 2024 г., 07:40:29

УДК 510.5+510.6+512.563

Н. А. Баженов

О КАТЕГОРИЧНОСТИ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР ТИПА $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times \eta)$ В ГИПЕРАРИФМЕТИЧЕСКОЙ ИЕРАРХИИ*

Работа посвящена исследованию категоричности булевых алгебр относительно классов Δ^0_β гиперарифметической иерархии. Доказано, что булева алгебра $\mathfrak{B}(\omega^{\delta+n}\times\eta)$ (где δ — предельный ординал или ноль, $n \in \omega$, $\delta+n \geqslant 1$) является $\Delta^0_{\delta+2n+1}$-категоричной, но не $\Delta^0_{\delta+2n}$-категоричной.

Ключевые слова: булевы алгебры, категоричность, челночные отношения.

Введение

Работа посвящена исследованию категоричности булевых алгебр относительно классов Δ^0_β гиперарифметической иерархии. В дальнейшем будем использовать основные понятия и определения из монографий [1–3].

Пусть α — вычислимый ординал. Вычислимая модель $\mathfrak{A}$ называется *вычислимо категоричной* (Δ^0_α*-категоричной*), если для любого вычислимого представления $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ существует вычислимый изоморфизм (Δ^0_α-изоморфизм) $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$.

Вычислимая модель $\mathfrak{A}$ называется *относительно* Δ^0_α*-категоричной*, если для любой модели $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ такой, что носитель $\mathfrak{B}$ является подмножеством множества натуральных чисел, существует $\Delta^0_\alpha(\mathcal{D}(\mathfrak{B}))$-изоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, где $\mathcal{D}(\mathfrak{B})$ — атомная диаграмма $\mathfrak{B}$.

Используемые далее определения Σ_α-, Π_α-, Σ^c_α- и Π^c_α-формул можно найти в [3].

Пусть $\mathfrak{A}$ — модель языка $\mathcal{L}$. *Формальное* Σ^0_α*-семейство Скотта* для $\mathfrak{A}$ — это вычислимо перечислимое множество Θ Σ^c_α-формул языка $\mathcal{L}\cup\{\bar{c}\}$ (где $\bar{c}$ — некоторый конечный набор констант из $\mathfrak{A}$) такое, что:

1) для каждого набора $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ найдется такая формула $\theta(\bar{x}) \in \Theta$, что $\mathfrak{A} \models \theta(\bar{a})$;

2) для любых $\theta \in \Theta$ и $\bar{a}, \bar{a}' \in \mathfrak{A}$ верно: если $\mathfrak{A} \models \theta(\bar{a})$ и $\mathfrak{A} \models \theta(\bar{a}')$, то $(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{c}) \cong$ $\cong (\mathfrak{A}, \bar{a}', \bar{c})$.

Эш, Найт, Манассе, Сламан [4] и независимо от них Чисхолм [5] доказали, что вычислимая модель $\mathfrak{A}$ является относительно Δ^0_α-категоричной тогда и только тогда, когда она имеет формальное Σ^0_α-семейство Скотта.

Легко понять, что если вычислимая модель относительно Δ^0_α-категорична, то она является Δ^0_α-категоричной, но, вообще говоря, понятия Δ^0_α-категоричности и относительной Δ^0_α-категоричности не совпадают. С. С. Гончаров [6] показал, что существует

* Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3606.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (госконтракт № 02.740.11.0429) и РФФИ (грант 08-01-00336).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 35–45
© Н. А. Баженов, 2012

вычислимо категоричная модель, не являющаяся относительно вычислимо категоричной. В работе [7] показано, что для любого непредельного ординала α существует Δ^0_α-категоричная модель, не являющаяся относительно Δ^0_α-категоричной. В статье [8] получен аналогичный результат для произвольного предельного ординала α.

С другой стороны, если наложить некоторые дополнительные условия на Δ^0_α-категоричную модель, то можно доказать, что она обладает формальным Σ^0_α-семейством Скотта. С. С. Гончаров [9] доказал, что если модель $\mathfrak{A}$ является 2-разрешимой (т. е. ее $\forall\exists$-диаграмма разрешима), то она будет вычислимо категоричной в том и только том случае, если обладает формальным Σ^0_1-семейством Скотта.

Перейдем к изложению результатов, касающихся булевых алгебр. С. С. Гончаров и В. Д. Дзгоев [10] и независимо от них Дж. Реммел [11] получили описание Δ^0_1-категоричных булевых алгебр: булева алгебра вычислимо категорична тогда и только тогда, когда в ней имеется только конечное число атомов. В работах [12; 13] описаны относительно Δ^0_2- и Δ^0_3-категоричные булевы алгебры.

Будем обозначать ω и η — множества, упорядоченные соответственно по типу натуральных и рациональных чисел. Если L — линейный порядок, то через $\mathfrak{B}(L)$ будем обозначать подалгебру $(P(L), \cup, \cap, \mathrm{C}; \varnothing, L)$, порожденную элементами вида $[x, y) \leftrightharpoons \{z \mid x \leqslant z < y\}$ и $[x, \infty) \leftrightharpoons \{z \mid x \leqslant z\}$, где $x, y \in L$.

В данной работе доказано, что булева алгебра $\mathfrak{B}(\omega^{\delta+n} \times \eta)$ (где δ — предельный ординал или ноль, n — натуральное число, $\delta < \omega_1^{CK}$, и $\delta + n \geqslant 1$) является $\Delta^0_{\delta+2n+1}$-категоричной, но не $\Delta^0_{\delta+2n}$-категоричной. Этот результат может оказаться полезным для описания Δ^0_α-категоричных булевых алгебр при $\alpha \geqslant 2$.

1. Предварительные сведения

В дальнейшем считаем, что булевы алгебры рассматриваются как модели языка $\mathcal{L}_{BA} = \{\vee^2, \wedge^2, \mathrm{C}^1; 0, 1\}$. На булевых алгебрах стандартным образом определяется порядок: $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a \wedge b = a$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Будем обозначать $\mathrm{F}(\mathfrak{B})$ — идеал Фреше $\mathfrak{B}$, $\mathrm{F}_\alpha(\mathfrak{B})$ — α-й итерированный идеал Фреше $\mathfrak{B}$. Если $a \in \mathfrak{B}$, то $\widehat{a}$ — булева алгебра вида $(\{b \in \mathfrak{B} \mid b \leqslant a\}, \vee, \wedge, \mathrm{C}_a; 0, a)$, где $\vee$ и $\wedge$ являются ограничениями соответствующих операций $\mathfrak{B}$ на носитель $\widehat{a}$, $\mathrm{C}_a(b) = a \wedge \mathrm{C}(b)$. Также будем считать, что $a^1 \leftrightharpoons a$ и $a^0 \leftrightharpoons \mathrm{C}(a)$.

Если α — ординал, то $\leqslant_\alpha$ будет обозначать α-е стандартное челночное отношение (подробные сведения о челночных отношениях можно найти в [3]). В дальнейшем мы будем использовать следующий факт: если $\alpha \geqslant 1$ — ординал, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — счетные модели счетного языка $\mathcal{L}$, то следующие условия эквивалентны:

1) $\mathfrak{A} \leqslant_\alpha \mathfrak{B}$;

2) любое Σ_α-предложение языка $\mathcal{L}$, истинное в $\mathfrak{B}$, является истинным и в $\mathfrak{A}$;

3) любое Π_α-предложение языка $\mathcal{L}$, истинное в $\mathfrak{A}$, является истинным и в $\mathfrak{B}$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что формула $(a_1, \ldots, a_n \mid b)$ является сокращенной формой записи следующей формулы:

$$(b = a_1 \vee \ldots \vee a_n)\ \&\ \Big(\mathop{\&}_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i \wedge a_j = 0\Big).$$

Разбиением булевой алгебры $\mathfrak{B}$ будем называть конечный набор булевых алгебр $\mathfrak{B}^1, \ldots, \mathfrak{B}^n$ такой, что существует набор $b_1, \ldots, b_n$ элементов $\mathfrak{B}$, удовлетворяющий следующим свойствам:

1) $(b_1, \ldots, b_n \mid 1)$;

2) $\widehat{b_i} \cong \mathfrak{B}^i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$.

То, что набор $\mathfrak{B}^1, \ldots, \mathfrak{B}^n$ является разбиением $\mathfrak{B}$ будем обозначать следующим образом:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{B}^n.$$

Говоря о равномерной вычислимости по ординалам $\beta < \alpha$ для данного вычислимого ординала α, будем считать, что мы фиксируем некоторое $a \in O$ — обозначение для α, и речь идет о равномерной вычислимости по обозначениям $b <_O a$.

Прежде чем приступить к изложению доказательства, приведем некоторые нужные нам определения и результаты, полученные в [3; 14].

Определение 1. Пусть $2 \leqslant \alpha < \omega_1^{CK}$. Вычислимая структура $\mathfrak{A}$ называется α-*дружественной*, если отношения $\leqslant_\beta$ на кортежах из $\mathfrak{A}$ вычислимо перечислимы равномерно по $\beta < \alpha$.

Определение 2. Пусть $\bar{c}, \bar{a} \in \mathfrak{A}$, $2 \leqslant \alpha < \omega_1^{CK}$. Говорят, что $\bar{a}$ является α-*свободным* над $\bar{c}$, если для любого $\bar{a}_1 \in \mathfrak{A}$ и любого $1 \leqslant \beta < \alpha$ существуют $\bar{a}'$ и $\bar{a}_1'$ такие, что

$$\bar{c}, \bar{a}, \bar{a}_1 \leqslant_\beta \bar{c}, \bar{a}', \bar{a}_1' \quad \& \quad \bar{c}, \bar{a}' \nleqslant_\alpha \bar{c}, \bar{a}.$$

Лемма 1 (Эш). *Пусть $\bar{a}, \bar{b}$ — кортежи длиной $n \geqslant 1$ из булевой алгебры $\mathfrak{B}$, α — ординал. Тогда $\bar{a} \leqslant_\alpha \bar{b}$ тогда и только тогда, когда для любой функции $\varepsilon\colon \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ для элементов $c_\varepsilon = a_1^{\varepsilon(1)} \wedge a_2^{\varepsilon(2)} \wedge \ldots \wedge a_n^{\varepsilon(n)}$ и $d_\varepsilon = b_1^{\varepsilon(1)} \wedge b_2^{\varepsilon(2)} \wedge \ldots \wedge b_n^{\varepsilon(n)}$ алгебры $\mathfrak{B}$ выполнено $\widehat{c_\varepsilon} \leqslant_\alpha \widehat{d_\varepsilon}$.*

Лемма 2 (Эш). *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — ненулевые булевы алгебры. $\mathfrak{A} \leqslant_1 \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ бесконечна или $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}(n)$ и $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(m)$, где $m \leqslant n$. Для $\beta > 1$ $\mathfrak{A} \leqslant_\beta \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда для любого $1 \leqslant \gamma < \beta$ и любого разбиения $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{B}^s$ существует разбиение $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}^s$ такое, что $\mathfrak{B}^i \leqslant_\gamma \mathfrak{A}^i$.*

Лемма 3 (Эш). *Пусть α, β — ординалы, $m, n \in \omega \setminus \{0\}$, δ — предельный ординал или ноль, $k \in \omega$.*

(a) $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times m) \leqslant_{\delta+2k+1} \mathfrak{B}(\omega^\beta \times n)$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1) $\alpha = \beta < \delta + k$ *и* $m = n$;

2) $\alpha = \beta = \delta + k$ *и* $m \geqslant n$;

3) $\alpha \geqslant \delta + k + 1$ *и* $\beta \geqslant \delta + k$.

(b) $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times m) \leqslant_{\delta+2k} \mathfrak{B}(\omega^\beta \times n)$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1) $\alpha = \beta < \delta + k$ *и* $m = n$;

2) $\alpha, \beta \geqslant \delta + k$.

Теорема 1 (Эш). *Пусть $\mathfrak{A}$ — α-дружественная структура. Предположим, что для каждого кортежа $\bar{c} \in \mathfrak{A}$ можно эффективно найти кортеж $\bar{a}$, являющийся α-свободным над $\bar{c}$. Также предположим, что отношение $\not\leqslant_\alpha$ вычислимо перечислимо. Тогда существует вычислимое представление $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ такое, что не существует Δ^0_α-изоморфизма $F\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.*

2. Доказательство основного результата

Лемма 4. *Пусть δ — предельный ординал или ноль, $n \in \omega$, $\delta < \omega_1^{CK}$, $\delta + n \geqslant 1$. Булева алгебра $\mathfrak{B}(\omega^{\delta+n} \times \eta)$ является относительно $\Delta^0_{\delta+2n+1}$-категоричной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\mathfrak{B}(\omega^{\delta+n} \times \eta)$ обладает формальным $\Sigma^0_{\delta+2n+1}$-семейством Скотта.

В дальнейшем можно считать, что мы рассматриваем вычислимое представление $\mathfrak{B}(\omega^{\delta+n} \times \eta)$, в котором итерированные идеалы Фреше F_β равномерно вычислимы по $\beta \leqslant \delta + n$ и множества F_β-атомов равномерно вычислимы по $\beta < \delta + n$. Будем обозначать это представление $\mathfrak{B}$.

Выберем некоторое $a \in O$ такое, что $|a|_O = \delta + n$. Пусть $W \leftrightharpoons \{b \mid b <_O a\}$. Известно, что W является вычислимо перечислимым множеством, и для любого $\beta < \delta + n$ существует единственное $b \in W$ такое, что $|b|_O = \beta$.

Пусть $\bar{a} = a_1, \ldots, a_s \in \mathfrak{B}$. Рассмотрим $b_1, \ldots, b_m$ — атомы подалгебры, порожденной $\bar{a}$. Заметим, что $b_j = t_j(\bar{a})$ при $j = 1, \ldots, m$, где t_j — некоторый терм языка булевых алгебр $\mathcal{L}_{BA}$. Для каждого b_j выполнен в точности один из следующих случаев.

Случай 1. $b_j \in \mathrm{F}_{\beta+1} \setminus \mathrm{F}_\beta$ для некоторого ординала $0 \leqslant \beta < \delta + n$.

Пусть $\beta = \lambda + k$, где λ — предельный ординал или ноль, $k \in \omega$. Предположим, что b_j является суммой q_j F_β-атомов. Определим формулу

$$\varphi_{\bar{a}}^{t_j(\bar{a})}(\bar{x}) \leftrightharpoons \exists y_1 \ldots \exists y_{q_j} \Big(y_1, \ldots, y_{q_j} \mid t_j(\bar{x}) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{l=1}^{q_j} \big(y_l/_{\mathrm{F}_\beta} - \text{атом}\big)\Big).$$

Это $\Sigma_{\lambda+2k+2}$-формула.

Случай 2. $b_j \notin \mathrm{F}_{\delta+n}$.

Определим формулу

$$\varphi_{\bar{a}}^{t_j(\bar{a})}(\bar{x}) \leftrightharpoons (t_j(\bar{x}) \neq 0) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \mathop{\&}_{(b,s) \in W \times (\omega \setminus \{0\})} \neg \exists y_1 \ldots \exists y_s \Big(y_1, \ldots, y_s \mid t_j(\bar{x}) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{l=1}^{s} \big(y_l/_{\mathrm{F}_{|b|_O}} - \text{атом}\big)\Big).$$

Это $\Pi_{\delta+2n}$-формула.

Полагаем

$$\varphi_{\bar a}(\bar x) \leftrightharpoons \mathop{\&}_{j=1}^{m} \varphi_{\bar a}^{t_j(\bar a)}(\bar x).$$

Покажем, что $\Theta \leftrightharpoons \{\varphi_{\bar a}(\bar x) \mid \bar a \in \mathfrak{B}\}$ является формальным $\Sigma^0_{\delta+2n+1}$-семейством Скотта.

Ясно, что с помощью перебора по типам изоморфизма наборов $\bar a \in \mathfrak{B}$ (рассматривая всевозможные типы изоморфизма алгебр $\widehat{b}_j$, где $b_1, \ldots, b_m$ — все атомы подалгебры, порожденной $\bar a$) можно эффективно построить Θ. Также легко понять, что $\forall \bar a \in \mathfrak{B}$ $(\mathfrak{B} \models \varphi_{\bar a}(\bar a))$. Вследствие [3. § 6.2. Пример 5] идеал F_β в булевой алгебре может быть выражен $\Sigma^c_{2\beta}$-формулой, причем равномерно по β, следовательно, для любого $\bar a \in \mathfrak{B}$ формула $\varphi_{\bar a}(x)$ является вычислимой $\Sigma_{\delta+2n+1}$-формулой.

Пусть $\mathfrak{B} \models \varphi_{\bar a}(\bar c)$ и $\mathfrak{B} \models \varphi_{\bar a}(\bar d)$. Докажем, что $(\mathfrak{B}, \bar c) \cong (\mathfrak{B}, \bar d)$.

Полагаем $e_j \leftrightharpoons t_j(\bar c)$, $f_j \leftrightharpoons t_j(\bar d)$ при $j = 1, \ldots, m$.

Предположим, что формула $\varphi_{\bar a}^{t_j(\bar a)}(\bar x)$ говорит о том, что $t_j(\bar x)$ есть сумма q_j F_β-атомов для некоторого $\beta < \delta + n$. В этом случае алгебра $\widehat{e}_j$ изоморфна алгебре $\widehat{f}_j$, так как $\widehat{e}_j/_{\mathrm{F}_\beta} \cong \mathfrak{B}(q_j) \cong \widehat{f}_j/_{\mathrm{F}_\beta}$, а $\widehat{e}_j$ и $\widehat{f}_j$ β-атомны. В противном случае $\varphi_{\bar a}^{t_j(\bar a)}(\bar x)$ говорит о том, что $t_j(\bar x)$ не лежит в $\mathrm{F}_{\delta+n}$, следовательно, $\widehat{e}_j \cong \mathfrak{B}(\omega^{\delta+n} \times \eta) \cong \widehat{f}_j$.

Итак, для любого $1 \leqslant j \leqslant m$ мы показали, что $\widehat{e}_j \cong \widehat{f}_j$, следовательно, существует изоморфизм $\psi\colon (\mathfrak{B}, \bar e) \cong (\mathfrak{B}, \bar f)$. Заметим, что $c_i = t^i(\bar e)$, $d_i = t^i(\bar f)$, где t^i — некоторые термы языка $\mathcal{L}_{BA}$. Поэтому $\psi\colon (\mathfrak{B}, \bar c) \cong (\mathfrak{B}, \bar d)$.

Лемма 4 доказана.

Замечание 1. Пусть α и β — ординалы, δ — предельный ординал или ноль, k, l — натуральные числа, $l \neq 0$. Если $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l) \leqslant_{\delta+2k+1} \mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$, то

$$\beta \geqslant \delta + k \ \& \ \alpha \geqslant \delta + k + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta = \lambda + n$, где λ — предельный ординал или 0, $n \in \omega$.

В $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$ истинна следующая $\Sigma_{\lambda+2n+3}$-формула:

$$\varphi_1 \leftrightharpoons \exists x \left(x/_{\mathrm{F}_{\lambda+n}} \text{ — безатомный } \& \ x \notin \mathrm{F}_{\lambda+n}\right).$$

Ясно, что для любых α и l $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l) \not\models \varphi_1$. Следовательно, $\delta + 2k + 1$ должно быть меньше $\lambda + 2n + 3$, т.е. $\delta + k \leqslant \beta$.

В $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$ истинна $\Sigma_{\delta+2k+1}$-формула

$$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x_1 \ldots \exists x_{l+1} \Big(\Big(\mathop{\&}_{i=1}^{l+1} x_i \notin \mathrm{F}_{\delta+k}\Big) \ \& \ \Big(\mathop{\&}_{i \neq j} x_i \wedge x_j \in \mathrm{F}_{\delta+k}\Big) \ \& \ \Big(\mathrm{C}\Big(\bigvee_{i=1}^{l+1} x_i\Big) \in \mathrm{F}_{\delta+k}\Big)\Big).$$

Из того, что в $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l)$ должна быть истинна формула φ_2, легко вывести, что $\delta + k < \alpha$.

Замечание 2. Пусть α и β — ординалы, δ — предельный ординал или ноль, k, l — натуральные числа, $l \neq 0$ и $\delta + k \geqslant 1$. Если $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l) \leqslant_{\delta+2k} \mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$, то

$$\beta + 1 \geqslant \delta + k \ \& \ \alpha \geqslant \delta + k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью формулы φ_1 из доказательства замечания 1 можно получить следующее ограничение: $\delta + k \leqslant \beta + 1$.

Выберем некоторый ординал $\gamma < \delta + k$ и представим его в виде $\gamma = \mu + m$, где μ — предельный ординал или ноль, $m \in \omega$. В $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$ истинна следующая $\Sigma_{\mu+2m+1}$-формула:

$$\varphi_2^\gamma \leftrightharpoons \exists x_1 \ldots \exists x_{l+1} \Big(\Big(\mathop{\&}_{i=1}^{l+1} x_i \notin \mathrm{F}_\gamma\Big) \mathbin{\&} \Big(\mathop{\&}_{i\neq j} x_i \wedge x_j \in \mathrm{F}_\gamma\Big) \mathbin{\&} \Big(\mathrm{C}\Big(\bigvee_{i=1}^{l+1} x_i\Big) \in \mathrm{F}_\gamma\Big)\Big).$$

Из того, что в $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l)$ должна быть истинна формула φ_2^γ, легко вывести, что $\gamma < \alpha$. В силу произвольности выбора ординала $\gamma < \delta + k$ получаем, что $\alpha \geqslant \delta + k$.

Замечание 3. Пусть α, β — ординалы, δ — предельный ординал или ноль, k, l — натуральные числа, $l \neq 0$ и $\delta + k \geqslant 1$. Если $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta) \leqslant_{\delta+2k} \mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l)$, то

$$\beta \geqslant \delta + k \mathbin{\&} \alpha \geqslant \delta + k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы φ_2^γ (при $\gamma < \delta + k$) из доказательства замечания 2, можно получить следующее ограничение: $\alpha \geqslant \delta + k$.

Пусть $\beta = \lambda + n$, где λ — предельный ординал или ноль, $n \in \omega$. В $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$ истинна $\Pi_{\lambda+2n+2}$-формула

$$\psi \leftrightharpoons \neg(\exists x)(x/_{\mathrm{F}_\beta} \text{ — атом}).$$

Если $\beta+1 \leqslant \delta+k$, то $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l) \models \psi$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\beta \geqslant \alpha+1$. Следовательно, $(\beta + 1 > \delta + k) \ \vee \ (\delta + k \geqslant \beta + 1 > \alpha + 1)$.

Объединяя полученные выше ограничения, получаем то, что требовалось доказать.

В качестве непосредственного следствия получаем следующее замечание.

Замечание 4. Пусть α, β — ординалы, δ — предельный ординал или ноль, k, l — натуральные числа, $l \neq 0$. Если $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta) \leqslant_{\delta+2k+1} \mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l)$, то

$$\beta \geqslant \delta + k \mathbin{\&} \alpha \geqslant \delta + k.$$

Лемма 5. *Пусть α, β — ординалы, δ — предельный ординал или ноль, k, l — натуральные числа, $l \neq 0$.*

(a) *Предположим, что $\delta + k \geqslant 1$.*

1) $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta) \leqslant_{\delta+2k} \mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l)$ *тогда и только тогда, когда* $\beta \geqslant \delta + k$ *и* $\alpha \geqslant \delta + k$;

2) $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l) \leqslant_{\delta+2k} \mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$ *тогда и только тогда, когда* $\beta + 1 \geqslant \delta + k$ *и* $\alpha \geqslant \delta + k$;

(b) 1) $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta) \leqslant_{\delta+2k+1} \mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l)$ *тогда и только тогда, когда* $\beta \geqslant \delta + k$ *и* $\alpha \geqslant \delta + k$;

2) $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l) \leqslant_{\delta+2k+1} \mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$ *тогда и только тогда, когда* $\beta \geqslant \delta + k$ *и* $\alpha \geqslant \delta + k + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость приведенных нами условий следует из замечаний 1–4. Проведем доказательство достаточности индукцией по ординалам $\xi = \delta + t$ (на каждом шаге будем рассматривать соответствующее отношение $\leqslant_\xi$).

База индукции. Пусть $\xi = 1$.

Так как $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$ бесконечна, то в силу леммы 2 для любых β, α и $l \neq 0$

$$\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta) \leqslant_1 \mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l).$$

Если $\alpha \geqslant 1$, то $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l)$ — бесконечна, следовательно, по той же лемме, для любых β и $l \neq 0$

$$\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l) \leqslant_1 \mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta).$$

Шаг индукции. Пусть $\xi > 1$, и для всех $\varkappa < \xi$ утверждение уже доказано.

Случай (a). $\xi = \delta + 2k$

(a.1) Рассмотрим разбиение $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l) = \mathfrak{B}^1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{B}^s$. Можно считать, что

$$\begin{gathered}
\mathfrak{B}^1 \cong \mathfrak{B}(\omega^{\alpha_1} \times l_1),\ \ldots,\ \mathfrak{B}^{s_1} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\alpha_1} \times l_{s_1}),\\
\mathfrak{B}^{s_1+1} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\alpha_2} \times l_{s_1+1}),\ \ldots,\ \mathfrak{B}^{s_2} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\alpha_2} \times l_{s_2}),\\
\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{B}^{s_{p-1}+1} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\alpha_p} \times l_{s_{p-1}+1}),\ \ldots,\ \mathfrak{B}^{s_p} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\alpha_p} \times l_{s_p}),\\
\mathfrak{B}^{s_p+1} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\alpha} \times l_{s_p+1}),\ \ldots,\ \mathfrak{B}^{s} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\alpha} \times l_{s}),\\
0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p < \alpha;\ \ l_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, s.
\end{gathered}$$

Предположим, что $\beta \geqslant \delta + k$ и $\alpha \geqslant \delta + k$. Выберем некоторое $1 \leqslant \varkappa < \delta + 2k$.

(a.1.1) Рассмотрим случай $\varkappa = \mu + 2q + 1$, где μ — предельный ординал или ноль, $q \in \omega$. Тогда $\delta + k > \mu + q$.

Пусть $1 \leqslant i \leqslant s$. Предположим, что мы уже определили $a_j \in \mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta)$ для всех $1 \leqslant j < i$. Рассмотрим $\mathfrak{B}^i \cong \mathfrak{B}(\omega^{\alpha_{p_i}} \times l_i)$. Положим $c_i \leftrightharpoons \mathrm{C}\Big(\bigvee\limits_{j<i} a_j\Big)$.

Если $\alpha_{p_i} \leqslant \mu + q$, то выберем $a_i \in \widehat{c}_i$ такое, что $\widehat{a}_i \cong \mathfrak{B}^i$. Мы можем это сделать, так как $\alpha_{p_i} < \beta$. Очевидно, что $\mathfrak{B}^i \leqslant_{\mu+2q+1} \widehat{a}_i$. Если $\alpha_{p_i} > \mu + q$, то выберем $a_i \in \widehat{c}_i$ такое, что

$$\begin{cases}
\widehat{a}_i \cong \mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta) \cong \widehat{c_i \wedge C(a_i)}, & i < s;\\
a_i = c_i, & i = s.
\end{cases}$$

По предположению индукции для случая (b.2) $\mathfrak{B}^i \leqslant_{\mu+2q+1} \widehat{a}_i$.

Для каждого $i \leqslant s$ полагаем $\mathfrak{A}^i \leftrightharpoons \widehat{a}_i$.

(a.1.2) В случае, если $\varkappa = \mu + 2q$ (где μ — предельный ординал или ноль, $q \in \omega$), заметим, что $\mu + 2q + 1 < \delta + 2k$, поэтому построение $\mathfrak{A}^i$ можно провести так же, как в случае (a.1.1).

Таким образом, мы нашли разбиение $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta) = \mathfrak{A}^1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}^s$ такое, что $\mathfrak{B}^i \leqslant_\varkappa$ $\leqslant_\varkappa \mathfrak{A}^i$, и, следовательно, по лемме 2 (в силу произвольности выбора $1 \leqslant \varkappa < \delta + 2k$), $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta) \leqslant_{\delta+2k} \mathfrak{B}(\omega^\alpha \times l)$.

(a.2) Рассмотрим разбиение $\mathfrak{B}(\omega^\beta \times \eta) = \mathfrak{B}^1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{B}^s$. Можно считать, что

$$\mathfrak{B}^1 \cong \mathfrak{B}(\omega^{\beta_1} \times l_1),\ \ldots,\ \mathfrak{B}^{s_1} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\beta_1} \times l_{s_1}),$$

$$\mathfrak{B}^{s_1+1} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\beta_2} \times l_{s_1+1}),\ \ldots,\ \mathfrak{B}^{s_2} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\beta_2} \times l_{s_2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{B}^{s_{p-1}+1} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\beta_p} \times l_{s_{p-1}+1}),\ \ldots,\ \mathfrak{B}^{s_p} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\beta_p} \times l_{s_p}),$$
$$\mathfrak{B}^{s_p+1} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\beta} \times \eta),\ \ldots,\ \mathfrak{B}^{s} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\beta} \times \eta),$$
$$0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_p < \beta;\quad l_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, s_p$$

Пусть $\beta + 1 \geqslant \delta + k$ и $\alpha \geqslant \delta + k$. Выберем некоторое $1 \leqslant \varkappa < \delta + 2k$.

(a.2.1) Рассмотрим случай $\varkappa = \mu + 2q + 1$, где μ — предельный ординал или ноль, $q \in \omega$. Тогда $\delta + k > \mu + q$.

Пусть $1 \leqslant i \leqslant s$. Предположим, что $a_j \in \mathfrak{B}(\omega^{\alpha} \times l)$ уже определены для всех $1 \leqslant j < i$. Определим c_i так же, как в пункте (a.1.1).

Рассмотрим $\mathfrak{B}^i \cong \mathfrak{B}(\omega^{\beta_{p_i}} \times l_i)$. Если $\beta_{p_i} \leqslant \mu + q$, то выберем $a_i \in \widehat{c}_i$ такое, что $\widehat{a}_i \cong \mathfrak{B}^i$. Мы можем это сделать, так как $\beta_{p_i} < \alpha$. Если $\beta_{p_i} \geqslant \mu + q + 1$, то выберем $a_i \in \widehat{c}_i$ такое, что $\widehat{a}_i \cong \mathfrak{B}(\omega^{\mu+q})$. По лемме 3 (пункт a.3), $\mathfrak{B}(\omega^{\beta_{p_i}} \times l_i) \leqslant_{\mu+2q+1} \widehat{a}_i$.

Рассмотрим $\mathfrak{B}^i \cong \mathfrak{B}(\omega^{\beta} \times \eta)$. Если $i < s$, то выберем $a_i \in \widehat{c}_i$ такое, что $\widehat{a}_i \cong \mathfrak{B}(\omega^{\mu+q})$. Согласно индукционному предположению (b.1) получаем, что $\mathfrak{B}^i \leqslant_{\mu+2q+1} \widehat{a}_i$. Если $i = s$, то полагаем $a_s \leftrightharpoons c_s$. По индукционному предположению (b.1)

$$\mathfrak{B}^s \leqslant_{\mu+2q+1} \mathfrak{B}(\omega^{\alpha} \times l) \cong \widehat{a}_s\,.$$

Для любого i полагаем $\mathfrak{A}^i \leftrightharpoons \widehat{a}_i$.

(a.2.2) В случае, если $\varkappa = \mu + 2q$ (где μ — предельный ординал или ноль, $q \in \omega$), построение $\mathfrak{A}^i$ можно провести так же, как в случае (a.2.1).

Мы нашли разбиение $\mathfrak{B}(\omega^{\alpha} \times l) = \mathfrak{A}^1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}^s$ такое, что $\mathfrak{B}^i \leqslant_{\varkappa} \mathfrak{A}^i$, и, следовательно, по лемме 2, $\mathfrak{B}(\omega^{\alpha} \times l) \leqslant_{\delta+2k} \mathfrak{B}(\omega^{\beta} \times \eta)$.

Случай (b). $\xi = \delta + 2k + 1$. Доказательство аналогично доказательству случая (a), поэтому вместо подробных рассуждений здесь мы приведем только указания на то, каким образом выбираются $\mathfrak{A}^i = \widehat{a}_i$.

(b.1) Предположим, что $\beta \geqslant \delta + k$ и $\alpha \geqslant \delta + k$. Рассмотрим разбиение $\mathfrak{B}(\omega^{\alpha} \times l) = \mathfrak{B}^1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{B}^s$. Можно считать, что это разбиение имеет такой же вид, как и в случае (a.1).

Достаточно рассмотреть случай $\varkappa = \delta + 2k$. Выбор типов изоморфизма $\widehat{a}_i$ осуществляется следующим образом: если $\alpha_{p_i} < \delta + k$, то мы выбираем $\widehat{a}_i \cong \mathfrak{B}^i$, в противном случае выбирается $\widehat{a}_i \cong \mathfrak{B}(\omega^{\beta} \times \eta)$.

(b.2) Предположим, что $\beta \geqslant \delta + k$ и $\alpha \geqslant \delta + k + 1$. Рассмотрим разбиение $\mathfrak{B}(\omega^{\beta} \times \eta) = \mathfrak{B}^1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{B}^s$. Можно считать, что это разбиение имеет такой же вид, как и в случае (a.2).

Достаточно рассмотреть случай $\varkappa = \delta + 2k$. Выбор типов изоморфизма $\widehat{a}_i$ осуществляется следующим образом:

1) для $\mathfrak{B}^i \cong \mathfrak{B}(\omega^{\beta_{p_i}} \times l_i)$: если $\beta_{p_i} \leqslant \delta + k$, то мы выбираем $\widehat{a}_i \cong \mathfrak{B}^i$; если $\beta_{p_i} > \delta + k$, то выбирается $\widehat{a}_i \cong \mathfrak{B}(\omega^{\delta+k})$;

2) для $\mathfrak{B}^i \cong \mathfrak{B}(\omega^{\beta} \times \eta)$: если $i < s$, то мы выбираем $\widehat{a}_i \cong \mathfrak{B}(\omega^{\delta+k})$; если $i = s$, то выбирается $\widehat{a}_i \cong \mathfrak{B}(\omega^{\alpha} \times l)$.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть* δ *— предельный ординал или ноль,* $n \in \omega$, $\delta < \omega_1^{CK}$. *Булева алгебра* $\mathfrak{B}(\omega^{\delta+n+1} \times \eta)$ *не является* $\Delta^0_{\delta+2n+2}$*-категоричной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $a \in O$ — некоторое обозначение для ординала $\delta + n + 1$. Рассмотрим вычислимое представление $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\delta+n+1} \times \eta)$, в котором для любого элемента $x \neq 0$ мы можем эффективно определить тип его изоморфизма (т. е. понять, верно ли, что $\widehat{x} \cong \mathfrak{B}$, и если $\widehat{x} \not\cong \mathfrak{B}$, то найти пару (b, l) такую, что $b <_O a$, $l \geqslant 1$ и $\widehat{x} \cong \mathfrak{B}(\omega^{|b|_O} \times l)$).

Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{B}$ — кортежи длиной $m \geqslant 1$, и $1 \leqslant \beta < \delta + 2n + 2$. Как определить, истинно ли $\bar{a} \leqslant_{\beta} \bar{b}$?

Для каждой функции $\varepsilon\colon \{1, \ldots, m\} \to \{0, 1\}$ определим следующие элементы $\mathfrak{B}$:

$$c_{\varepsilon} = a_1^{\varepsilon(1)} \wedge \ldots \wedge a_m^{\varepsilon(m)}, \quad d_{\varepsilon} = b_1^{\varepsilon(1)} \wedge \ldots \wedge b_m^{\varepsilon(m)}.$$

Определив типы изоморфизма элементов c_{ε} и d_{ε}, с помощью лемм 3 и 5 можно легко проверить, истинно ли $\widehat{c}_{\varepsilon} \leqslant_{\beta} \widehat{d}_{\varepsilon}$. Далее пользуемся тем, что, по лемме 1,

$$\bar{a} \leqslant_{\beta} \bar{b} \iff (\forall \varepsilon\colon \{1, \ldots, m\} \to \{0, 1\})\, (\widehat{c}_{\varepsilon} \leqslant_{\beta} \widehat{d}_{\varepsilon}).$$

Таким образом, можно утверждать, что в $\mathfrak{B}$ отношения $\leqslant_{\beta}$ вычислимы равномерно по $\beta < \delta+2n+2$, следовательно, $\mathfrak{B}$ — $(\delta+2n+2)$-дружественная булева алгебра. Используя аналогичные рассуждения, легко показать, что в $\mathfrak{B}$ отношение $\not\leqslant_{\delta+2n+2}$ вычислимо.

Пусть $\bar{c} \in \mathfrak{B}$, и $d_1, \ldots, d_s$ — атомы подалгебры, порожденной $\bar{c}$. Без ограничения общности можно считать, что $\widehat{d_1} \cong \mathfrak{B}$. Выберем $a < d_1$ такой, что $\widehat{a} \cong \mathfrak{B} \cong \widehat{d_1 \wedge C}(a)$. Покажем, что элемент a $(\delta + 2n + 2)$-свободен над $\bar{c}$.

Пусть $\bar{b} \in \mathfrak{B}$, и $e_0, e_1, \ldots, e_t, e_{t+1}, \ldots, e_q$ — атомы подалгебры, порожденной $\bar{c}, a, \bar{b}$, причем $e_0 \leqslant d_1 \wedge C(a)$ и $\widehat{e}_0 \cong \mathfrak{B}$, а $e_1, \ldots, e_t$ — все атомы, лежащие под a.

Определим элементы $f_0, f_1, \ldots, f_t, f_{t+1}, \ldots, f_q$. Пусть $1 \leqslant j \leqslant t$. Если $\widehat{e}_j$ — суператомная алгебра, то полагаем $f_j \risingdotseq e_j$. Если $\widehat{e}_j \cong \mathfrak{B}$, то выбираем в качестве f_j некоторый $\mathrm{F}_{\delta+n}$-атом, лежащий под e_j.

$$f_0 \risingdotseq e_0 \vee \bigvee_{j=1}^{t} (e_j \wedge C(f_j)); \qquad f_j \risingdotseq e_j, \quad j = t+1, \ldots, q.$$

Определим a' и $\bar{b}'$ следующим образом:

$$a' \risingdotseq \bigvee_{j=1}^{t} f_j; \qquad b'_i \risingdotseq \bigvee_{j\colon e_j \leqslant b_i} f_j, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Ясно, что $\widehat{a'} \cong \mathfrak{B}(\omega^{\delta+n} \times l)$ для некоторого $l \geqslant 1$. По лемме 5 (пункт a.2), $\widehat{a'} \not\leqslant_{\delta+2n+2} \widehat{a}$. Следовательно, по лемме 1,

$$\bar{c}, a' \not\leqslant_{\delta+2n+2} \bar{c}, a.$$

Так как $\widehat{e}_j \leqslant_{\delta+2n+1} \widehat{f}_j$ (по лемме 5), то $\bar{c}, a, \bar{b} \leqslant_\beta \bar{c}, a', \bar{b}'$ для любого $\beta < \delta + 2n + 2$.

Итак, для любого кортежа $\bar{c} \in \mathfrak{B}$ существует $(\delta+2n+2)$-свободный над $\bar{c}$ элемент a, причем процедура его нахождения эффективна.

Следовательно, по теореме 1, существует вычислимое представление $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ такое, что не существует $\Delta^0_{\delta+2n+2}$-изоморфизма $F\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, т. е. булева алгебра $\mathfrak{B}(\omega^{\delta+n+1} \times \eta)$ не является $\Delta^0_{\delta+2n+2}$-категоричной.

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть δ — предельный ординал, $\delta < \omega_1^{CK}$. Булева алгебра $\mathfrak{B}(\omega^\delta \times \eta)$ не является Δ^0_δ-категоричной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно считать, что рассматривается вычислимая δ-дружественная булева алгебра $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega^\delta \times \eta)$, в которой отношение $\nleqslant_\delta$ вычислимо перечислимо.

Пусть $\bar{c} \in \mathfrak{B}$. Выберем a так же, как в доказательстве леммы 6. Доказательство того, что a является δ-свободным над $\bar{c}$, проводится аналогично доказательству леммы 6 за исключением следующих модификаций: фиксируются кортеж $\bar{b} \in \mathfrak{B}$ и ординал $\beta < \delta$, и при доказательстве того, что $\bar{c}, a' \nleqslant_\delta \bar{c}, a \;\&\; \bar{c}, a, \bar{b} \leqslant_\beta \bar{c}, a', \bar{b}'$ в случае, если атом e_j подалгебры, порожденной $\bar{c}, a, \bar{b}$, не является суператомным, в качестве f_j выбирается некоторый F_β-атом, лежащий под e_j.

По теореме 1, булева алгебра $\mathfrak{B}(\omega^\delta \times \eta)$ не является Δ^0_δ-категоричной. Лемма 7 доказана.

Теорема 2. *Булева алгебра $\mathfrak{B}(\omega^{\delta+n} \times \eta)$ (где δ — предельный ординал или ноль, $\delta < \omega_1^{CK}$, $n \in \omega$ и $\delta + n \geqslant 1$) является $\Delta^0_{\delta+2n+1}$-категоричной и не является $\Delta^0_{\delta+2n}$-категоричной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственное следствие лемм 4, 6 и 7.

Автор благодарит своего научного руководителя С. С. Гончарова за постановку задачи, постоянное внимание к работе и поддержку, а также рецензента, чьи замечания помогли существенно улучшить работу.

Список литературы

1. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.

2. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.

3. *Ash C. J., Khight J. F.* Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy. Elsevier Science, 2000.

4. *Ash C. J., Knight J. F., Manasse M., Slaman T.* Generic Copies of Countable Structures // Ann. Pure Appl. Logic. 1989. Vol. 42. No. 3. P. 195–205.

5. *Chisholm J.* Effective Model Theory vs. Recursive Model Theory // J. Symb. Logic. 1990. Vol. 55. No. 3. P. 1168–1191.

6. *Гончаров С. С.* О числе неавтоэквивалентных конструктивизаций // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 3. С. 257–282.

7. *Goncharov S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R.* Enumerations in Computable Structure Theory // Ann. Pure Appl. Logic. 2005. Vol. 136. No. 3. P. 219–246.

8. *Chisholm J., Fokina E. B., Goncharov S. S., Harizanov V. S., Knight J. F., Quinn S.* Intrinsic Bounds on Complexity and Definability at Limit Levels // J. Symb. Logic. 2009. Vol. 74. No. 3. P. 1047–1060.

9. *Гончаров С. С.* Автоустойчивость и вычислимые семейства конструктивизаций // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 6. С. 647–680.

10. *Гончаров С. С., Дзгоев В. Д.* Автоустойчивость моделей // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 1. С. 45–58.

11. *Remmel J. B.* Recursive Isomorphism Types of Recursive Boolean Algebras // J. Symb. Logic. 1981. Vol. 46. No. 3. P. 572–594.

12. *McCoy C.* Δ^0_2-Categoricity in Boolean Algebras and Linear Orderings // Ann. Pure Appl. Logic. 2003. Vol. 119. No. 1–3. P. 85–120.

13. *Мак-Кой Ч. Ф. Д.* О Δ^0_3-категоричности для линейных порядков и булевых алгебр // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 5. С. 531–552.

14. *Ash C. J.* Categoricity in Hyperarithmetical Degrees // Ann. Pure Appl. Logic. 1987. Vol. 34. No. 1. P. 1–14.

Материал поступил в редколлегию 05.01.2010

Адрес автора

БАЖЕНОВ Николай Алексеевич

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: nickbazh@yandex.ru