Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

F. G. Avkhadiev, S. B. Shabalina, Zeros of coefficients of transformations and conditions for the solvability of inverse boundary value problems,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1994, Number 8, 3–10

https://www.mathnet.ru/eng/ivm4249

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
December 16, 2025, 20:14:23

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1994 МАТЕМАТИКА № 8 (387)

УДК 517.544

Ф.Г. АВХАДИЕВ, С.Б. ШАБАЛИНА

НУЛИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Разрешимость и число решений внешних обратных краевых задач [1]-[2] зависит от существования и числа корней некоторых трансцендентных уравнений. Достаточно полно исследовано лишь уравнение первого порядка, называемое уравнением Ф.Д.Гахова (см. напр., [3]-[6]).

В данной статье описана структура корней уравнения n-го порядка, полученного в [7], и общих корней первых n уравнений. Обнаружена также неожиданная связь этих корней с нулями коэффициентов линейных преобразований, широко используемых в геометрической теории функций.

Приведем сначала необходимые нам сведения. Рассмотрим известное преобразование

$$f(\zeta; a) = \frac{f(T) - f(a)}{f'(a)(1-|a|^2)} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(a, f)\zeta^m \tag{1}$$

в круге $E=\{\zeta\colon |\zeta|<1\}$. Здесь $T=(\zeta+a)/(1+\bar{a}\zeta)$ есть дробно-линейное отображение с фиксированным $a\in E$, $f(\zeta)$ - аналитическая и локально однолистная в круге E функция. Отметим, что $c_1(a, f)=1$ для любого $a\in E$.

Оказывается, что при $n\geqslant 2$ существует простая связь между нулями $c_n(\zeta, f)$ и условиями разрешимости внешних обратных краевых задач на римановых поверхностях, т.е. задач об отыскании области D_z и аналитической в ней функции $w(z)$ по заданным значениям на искомой границе

$$w(z)\big|_{L_z} = u(s) + iv(s), \quad 0\leqslant s\leqslant l, \tag{2}$$

где s - дуговая абсцисса $L_z=\partial D_z$. Задаются также классы искомых областей D_z и искомых решений $w(z)$.

Следуя работе [7], будем считать искомую область D_z локально однолистной во всех конечных точках и имеющей точку ветвления порядка $n-1$ над точкой $z=\infty$. Тогда отображение $F\colon E\to D_z$ может быть представлено в виде

$$F(\zeta) = \int f'(\zeta)[(1-\bar{a}\zeta)/(\zeta-a)]^{n+1}d\zeta. \tag{3}$$

Здесь $f(\zeta)$ - аналитическая, локально однолистная в E функция, однозначно определяемая граничными условиями (2) и нормировкой Римана $f(0)=0$, $f'(0)>0$. Согласно общепризнанной терминологии ([1], § 33; [2], гл. I), функция $f(\zeta)$ определяет решение внутренней обратной краевой задачи с условием (2).

Формула (3) дает искомое отображение тогда и только тогда, когда параметр a из формулы (3) принадлежит кругу E и является корнем уравнения

$$f'(a)(1-|a|^2)g_n(a, f) = \operatorname{res}_a\left[f'(\zeta)\left(\frac{1-\bar{a}\zeta}{\zeta-a}\right)^{n+1}\right] = 0. \tag{4}$$

Равенство (4) является условием разрешимости обратной краевой задачи. Действительно, если $g_n(a, f)\neq 0$, то функция $F(\zeta)$ из (3) будет иметь логарифмическую особенность в

точке $\zeta=a$. Следовательно, $F(E)$ не будет являться тогда областью, ограниченной кривой конечной длины l.

При $n=1$ уравнение (4) приобретает вид

$$\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)} = \frac{\bar{a}}{1-|a|^2}, \quad |a|<1. \tag{5}$$

Уравнение (5) было получено Ф.Д.Гаховым, он же доказал его разрешимость при определенных условиях на функцию $\ln|f'(\zeta)|$ (см. [1], § 33). В дальнейшем исследованию задачи Ф.Д.Гахова и уравнения (5) был посвящен ряд работ: сначала В.С.Рогожина и С.Н.Кудряшова, затем Л.А.Аксентьева, Р.Г.Авхадиева, А.В.Казанцева, А.В.Киселева, С.Р.Насырова, Ю.Е.Хохлова и других математиков (см. [1]–[7]). Отметим два интересных факта. Байокки, Стампаккья и Фридман ([8], сс.411, 440) доказали конечность некоторого множества, определяющего предельное положение границ в одной задаче теории плазмы. Изучаемое ими множество является специальным подмножеством корней уравнения Ф.Д.Гахова (5). Л.А.Аксентьев [5] обнаружил и использовал геометрический смысл уравнения (5): корни уравнения Ф.Д.Гахова являются критическими точками конформного радиуса области $D=f(E)$.

При $n\geq 2$ для уравнения (4) доказано лишь одно утверждение об условиях существования корня [7]. Трудность исследования уравнений высших порядков обусловлена тем, что при $n>1$ отсутствует непосредственная связь с конформным радиусом.

В теоремах 1 и 2 дано описание структуры множества

$$G_n(f) = \{a\in E:\ g_n(a,f)=0\} \tag{6}$$

корней уравнений Ф.Д.Гахова порядка n, а также множества

$$C_n(f) = \bigcap_{k=1}^{n} G_k(f) \tag{7}$$

общих корней первых n уравнений.

Аналогом теорем Байокки, Стампаккья, Фридмана из ([8], с. 411) и А.В. Киселева, С.Р.Насырова [6] является

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $n\geq 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $G_{n-1}(f)$ имеет не более одной точки, $G_{n-1}(f)\cap G_n(f)=\varnothing$ и выполняется условие*

$$\lim_{|\zeta|\to 1}(1-|\zeta|)|f''(\zeta)/f'(\zeta)| = 0, \tag{8}$$

то множество $G_n(f)$ конечно;

2) *в общем случае либо точка $\zeta_0\in G_n(f)$ изолирована от других нулей $g_n(\zeta,f)$, либо существует такая окрестность $U(\zeta_0)$, что $G_n(f)\cap U(\zeta_0)$ состоит из k аналитических дуг, причем $k\leq n$ и эти дуги пересекаются в единственной точке $\zeta=\zeta_0$.*

Для описания множества (7) потребуются следующие обозначения:

$$P_n(f) = \{\zeta\in E:\ p_k(\zeta,f)=\bar{\zeta}^{k-1},\ k=2,\dots,n+1\},$$

где

$$p_k(\zeta,k) = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(\zeta)}{f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2)^{k-1}, \tag{9}$$

$$S_n(f) = \{\zeta\in E:\ g_1(\zeta,f)=0,\ \{f,\zeta\}^{(k)}=0,\ k=0,\dots,n-2\},$$

где $\{f,\zeta\}=(f''(\zeta)/f'(\zeta))'-(1/2)(f''(\zeta)/f'(\zeta))^2$ – шварциан функции $f(\zeta)$, $\{f,\zeta\}^{(k)}$ – его производные, $\{f,\zeta\}^{(0)}\equiv\{f,\zeta\}$ по определению.

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. $C_n(f) = P_n(f) = S_n(f)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $n \geq 2$ множество $C_n(f)$ дискретно в E.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $f(\zeta)$ отлична от дробно-линейной функции, то существует такой номер $N(f)$, что множество $C_n(f)$ пусто при $n \geq N(f)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любого натурального n и любой точки $a \in E$ существует локально однолистная аналитическая в E функция $f(\zeta)$ такая, что $a \in C_n(f)$.

Сформулируем и докажем сначала несколько лемм, опираясь на которые обоснуем теоремы 1, 2 и следствия. Формулы, представляемые этими леммами, по-видимому, имеют и самостоятельное значение.

ЛЕММА 1. *При любых $\zeta \in E$ и целых неотрицательных n*

$$c_{n+1}(\zeta, f) = \frac{g_n(\zeta, f)}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \bar{\zeta}^{n-k} p_{k+1}(\zeta, f), \tag{10}$$

где коэффициент линейных преобразований $c_{n+1}(\zeta, f)$ определен в (1), $\binom{n}{k}$ – число сочетаний из n по k, а функции $g_n(\zeta, f)$ и $p_{k+1}(\zeta, f)$ определены соответственно в (4) и (9).

Действительно, как показано в [7],

$$g_n(\zeta, f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{(n-k)} \binom{n+1}{n-k} (k+1) \bar{\zeta}^{n-k} p_{k+1}(\zeta, f).$$

Простая связь между биномиальными коэффициентами

$$\binom{n+1}{n-k} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$$

показывает справедливость второго равенства в (10). Для $c_2(\zeta, f)$ и $c_3(\zeta, f)$ приведенное в (10) разложение по степеням ζ имеется во многих работах, в общем случае для $c_{n+1}(\zeta, f)$ такое разложение доказывается по индукции.

Как заметил А.В.Казанцев, нетривиальное равенство $c_{n+1}(a, f) = g_n(a, f)/(n+1)$ можно получить весьма просто на основании формул Коши для коэффициентов

$$\oint \frac{f'(T(\zeta))}{\zeta^{n+1}} T'(\zeta) d\zeta = \oint f'(T) \left(\frac{1 - \bar{a}T}{T - a} \right)^{n+1} dT,$$

где интегрирование ведется по окружности $|\zeta| = r < 1$, $T = (\zeta + a)/(1 + \bar{a}\zeta)$, $\zeta = (T - a)/(1 - \bar{a}T)$. Очевидно, левая часть равенства равна $2\pi i(1 - |a|^2) f'(a)(n+1) c_{n+1}(a, f)$, а правая часть – $2\pi i(1 - |a|^2) f'(a) g_n(a, f)$. Это доказательство было любезно предоставлено нам после нашего выступления с результатами данной работы на семинаре по геометрической теории функций (руководитель проф. Л.А.Аксентьев). При обсуждении выяснилось, что обнаруженное нами замечательное соотношение $c_{n+1}(\zeta, f) = g_n(\zeta, f)/(n+1)$ было доказано ранее А.В.Казанцевым, но не опубликовано им.

ЛЕММА 2. *При любом целом $n \geq 0$ справедлива формула*

$$p_{n+1}(\zeta, f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \bar{\zeta}^{n-k} c_{k+1}(\zeta, f). \tag{11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определитель системы линейных уравнений

$$x_j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} y_k, \quad j = 0, \ldots, n, \tag{12}$$

отличен от нуля, следовательно, такая система уравнений имеет единственное решение. Проверкой можно убедиться в том, что это решение имеет вид

$$y_m = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}x_j, \quad m=0,1,\dots,n. \tag{13}$$

Действительно, подстановка (12) в (13) дает

$$y_m = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}x_j = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}\binom{j}{k}y_k =$$

$$= (-1)^m\sum_{k=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{m-k}(-1)^{\nu+k}\binom{m}{\nu+k}\binom{\nu+k}{k}y_k = (-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}y_k\sum_{\nu=0}^{m-k}(-1)^{\nu}\binom{m-\nu}{\nu} = y_m,$$

т.к. внутренняя сумма в последней части равенства равна нулю, за исключением случая $m-k=0$.

Полагая $(-1)^j c_{j+1}(\zeta,f)/\bar{\zeta}^{j+1}=x_j$, $(-1)^k p_{k+1}(\zeta,f)/\bar{\zeta}^{k+1}=y_k$, из соотношений (10), (12), (13) получаем формулу (11), что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. *Пусть $f(\zeta)$ – аналитическая и локально однолистная в E функция, $n\geqslant 3$. Тогда для дифференциального выражения*

$$S_n(\zeta,f) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{n!}{2^{n-1}}\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)^{n-1}, \tag{14}$$

обобщающего шварциан $\{f,\zeta\}$, справедливо представление

$$S_n(\zeta,f) = \sum_{j=0}^{n-3}b_j(\zeta)\{f,\zeta\}^{(j)}, \tag{15}$$

причем функции $b_j(\zeta)$ являются аналитическими в E, но зависящими, вообще говоря, от f и n; кроме того, $b_{n-3}(\zeta)\equiv 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\varphi(\zeta)=f''(\zeta)/f'(\zeta)$ и применим метод математической индукции при $n\geqslant 3$. Имеем

$$S_3(\zeta,f) \equiv \{f,\zeta\}.$$

Пусть для некоторого $k>3$

$$\frac{f^{(k)}}{f'} = \frac{k!}{2^{k-1}}\varphi^{k-1} + \sum_{j=0}^{n-3}b_{jk}(\zeta)\{f,\zeta\}^{(j)},$$

где $b_{k-3,k}\equiv 1$, b_{jk} – аналитические в E функции. Продифференцируем это соотношение по ζ, имея в виду, что $\varphi'=\{f,\zeta\}+\varphi^2/2$, $f^{(k+1)}/f'=(f^{(k)\prime}/f)'+\varphi f^{(k)}/f'$. Тогда будем иметь

$$\frac{f^{(k+1)}}{f'} = \frac{k!(k-1)}{2^{k-1}}\varphi^{k-2}(\varphi^2/2+\{f,\zeta\}) + \sum_{j=0}^{k-3}[b'_{jk}\{f,\zeta\}^{(j)}+b_{jk}\{f,\zeta\}^{(j+1)}] +$$

$$+\varphi\left(\frac{k!}{2^{k-1}}\varphi^{k-1} + \sum_{j=0}^{k-3}b_{jk}\{f,\zeta\}^{(j)}\right) = \frac{(k+1)!}{2^k}\varphi^k + \sum_{j=0}^{k-2}b_{j,k+1}\{f,\zeta\}^{(j)},$$

где $b_{k-2,k+1}\equiv b_{k-3,k}\equiv 1$, остальные коэффициенты $b_{j,k+1}$ являются линейными комбинациями 1, b_{jk}, b'_{jk}, φb_{jk}, следовательно, будут аналитическими функциями при $\zeta\in E$. Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу (10) функция $g_n(f,\zeta)$ является полианалитической функцией. Пункт 2) теоремы 1 следует поэтому из известных теорем о локальном поведении полианалитических функций, полученных М.Б.Балком и М.Ф.Зуевым (см. [9]).

Докажем п. 1) теоремы 1. Уравнение $g_n(f,\zeta)=0$ можно записать в виде

$$\psi_n(\zeta,w) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{w^{n-k}}{(k+1)!}\frac{f^{(k+1)}(\zeta)}{f'(\zeta)} = 0, \tag{16}$$

где $w=w(\zeta)=\bar{\zeta}/(1-|\zeta|^2)$.

Очевидно, имеет место равенство

$$\partial\psi_n/\partial w \equiv n\psi_{n-1}. \tag{17}$$

Следовательно, если $a\in G_n(f)$, то $\partial\psi_n(a, w(a))/\partial w\neq 0$. По теореме о неявных функциях множество $G_n(f)$ будет описываться условием $w(a)=\Phi(a)$, где $\Phi(\zeta)$ – функция, получаемая решением уравнения (16) относительно w и аналитическая в некоторой окрестности точки a. Поэтому из п. 2) теоремы 1 следует, что либо точка $a \in G_n(f)$ изолирована от других нулей $g_n(f, \zeta)$, либо пересечение $U(a)\cap G_n(f)$ содержит одну аналитическую дугу для достаточно малой окрестности $U(a)$. Кроме того, из условия (8) теоремы 1 следует (подробнее об этом см. в [7]), что $G_n(f)$ не содержит точек некоторого достаточно узкого кольца $1-\varepsilon<|\zeta|<1$, $\varepsilon>0$.

Поэтому приходим к следующей ситуации: либо множество $G_n(f)$ конечно, либо существуют такие замкнутая аналитическая кривая $L\subset G_n(f)$ и аналитическая на L функция $\Phi(\zeta)$, что $w(\zeta) \equiv \Phi(\zeta)$ на L. В силу условий, наложенных на $G_{n-1}(f)$, $G_n(f)$, и соотношения (17) функция $\Phi(\zeta)$ аналитически продолжима на область D, $\partial D=L$. Действительно, по условию теоремы множество $G_{n-1}(f)$ либо пусто, либо содержит единственную точку z_0, причем $z_0\notin G_n(f)$, в частности, $z_0\notin L$. В силу (17) и теоремы о неявных функциях $w=\Phi(\zeta)$ аналитически продолжима тогда либо на весь круг E, либо на $E\setminus\{z_0\}$. Кроме того, $\Phi(\zeta)$ однозначна на L, следовательно, предположение о том, что $z_0\in D$ и $\Phi(\zeta)$ неоднозначна в окрестности точки z_0, противоречит принципу аргумента. Поэтому $D\cap G_{n-1}(f)$ пусто, и $\Phi(\zeta)$ однозначна в D по теореме о монодромии.

В силу однозначности и аналитичности $\Phi(\zeta)$ в $\overline{D}$ по принципу аргумента

$$I[\Phi(\zeta)] = \operatorname*{var}_{\zeta\in L} \operatorname{Arg}[\Phi(\zeta)-w(a)] \geqslant 0, \tag{18}$$

когда ζ пробегает L в положительном направлении. С другой стороны, $w(\zeta)$ гомеоморфно отображает E на всю плоскость, меняя ориентацию. Поэтому, если $a\in D$, то по принципу аргумента $I[w(\zeta)]=-2\pi$, что противоречит (18), т.к. $I[w(\zeta)]=I[\Phi(\zeta)]$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем сначала, что $C_n(f)=P_n(f)$. Пусть $\zeta\in C_n(f)$, т.е. $g_k(\zeta, f)=0$, $k=\overline{1,n}$, следовательно, $c_k(\zeta,f)=0$, $k=\overline{1,n}$, в силу формулы (10). Тогда из (11) следует, что $p_k(\zeta, f)=\overline{\zeta}^{k-1}$ при $k=2,3,\dots,n+1$, т.к. $C_n(f)\equiv 1$. Таким образом, $\zeta\in P_n(f)$.

Если $\zeta\in P_n(f)$, то подставляем в (10) значение $p_k(\zeta, f)$ при $k=2,3,\dots,n+1$ и получаем, что $g_k(\zeta, f)=(k+1)(-\overline{\zeta})^k(1-1)^k=0$ при $k=1,2,\dots,n$, т.е. $\zeta\in C_n(f)$.

Докажем теперь равенство $C_n(f)=S_n(f)$. Имеем $C_1(f)=S_1(f)$ по определению. При $n\geqslant 2$ из (9) и (14) следует равенство

$$p_{k+1}(\zeta, f) = \frac{(1-|\zeta|^2)^k}{(k+1)!} S_{k+1}(\zeta, f) + p_2^k(\zeta,f), \quad k=1,\dots,n, \tag{19}$$

а из (19) и формулы (10) получаем

$$\frac{g_m}{m+1} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\overline{\zeta}^{m-k}(p_2^k+Q_{k+1}), \quad m=1,2,\dots,n, \tag{20}$$

где

$$g_m = g_m(\zeta, f), \quad p_2 = p_2(\zeta, f), \quad Q_1\equiv Q_2\equiv 0, \quad Q_{k+1} = (1-|\zeta|^2)^k S_k(\zeta, f)/(k+1)!$$

при $k\geqslant 2$.

Если $\zeta\in S_n(f)$, то в силу (15) и определения $S_n(f)$ будем иметь $p_2=\overline{\zeta}$, $Q_1=Q_2=\ldots=Q_{n+1}=0$, и равенства (20) дают принадлежность ζ множеству $C_n(f)$.

Если $\zeta\in C_n(f)$, то по доказанному выше $\zeta\in P_n(f)$, т.е. $p_k=\overline{\zeta}^{k-1}$ при $k=2,\ldots,n+1$. Поэтому из (19) получаем $S_k(\zeta,f)=0$ при $k=2,\ldots,n+1$. Согласно (15) по индукции получаем, что $\{f,\zeta\}=\ldots=\{f,\zeta\}^{(k)}=0$, при $k=0,\ldots,n-2$, т.е. $\zeta\in S_n(f)$. Теорема 2 доказана.

Для обоснования следствий из теоремы 2 необходимо исследовать случай, когда $f(\zeta)$ – дробно-линейная функция. Пусть $f(\zeta)=a\zeta+b$, $a\neq 0$. Тогда $f'(\zeta)=a$, $f^{(k)}(\zeta)\equiv 0$ при $k\geq 2$, следовательно, $g_n(\zeta,f)=0$ тогда и только тогда, когда $\zeta=0$, т.е. $G_n(f)=C_n(f)=\{0\}$ при любом $n\geq 1$. В общем случае подобный вывод сохраняется: при любом n множества $G_n(f)=C_n(f)$ либо состоят из единственного элемента, либо пусты. Действительно, необходимо рассмотреть функцию $f(\zeta)=a-1/(\zeta-\zeta_0)$, где $|\zeta_0|\geq 1$ в силу аналитичности $f(\zeta)$. Тогда $f^{(k)}(\zeta)=k!/(\zeta_0-\zeta)^{k+1}$ при $k\geq 1$ и уравнение $g_n(\zeta,f)=0$ можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left[\frac{1-|\zeta|^2}{\overline{\zeta}(\zeta_0-\zeta)}\right]^k=\left[1-\frac{|\zeta|^2}{\overline{\zeta}(\zeta_0-\zeta)}\right]^n=0.$$

Отсюда следует, что $\overline{\zeta}=1/\zeta_0$ и $G_n(f)=C_n(f)=\{1/\overline{\zeta}_0\}$ при $|\zeta_0|>1$, $G_n(f)=C_n(f)=0$ при $|\zeta_0|=1$.

Пусть $n\geq 2$. Предположим, что $C_n(f)$ имеет точку сгущения, лежащую в E. Равенство $C_n(f)=S_n(f)$ и теорема единственности дают: $\{f,\zeta\}\equiv 0$. Следовательно, $f(\zeta)$ дробно-линейна, и для нее $C_n(f)$ содержит не более одной точки. Полученное противоречие доказывает следствие 1.

Следствие 2 получается так. Если утверждение неверно и существует точка $\zeta_0\in C_n(f)$ для всех $n\geq 1$, то шварциан и все его производные обращаются в нуль в точке ζ_0, т.е. $\{f,\zeta\}\equiv 0$, что исключено.

Для обоснования следствия 3 используется равенство $C_n(f)=P_n(f)$. А именно, пусть n – натуральное число и $a\in E$. Построим локально однолистную и аналитическую в E функцию $f(\zeta)$ следующим образом:

$$\ln f'(\zeta)=a_1(\zeta-a)+a_2(\zeta-a)^2+\ldots+a_n(\zeta-a)^n.$$

Полагаем $a_1=2\overline{a}/(1-|a|^2)$. Тогда $p_2(a,f)=\overline{a}$ и $a\in G_1(f)$. Можно определить последовательно остальные коэффициенты $a_1,\ldots,a_n$ так, чтобы $p_{k+1}(a,f)=\overline{a}^k$, $k=2,\ldots,n$. Действительно, нетрудно убедиться, что $f^{(k+1)}(a)=k!a_k+Q_k(a_1,\ldots,a_{k-1})$ при $k=2,\ldots,n-1$, где Q_k – полиномы от предыдущих коэффициентов. Поэтому равенство $p_{k+1}(a,f)=\overline{a}^k$ равносильно соотношению $a_k=(k+1)\overline{a}^k/(1-|a|^2)^k-(k+1)!Q_k(a_1,\ldots,a_{k-1})$, определяющему a_k при $k=2,3,\ldots$ Следствия из теоремы 2 доказаны.

Формулы (14) и (15) позволяют выразить $g_n(\zeta,f)$ через отношение f''/f', шварциан и его производные. Ввиду сложности явных формул в общем случае, приведем лишь новую форму для уравнения второго порядка. Имеем

$$\frac{g_2(\zeta,f)}{(1-|\zeta|^2)^2}=\frac{1}{6}\{f,\zeta\}+\left[\frac{\overline{\zeta}}{1-|\zeta|^2}-\frac{1}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right]^2=\{f,\zeta\}/6+\left[\frac{g_1(\zeta,f)}{1-|\zeta|^2}\right]^2.$$

Поэтому уравнение Ф.Д.Гахова второго порядка равносильно следующему

$$\frac{1}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2} \pm \frac{i}{\sqrt{6}}\sqrt{\{f,\zeta\}}. \tag{21}$$

Формула (21) и возможное представление $g_n(\zeta, f)$ в виде полинома по степеням $g_1(\zeta, f)$ позволяют предположить, что стандартной ситуацией для уравнений порядка n является наличие n корней. Это предположение можно подтвердить на некоторых примерах. Так, если $f(\zeta)=e^{\zeta}$, то уравнение примет вид

$$g_n(\zeta, f) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{w^{n-k}}{(k+1)!} = 0, \qquad w = \frac{\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2}.$$

При $n=1$ единственным корнем является $w=\zeta=0$.

При $n=2$ имеется два корня, соответствующие значениям $w=1/2\pm i\sqrt{3}/6$.

При $n\geq 3$ можно показать, что уравнение относительно w не имеет кратных корней, следовательно, оно имеет n различных корней согласно теореме Гаусса, причем $G_{n-1}(f)\cap G_n(f)=\varnothing$.

При $n\geq 2$ удается тем не менее выделить достаточно содержательные классы единственности. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция $f(\zeta)$ аналитична и локально однолистна в E и пусть*

$$\sup_{|\zeta|<1}|\zeta|^{1-2n}(1-|\zeta|^2)|f''(\zeta)/f'(\zeta)| < B(n) = 1\Big/\sum_{1}^{n}\binom{n}{k}\frac{A(k,n)}{(k+1)!},$$

где $A(1,n)=1$, остальные коэффициенты определяются рекуррентным соотношением $A(k+1,n)=(4n+1-k)A(k,n)$.

Тогда множество $G_n(f)$ состоит из единственной точки $\zeta=0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $n=1$ и $n=2$ можно взять $B(1)=2$ и $B(2)=2/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $n=1$, $B(1)=2$ тривиален.

Следуя идее С.Н.Кудряшова [4], изучавшего вопросы единственности для уравнения первого порядка, докажем, что условие теоремы влечет за собой доминирование первого слагаемого над остальными в сумме (10), выделяя случаи $n=2$ и $n>2$.

При $n=2$ согласно (21) покажем, что

$$\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| + \frac{\sqrt{6|\{f,\zeta\}|}}{3} < \frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \quad 0<|\zeta|<1. \tag{22}$$

Имеем: если $\varphi(\zeta)=\zeta^{-3}f''(\zeta)/f'(\zeta)$, то $|\varphi(\zeta)|\leq B/(1-|\zeta|^2)$ для любого $|\zeta|<1$, следовательно, справедливо неравенство [10]: $|\varphi'(\zeta)| \leq k_0B/(1-|\zeta|^2)^2$, $|\zeta|<1$, $k_0 = 3{,}202\ldots$ Но тогда $\{f,\zeta\} = 3\zeta^2\varphi(\zeta)+\zeta^3\varphi'(\zeta)-(1/2)\zeta^6\varphi^2(\zeta)$ и левая часть в (22) не превосходит величины $Br^3+\sqrt{2B(3-3r^2+k_0r-Br^4/2)/3}$, где $r=|\zeta|<1$. Элементарные вычисления показывают, что (22) будет выполнено, если $B\leq(k_0+6)/2-\sqrt{(k_0+6)^2/4-6} = 0{,}7\ldots > 2/3$, что и требовалось доказать.

Пусть $n>2$. В силу формулы (10) нам достаточно

$$\left|\frac{f^{(k+1)}(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \leq \frac{|\zeta|^{2n-k}B(n)A(k,n)}{(1-|\zeta|^2)^k}, \quad |\zeta|<1. \tag{23}$$

При $k=1$ это неравенство – требование теоремы, т.к. $A(1,n)=1$. Пусть $k\geq 2$ и неравенство (23) верно для $k-1$. Имеем $f^{(k+1)}/f' = (f^{(k)}/f')'+(f^{(k)}/f')(f''/f')$, поэтому необходимо оценить $(f^{(k)}/f')'$. Обозначим через $\varphi(\zeta)$ выражение $\zeta^{-2n+k-1}f^{(k)}/f(\zeta)$. Тогда $(f^{(k)}/f')'=$

$=(2n+k-1)\zeta^{2n-k}\varphi+\zeta^{2n-k+1}\varphi'$ и $|\varphi(\zeta)|\leq B(n)A(k-1,n)/(1-|\zeta|^2)^k$, $|\zeta|<1$. По методу Дюрена, Шапиро и Шилдса [11] получаем

$$|\varphi'(\zeta)| \leq d_k B(n)A(k-1,n)/(1-|\zeta|^2)^{k+1}, \quad |\zeta|<1,$$

где $d_k=k^k/(k-1)^{k-1}<ek$, $d_2=k_0=3{,}2...$ Простые вычисления показывают теперь справедливость неравенств

$$A(k,n) \leq (4n-k+1)A(k-1,n), \quad k=2,3,...,n,$$

что и требовалось.

Связь уравнений Ф.Д.Гахова высших порядков с коэффициентами преобразований и локальной теорией полианалитических функций (см. формулу (10) и доказательства теорем) позволяет надеяться на появление новых методов исследования множеств $G_n(f)$. В связи с этим укажем на трудные проблемы, решение которых существенно развило бы теорию обратных краевых задач на римановых поверхностях.

1. Каковы необходимые и достаточные условия на множество M, обеспечивающие равенство $M=G_n(f)$ для некоторой функции $f(z)$? Ответ неизвестен даже в простейшем случае $n=1$.

2. Справедлива ли теорема 1 и каков аналог теоремы 2 в случае многосвязных областей?

3. Как описать в терминах инварианта линейных преобразований $f''(\zeta)/f'(\zeta)$ и (или) шварциана классы функций, для которых $g_n(\zeta,f)$ имеет ровно n нулей? Отметим, что вращение векторного поля $g_n(\zeta,f)$ при выполнении условий (8) равно n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

2. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – 2-е изд. – Казань, 1965. – 333 с.

3. Рогожин В.С. *Об единственности решения внешней обратной краевой задачи* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1957. – Кн. 117. – № 2. – С.38–41.

4. Кудряшов С.Н. *О числе решений внешних обратных краевых задач* // Изв. вузов. Математика. – 1969. – № 8. – С.30–32.

5. Аксентьев Л.А. *Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 2. – С.3–11.

6. Киселев А.В., Насыров С.Р. *О структуре множества корней уравнения Ф.Д.Гахова для односвязной и многосвязной областей* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань, 1990. – № 24. – С.105–115.

7. Авхадиев Ф.Г. *Обратная краевая задача для функции с особенностями* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань, 1984, вып. 21. – С.5–19.

8. Фридман А. *Вариационные принципы и задачи со свободными границами.* – М.: Наука, 1990. – 536 с.

9. Балк М.Б., Зуев М.Ф. *О полианалитических функциях* // УМН. – 1970. – Т.25. – № 5. – С.203–226.

10. Wirths Karl-Joachim. *Über holomorphe Funktionen, die einer Wachstumsbeschränkung unterliegen* // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30. – № 6. – S. 606–612.

11. Duren P.L., Shapiro H.S., Shields A.L. *Singular measures and domains not of Smirnow type* // Duke Math. J. – 1966. – V.33. – № 2. – P.247–254.

Казанский государственный университет

Поступила
31.01.1994